Trasmissione del calore in un corpo investito da fascio laser

Lapo F. Mori*
Facoltà di Ingegneria
Università di Pisa
Pisa, I 56126
lapo.mori@studenti.ing.unipi.it

4 luglio 2004

Sommario

Questo documento raccoglie i codici dei programmi per Matlab [1] utilizzati nell'ambito delle esercitazioni del corso di *Processi di Produzione Innovativi* tenuto dal prof. Gino Dini nell'anno accademico 2003-2004 agli studenti della Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica presso l'Università di Pisa. Tali programmi implementano il modello di trasmissione del calore in un corpo investito da fascio laser per il caso monodimensionale a parametri costanti su spessore semi-infinito.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX 2_ε

*Ringrazio il prof. Gino Dini per le correzioni.

Indice

1 Equazioni dimensionali 3
1.1 Fase di riscaldamento . . . 3
1.2 Fase di raffreddamento . . . 3
1.3 Grafici . . . 4
1.4 M-file per Matlab . . . 6

2 Equazioni adimensionali 8
2.1 Variabili adimensionali . . . 8
2.2 Grafici . . . 8
2.3 M-file per Matlab . . . 11

3 Tempra 13
3.1 Condizioni . . . 13
3.2 Equazioni utilizzate . . . 13
3.3 M-file per Matlab . . . 14

Riferimenti bibliografici 16

Elenco delle figure

1 Grafico di $T = T(z, t)$. . . . 4
2 Proiezione di $T = T(z, t)$ sul piano $T - t$. . . . 5
3 Proiezione di $T = T(z, t)$ sul piano $T - z$. . . . 5
4 Grafico di $T_n = T_n(z_n, t_n)$. . . . 9
5 Proiezione di $T_n = T_n(z_n, t_n)$ sul piano $T_n - t_n$. . . . 10
6 Proiezione di $T_n = T_n(z_n, t_n)$ sul piano $T_n - z_n$. . . . 10
7 Grafico di $T = T(z, t)$ per $z = 0$, $z = \frac{\tilde{z}}{2}$ e $z = \tilde{z}$ e della curva CCT. . . 14

1 Equazioni dimensionali

1.1 Fase di riscaldamento

Nella fase di riscaldamento, ovvero per $t \leqslant \tau$, dove con τ si indica il tempo per cui rimane acceso il laser, abbiamo che la temperatura del materiale T, con $[T] = °\mathrm{C}$, dipende dalla distanza dalla superficie z, con $[z] = \mathrm{cm}$, e dal tempo t, con $[t] = \mathrm{s}$, secondo la legge

$$T(z,t) = \frac{F_0 \cdot D}{k} \cdot \mathrm{ierfc}\left(\frac{z}{D}\right), \tag{1}$$

dove F_0 (vedi l'equazione (2)) è il flusso termico assorbito dal materiale, con $[F_0] = \mathrm{W/cm^2}$, D (vedi l'equazione (3)) è la distanza di diffusione termica, con $[D] = \mathrm{cm}$, e k è la conducibilità termica del materiale, con $[k] = \mathrm{W}/\left(\mathrm{cm} \cdot °\mathrm{C}\right)$.

Il flusso termico assorbito dal materiale vale

$$F_0 = \frac{P}{S}\left(1 - r\right), \tag{2}$$

dove P è la potenza del laser, con $[P] = \mathrm{W}$, S è l'area della sezione del fascio laser, con $[S] = \mathrm{cm^2}$, e r è la riflettività del materiale.

La distanza di diffusione termica vale

$$D \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2 \cdot \sqrt{\alpha \cdot t}, \tag{3}$$

dove α è la diffusività termica del materiale, con $[\alpha] = \mathrm{cm^2/s}$, definita come

$$\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{k}{C_p \cdot \gamma},$$

dove C_p è il calore specifico del materiale, con $[C_p] = \mathrm{J}/\left(\mathrm{g} \cdot °\mathrm{C}\right)$ e γ il peso specifico del materiale, con $[\gamma] = \mathrm{g/cm^3}$.

1.2 Fase di raffreddamento

Nella fase di raffreddamento, ovvero per $t > \tau$, dove con τ si indica il tempo per cui rimane acceso il laser, abbiamo che la temperatura del materiale T, con $[T] = °\mathrm{C}$, dipende dalla distanza dalla superficie z, con $[z] = \mathrm{cm}$, e dal tempo t, con $[t] = \mathrm{s}$, secondo la legge

$$T(z,t) = \frac{F_0}{k} \cdot \left[D \cdot \mathrm{ierfc}\left(\frac{z}{D}\right) - D' \cdot \mathrm{ierfc}\left(\frac{z}{D'}\right)\right], \tag{4}$$

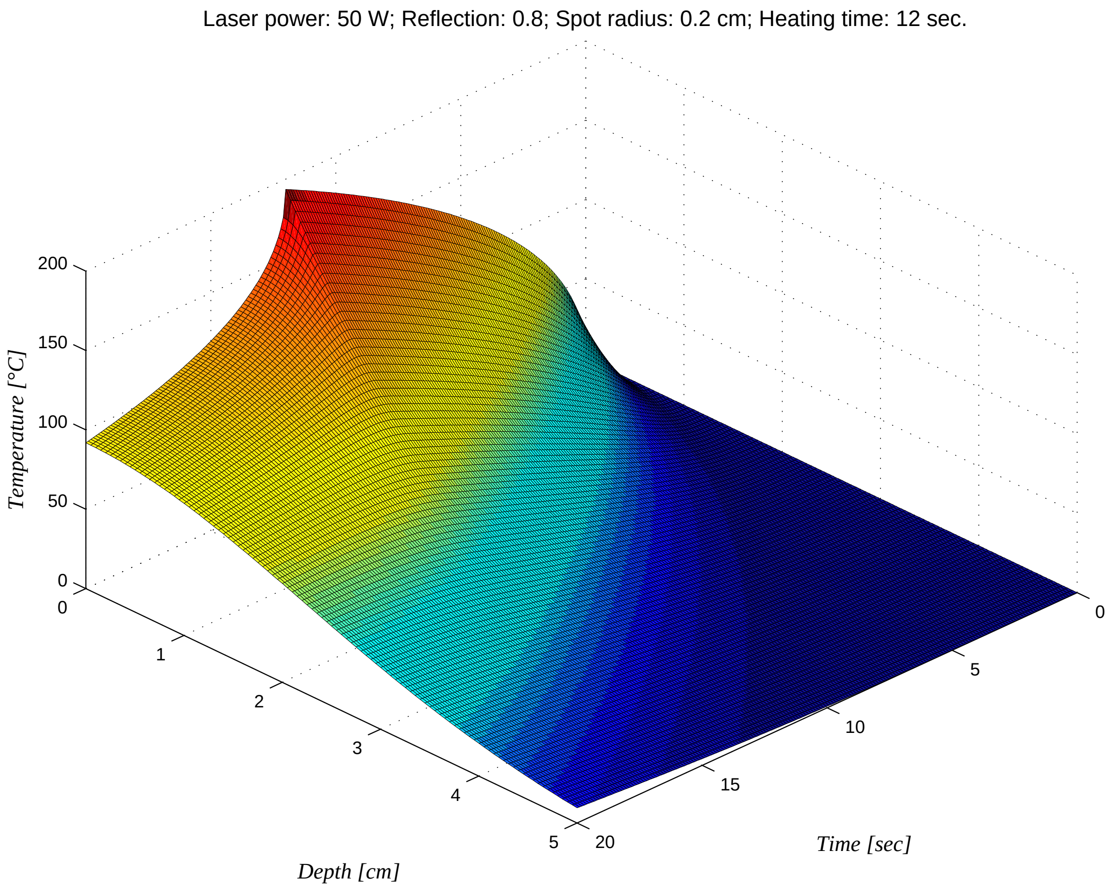

Figura 1: Grafico di $T = T(z, t)$.

dove abbiamo definito $D' \stackrel{\text{def}}{=} 2 \cdot \sqrt{\alpha \cdot (t - \tau)}$, con $[D'] = \text{cm}$.

1.3 Grafici

Nella figura 1 è rappresentato il grafico dell'equazione (4) per $0 \text{ s} \leqslant t \leqslant 20 \text{ s}$ e $0 \text{ cm} \leqslant z \leqslant 5 \text{ cm}$.

Nella figura 2 è riportata la proiezione della superficie $T = T(z, t)$ sul piano $T - t$: il profilo in alto rappresenta l'andamento della temperatura massima (quella che si ha sulla superficie del materiale, ovvero per $z = 0$ cm) al variare del tempo, mentre il profilo in basso rappresenta l'andamento della temperatura minima (quella che si ha lontano dalla superficie del materiale, ovvero per $z = 5$ cm) al variare del tempo.

Nella figura 3 è riportata la proiezione della superficie $T = T(z, t)$ sul piano $T - z$: il profilo in alto rappresenta l'andamento della temperatura massima in funzione della profondità.

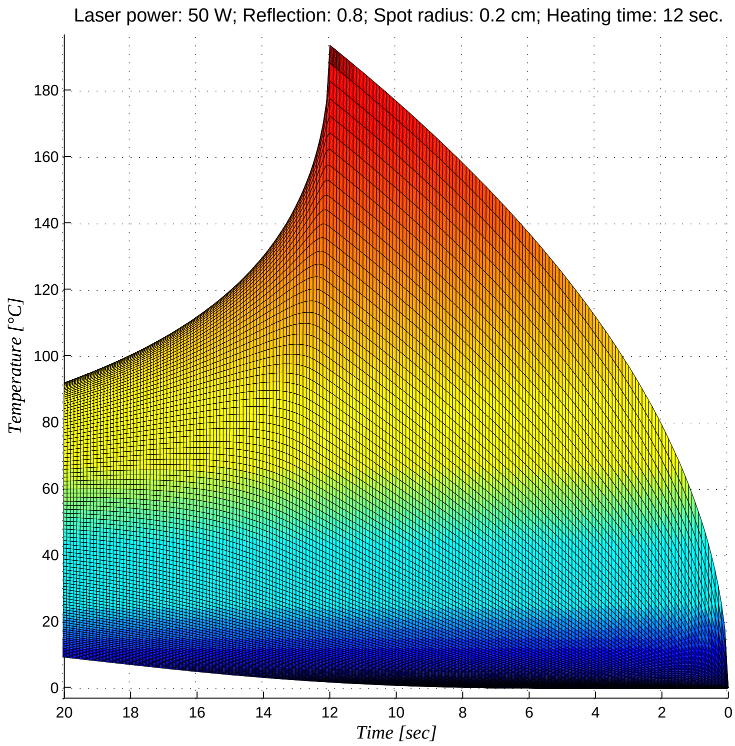

Figura 2: Proiezione di $T = T(z, t)$ sul piano $T - t$.

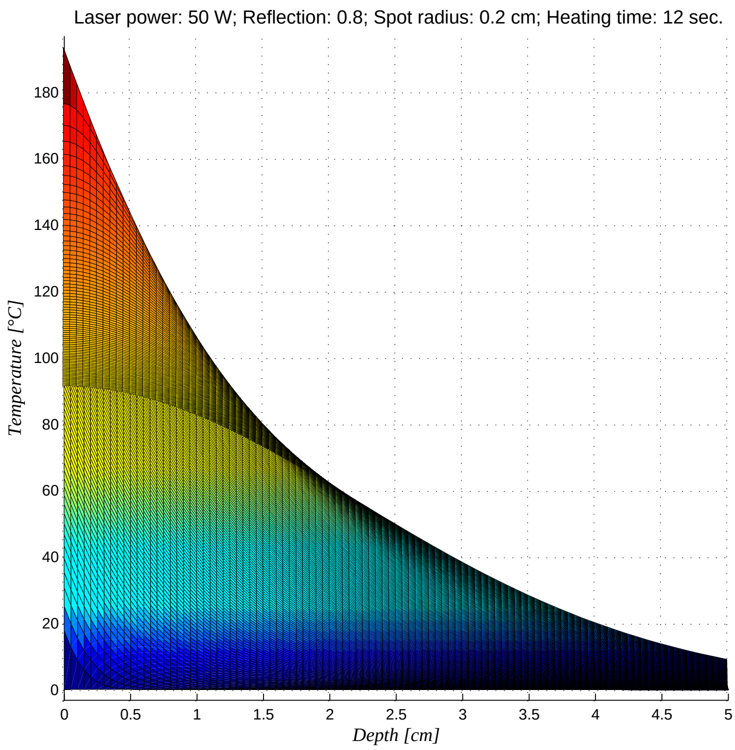

Figura 3: Proiezione di $T = T(z, t)$ sul piano $T - z$.

1.4 M-file per Matlab

```matlab
% MODELLO MONODIMENSIONALE A PARAMETRI COSTANTI
% Spessore semi-infinito

clear all

P=50; % Potenza laser [W]
r=0.8; % Riflettività superficie
R0=0.2; % Raggio fascio [cm]
S=pi*R0^2; % Area sezione fascio [cm2]
F0=P*(1-r)/S; % Flusso incidente sul pezzo [W/cm2]
K=0.72; % Conducibilità termica di un acciaio a 25°C [W/cm°C]
ro=7.8; % Peso specifico di un acciaio [g/cm3]
Cp=0.46; % Calore specifico di un acciaio a 25 °C [J/g°C]
alfa=K/(ro*Cp); % Diffusività termica del materiale [cm2/sec]
tau=12; % Tempo di riscaldamento [sec]

z=0:0.05:5; % z = profondità in cm
t=0:0.1:20; % t = tempo in sec

% Fase di riscaldamento

for i=1:101
    for j=1:tau*10+1
        if j==1
            T(i,j)=0;
        else
            D=2*(alfa*t(j))^0.5;
            ierfc=(1/pi)^0.5*exp(-(z(i)/D)^2)-(z(i)/D)*erfc(z(i)/D);
            T(i,j)=F0*D*ierfc/K;
        end
    end
end

% Fase di raffreddamento

for i=1:101
    for j=tau*10+2:201
        D=2*(alfa*t(j))^0.5;
        Dprimo=2*(alfa*(t(j)-tau))^0.5;
        ierfc=(1/pi)^0.5*exp(-(z(i)/D)^2)-(z(i)/D)*erfc(z(i)/D);
        ierfcprimo=(1/pi)^0.5*exp(-(z(i)/Dprimo)^2)-(z(i)/Dprimo)*erfc(z(i)/Dprimo);
        T(i,j)=F0*(D*ierfc-Dprimo*ierfcprimo)/K;
    end
end

% Grafica

h=axes('Color',[.9,.9,.9],...
    'Fontname','times',...
    'FontAngle','italic',...
    'FontSize',8);
surf(t,z,T)
set(get(h,'Xlabel'),'String','Time [sec]',...
    'Fontname','times',...
    'FontAngle','italic',...
```

```
    'FontSize',10);
set(get(h,'Ylabel'),'String','Depth [cm]',...
    'Fontname','times',...
    'FontAngle','italic',...
    'FontSize',10);
set(get(h,'Zlabel'),'String','Temperature [°C]',...
    'Fontname','times',...
    'FontAngle','italic',...
    'FontSize',10);
set(get(h,'Title'),'String',['Laser power: ',num2str(P),' W; Reflection: ',num2str
     (r),'; Spot radius: ',num2str(R0),' cm; Heating time: ',num2str(tau),' sec.'
     ],...
    'Fontname','arial',...
    'FontSize',10);
```

2 Equazioni adimensionali

2.1 Variabili adimensionali

Definendo delle nuove variabili adimensionali

$$\begin{aligned} T_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{T(z,t)}{T(0,\tau)} = \frac{T(z,t)}{T_{\max}}, \\ z_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{z}{D(\tau)} = \frac{z}{2\cdot\sqrt{\alpha\cdot\tau}}, \\ t_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{t}{\tau}, \end{aligned}$$

è possibile normalizzare le equazioni (1) e (4) ottenendo

$$T_n\left(z_n,t_n\right) = \begin{cases} \sqrt{\pi\cdot t_n}\cdot \operatorname{ierfc}\left(\frac{z_n}{\sqrt{t_n}}\right) & \text{se } t_n \leqslant 1; \\ \sqrt{\pi}\cdot\left[\sqrt{t_n}\cdot \operatorname{ierfc}\left(\frac{z_n}{\sqrt{t_n}}\right) - \sqrt{t_n-1}\cdot \operatorname{ierfc}\left(\frac{z_n}{\sqrt{t_n-1}}\right)\right] & \text{se } t_n > 1. \end{cases} \tag{5}$$

Dalla definizione di t_n risulta che per $t_n \leqslant 1$ si ha la fase di riscaldamento e per $t_n > 1$ la fase di raffreddamento.

2.2 Grafici

Nella figura 4 è rappresentato il grafico dell'equazione (5) per $0 \leqslant t_n \leqslant 2$ e $0 \leqslant z_n \leqslant 1$.

Nella figura 5 è riportata la proiezione della superficie $T_n = T_n\left(z_n,t_n\right)$ sul piano $T_n - t_n$: il profilo in alto rappresenta l'andamento della temperatura massima (quella che si ha sulla superficie del materiale, ovvero per $z_n = 0$) al variare del tempo, mentre il profilo in basso rappresenta l'andamento della temperatura minima (quella che si ha lontano dalla superficie del materiale, ovvero per $z_n = 1$) al variare del tempo.

Nella figura 6 è riportata la proiezione della superficie $T_n = T_n\left(z_n,t_n\right)$ sul piano $T_n - z_n$: il profilo in alto rappresenta l'andamento della temperatura massima in funzione della profondità.

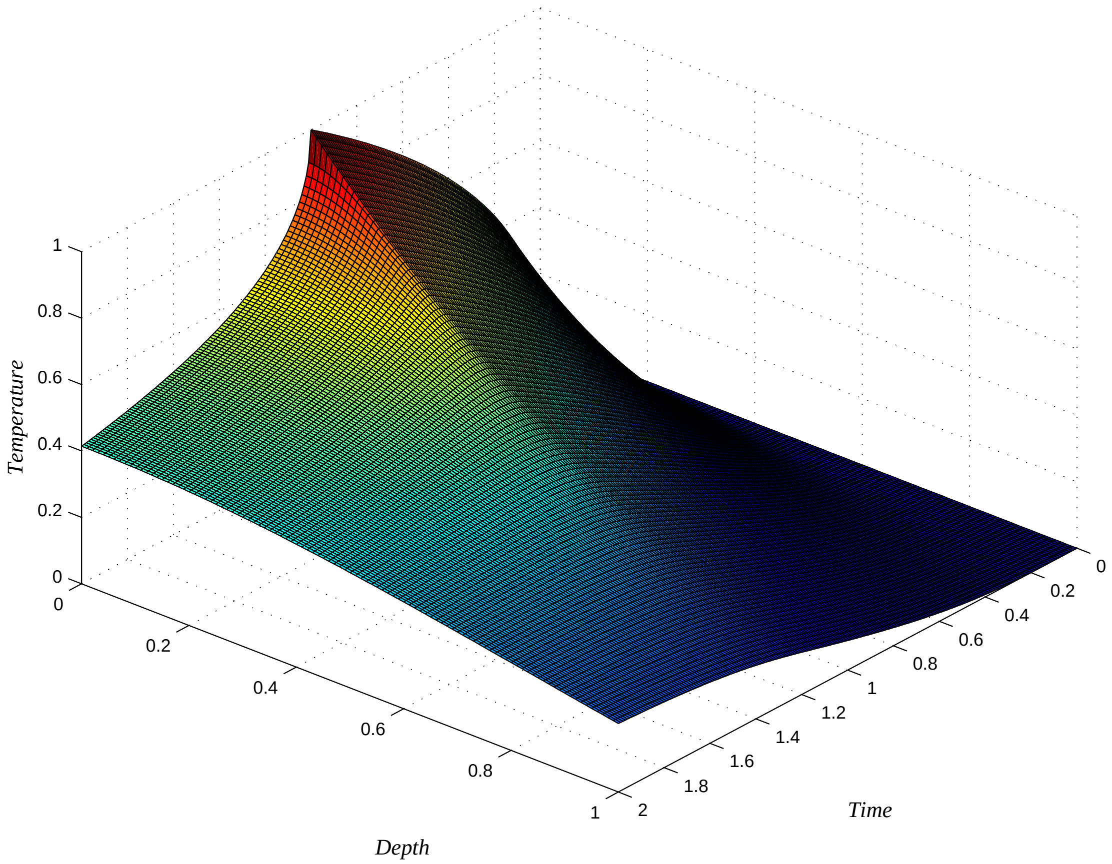

Figura 4: Grafico di $T_n = T_n(z_n, t_n)$.

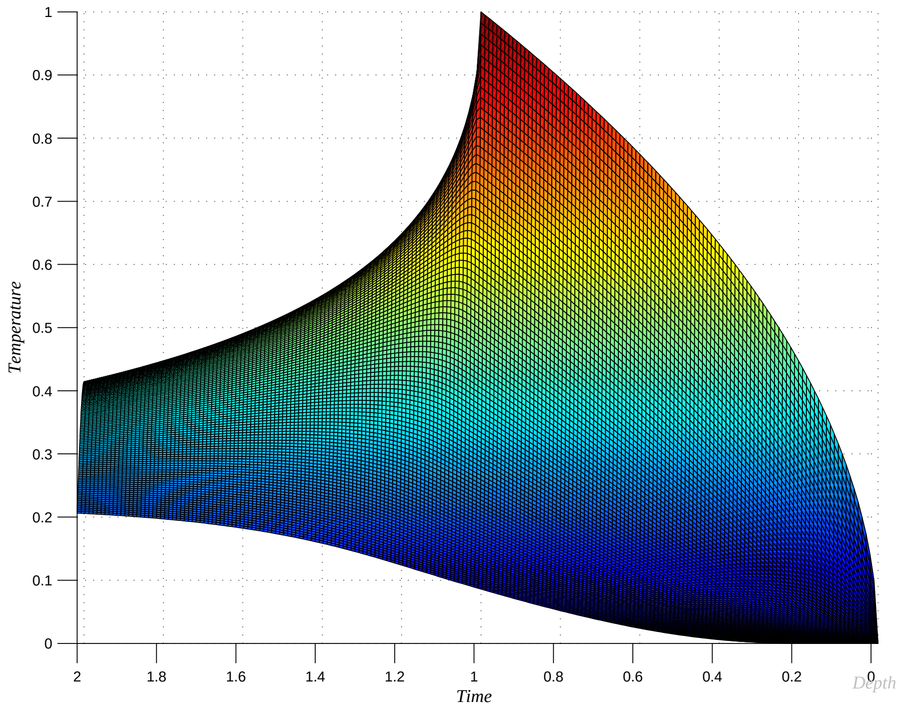

Figura 5: Proiezione di $T_n = T_n(z_n, t_n)$ sul piano $T_n - t_n$.

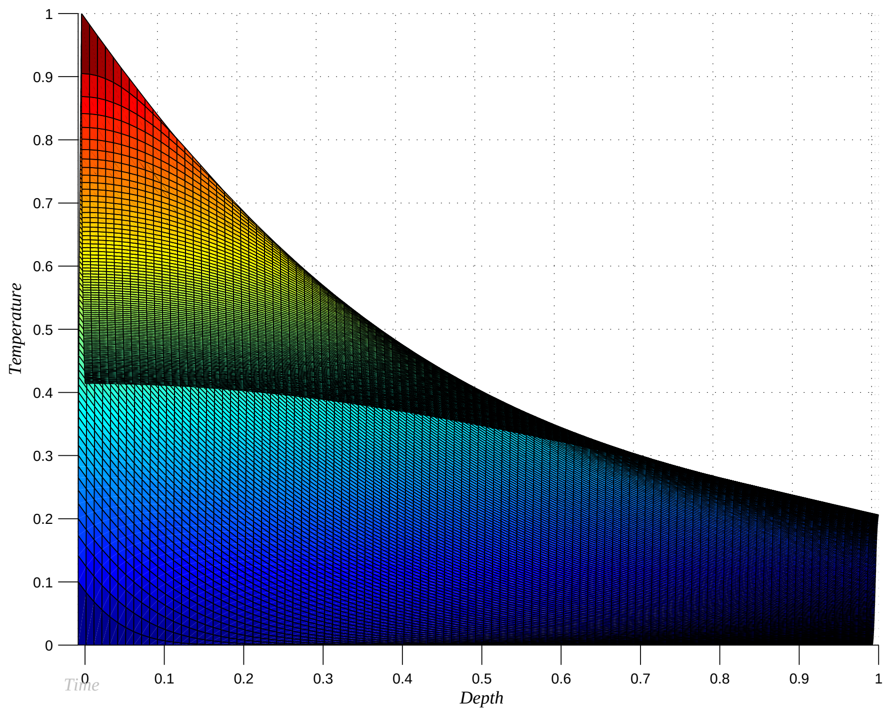

Figura 6: Proiezione di $T_n = T_n(z_n, t_n)$ sul piano $T_n - z_n$.

2.3 M-file per Matlab

```
% MODELLO MONODIMENSIONALE A PARAMETRI COSTANTI
% Spessore semi-infinito

% Normalizzazione

clear all

zn=0:0.01:1; % profondità normalizzata
tn=0:0.01:2; % tempo normalizzato

% Fase di riscaldamento

for i=1:101
    for j=1:101
        if j==1
            Tn(i,j)=0;
        else
            ierfc=(1/pi)^0.5*exp(-(zn(i)/(tn(j))^0.5)^2)-(zn(i)/(tn(j))^0.5)*erfc(zn(
                i)/(tn(j))^0.5);
            Tn(i,j)=(pi*tn(j))^0.5*ierfc;
        end
    end
end

% Fase di raffreddamento

for i=1:101
    for j=102:201
            ierfc1=(1/pi)^0.5*exp(-(zn(i)/(tn(j))^0.5)^2)-(zn(i)/(tn(j))^0.5)*erfc(zn
                (i)/(tn(j))^0.5);
            ierfc2=(1/pi)^0.5*exp(-(zn(i)/(tn(j)-1)^0.5)^2)-(zn(i)/(tn(j)-1)^0.5)*
                erfc(zn(i)/(tn(j)-1)^0.5);
            Tn(i,j)=(pi)^0.5*((tn(j))^0.5*ierfc1-(tn(j)-1)^0.5*ierfc2);;
    end
end

% Grafica

h=axes('Color',[.9,.9,.9],...
    'Fontname','times',...
    'FontAngle','italic',...
    'FontSize',8);
surf(tn,zn,Tn)
set(get(h,'Xlabel'),'String','Time',...
    'Fontname','times',...
    'FontAngle','italic',...
    'FontSize',10);
set(get(h,'Ylabel'),'String','Depth',...
    'Fontname','times',...
    'FontAngle','italic',...
    'FontSize',10);
set(get(h,'Zlabel'),'String','Temperature',...
    'Fontname','times',...
    'FontAngle','italic',...
    'FontSize',10);
```

```
P=50; % Potenza laser [W]
r=0.8; % Riflettività superficie
R0=0.2; % Raggio fascio [cm]
S=pi*R0^2; % Area sezione fascio [cm2]
F0=P*(1-r)/S; % Flusso incidente sul pezzo [W/cm2]
K=0.72; % Conducibilità termica di un acciaio a 25°C [W/cm°C]
ro=7.8; % Peso specifico di un acciaio [g/cm3]
Cp=0.46; % Calore specifico di un acciaio a 25 °C [J/g°C]
alfa=K/(ro*Cp); % Diffusività termica del materiale [cm2/sec]
tau=12; % Tempo di riscaldamento [sec]

Dtau=2*(alfa*tau)^0.5; % Lunghezza di diffusione termica al tempo tau [cm]
Tmax=F0*Dtau/(K*(pi)^0.5); % Temperatura massima sulla superficie al tempo tau [°C
    ]
```

3 Tempra

3.1 Condizioni

Per effettuare la tempra superficiale con fascio laser devono essere verificate tre condizioni:

a. deve essere evitata la fusione, ovvero $T(0, \tau) < T_{amm}$;

b. alla profondità di tempra si deve raggiungere la temperatura di austenitizzazione, ovvero $T(z, t) < T_A$;

c. la velocità di raffreddamento deve essere superiore a quella critica di tempra.

3.2 Equazioni utilizzate

Alla fine del riscaldamento, ovvero per $t_n = 1$, abbiamo

$$T_n\left(z_n, 1\right) = \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{ierfc}\left(z_n\right)$$

dunque, noto il rapporto T_A/T_{amm}, possiamo trovare la profondità di tempra normalizzata $\tilde{z}_n$ che permetta di raggiungere T_A nel materiale semplicemente risolvendo la seguente equazione

$$\frac{T_A}{T_{amm}} = \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{ierfc}\left(\tilde{z}_n\right); \tag{6}$$

in questo modo sono state rispettate le condizioni a e b.

Dato che

$$z_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z}{2 \cdot \sqrt{\alpha \cdot \tau}},$$

possiamo calcolare il tempo di interazione del laser $\tilde{\tau}$ necessario a raggiungere la profondità di tempra desiderata $\tilde{z}$, utilizzando la conoscenza di $\tilde{z}_n$ appena calcolato, con la seguente

$$\tilde{\tau} = \frac{\left(\tilde{z}/\tilde{z}_n\right)^2}{4 \cdot \alpha}. \tag{7}$$

Sappiamo che

$$T_{amm} = \frac{F_0 \cdot D(\tau)}{k \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{F_0 \cdot 2 \cdot \sqrt{\alpha \cdot \tau}}{k \cdot \sqrt{\pi}},$$

dunque possiamo calcolare il flusso termico necessario come

$$F_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{T_{amm} \cdot k}{\sqrt{\alpha \cdot \tau}}. \tag{8}$$

Per verificare se anche la condizione c è verificata, è necessario controllare che la curva di raffreddamento del materiale espressa dall'equazione (4) sia inferiore al diagramma di trasformazione per raffreddamento continuo (CCT) per $z \leqslant \tilde{z}$.

3.3 M-file per Matlab

Il codice sotto riportato effettua il calcolo dei parametri di processo per mezzo delle equazioni (6), (7) e (8) ed infine esegue il grafico dell'equazione (4) e della curva CCT per verificare la terza condizione; tale grafico è riportato in figura 7 per il caso di tempra alla profondità $\tilde{z} = 0.25$ cm su un materiale con $T_{amm} = 1100$ °C, $T_A = 750$ °C, $C_p = 0.46$ J/ (g · °C), $\gamma = 7.8$ g/cm^3 e $k = 0.72$ W/ (cm · °C).

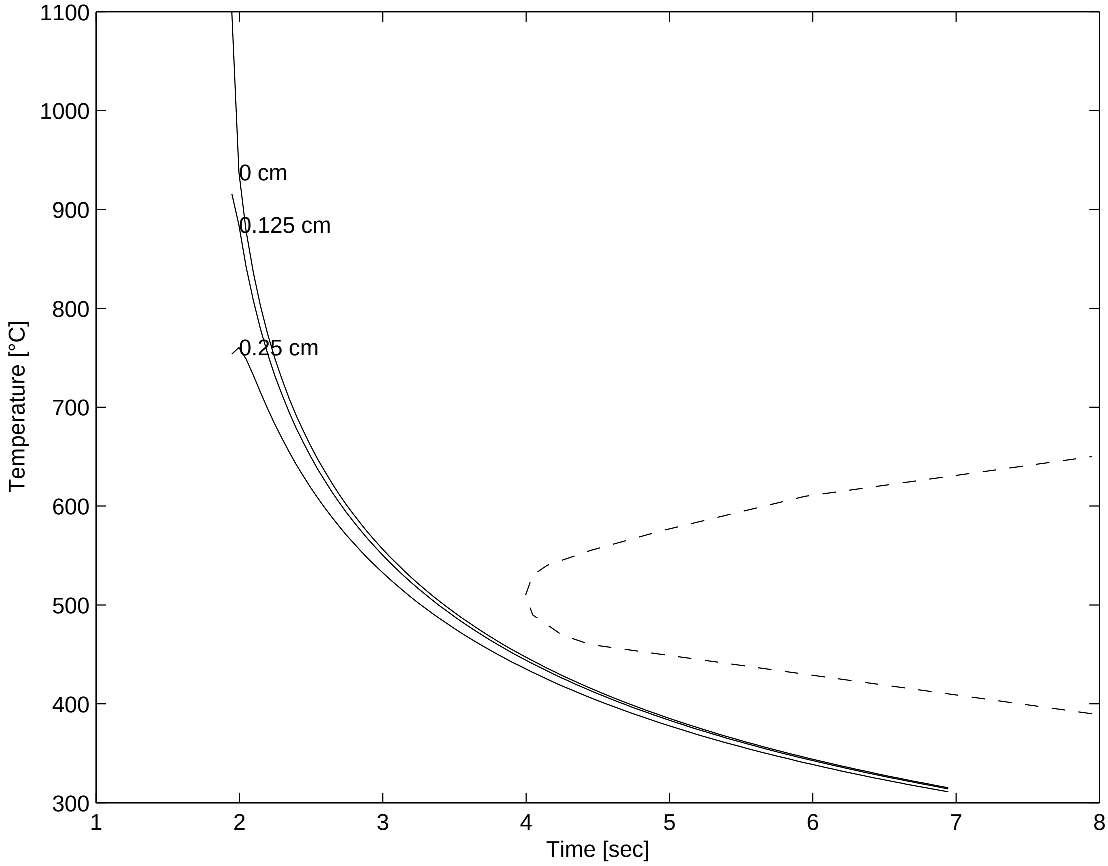

Figura 7: Grafico di $T = T(z, t)$ per $z = 0$, $z = \frac{\tilde{z}}{2}$ e $z = \tilde{z}$ e della curva CCT.

```
K=0.72; % Conducibilità termica di un acciaio a 25°C [W/cm°C]
ro=7.8; % Peso specifico di un acciaio [g/cm3]
Cp=0.46; % Calore specifico di un acciaio a 25 °C [J/g°C]
alfa=K/(ro*Cp); % Diffusività termica del materiale [cm2/sec]
Tmax=1100; % Temperatura massima sopportabile dal materiale [°C]
Taust=750; % Temperatura di austenitizzazione del materiale [°C]
```

```
zprof=0.1; % Profondità di tempra [cm]

% Calcolo profondità normalizzata

delta0=100;
for zn=0:0.01:2
    ierfc=(1/pi)^0.5*exp(-zn^2)-zn*erfc(zn);
    Ttau=Tmax*pi^0.5*ierfc;
    deltaT=abs(Ttau-Taust);
    if deltaT<delta0
        delta0=deltaT;
        zn0=zn;
    end
end

% Calcolo tempo di interazione

tau=(1/(4*alfa))*(zprof/zn0)^2;

% Calcolo del flusso termico necessario

F0=Tmax*(pi)^0.5*K/(2*(alfa*tau)^0.5);

% Analisi curve di raffreddamento

t=tau:0.05:tau+5;

z=0;

D=2*(alfa*tau)^0.5;
ierfc=(1/pi)^0.5*exp(-(z/D)^2)-(z/D)*erfc(z/D);
T(1)=Tmax*pi^0.5*ierfc;

for i=2:101
    D=2*(alfa*t(i))^0.5;
    Dprimo=2*(alfa*(t(i)-tau))^0.5;
    ierfc=(1/pi)^0.5*exp(-(z/D)^2)-(z/D)*erfc(z/D);
    ierfcprimo=(1/pi)^0.5*exp(-(z/Dprimo)^2)-(z/Dprimo)*erfc(z/Dprimo);
    T(i)=F0*(D*ierfc-Dprimo*ierfcprimo)/K;
end

plot(t,T)
text(t(2),T(2),[num2str(z),' cm'])

z=zprof/2;

D=2*(alfa*tau)^0.5;
ierfc=(1/pi)^0.5*exp(-(z/D)^2)-(z/D)*erfc(z/D);
T(1)=Tmax*pi^0.5*ierfc;

for i=2:101
    D=2*(alfa*t(i))^0.5;
    Dprimo=2*(alfa*(t(i)-tau))^0.5;
    ierfc=(1/pi)^0.5*exp(-(z/D)^2)-(z/D)*erfc(z/D);
    ierfcprimo=(1/pi)^0.5*exp(-(z/Dprimo)^2)-(z/Dprimo)*erfc(z/Dprimo);
    T(i)=F0*(D*ierfc-Dprimo*ierfcprimo)/K;
end
```

```
xlabel('Time [sec]');
ylabel('Temperature [°C]');
hold on
plot(t,T)
text(t(2),T(2),[num2str(z),' cm'])

z=zprof;

D=2*(alfa*tau)^0.5;
ierfc=(1/pi)^0.5*exp(-(z/D)^2)-(z/D)*erfc(z/D);
T(1)=Tmax*pi^0.5*ierfc;

for i=2:101
   D=2*(alfa*t(i))^0.5;
   Dprimo=2*(alfa*(t(i)-tau))^0.5;
   ierfc=(1/pi)^0.5*exp(-(z/D)^2)-(z/D)*erfc(z/D);
   ierfcprimo=(1/pi)^0.5*exp(-(z/Dprimo)^2)-(z/Dprimo)*erfc(z/Dprimo);
   T(i)=F0*(D*ierfc-Dprimo*ierfcprimo)/K;
end

plot(t,T)
text(t(2),T(2),[num2str(z),' cm'])

% Curva CCT

cct = [ 6          5          4          3          2.5
    2.4     2.3     2.2     2.1     2.05     2.1     2.2     2.3     2.4     2.5
        3       4       5       6       ];
CCT = [ 390     410     430     450     460     465     470     480     490
    510     530     540     545     550     555     575     610     630     650];
cct=cct+tau;

plot(cct,CCT,'r--')
hold off
```

Riferimenti bibliografici

[1] The MathWorks Inc. Matlab 6.5 release 13, june 2002. Windows edition.