Teoria membranale dei gusci assialsimmetrici

Tra le tipologie fondamentali di elementi costruttivi vi sono gli elementi cosiddetti bidimensionali che hanno due dimensioni predominanti rispetto allo spessore. Sono denominati piastre se la superficie media è piana, gusci se la superficie media non è piana ma si sviluppa nello spazio. A differenza delle piastre, dove carichi ortogonali alla superficie media non possono essere equilibrati da tensioni normali costanti nello spessore ma da tensioni di taglio e flessionali, nei gusci ciò può avvenire, con sollecitazioni di taglio e flessione presenti solo in particolari zone limitate (es. in corrispondenza di vincoli o giunzioni tra gusci di diversa rigidezza) (Fig.1).

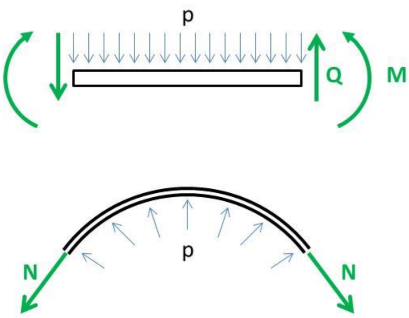

Figura 1 Sollecitazioni in piastre e gusci

Una particolare tipologia molto diffusa di gusci è quella dei gusci assialsimmetrici (Fig.2) che può essere trattata analiticamente in modo piuttosto semplice.

Figura 2 Esempi di strutture, silos e serbatoi sferici, che possono essere modellati come gusci assialsimmetrici

Prima di tutto si definisce la superficie media del guscio assialsimmetrico come ottenuta da una curva piana (Γ) che ruota attorno ad un asse (γ) appartenente allo stesso piano della curva (Fig.3). La curva piana (Γ) costituisce uno dei **meridiani,** ottenuti per intersezione con un semipiano uscente dall'asse γ. Le circonferenze ottenute sezionando la superficie con un piano ortogonale a γ costituiscono i **paralleli**.
La posizione di un **meridiano** è definita dall'**angolo azimutale** θ, misurato a partire da un meridiano origine arbitrario. La posizione di un **parallelo** è definita dall'**angolo meridiano** φ, formato tra la normale alla superficie e l'asse di rotazione.
Fissato un punto P, si definisce in esso un sistema di riferimento locale (Fig.3):

- asse z ortogonale al piano tangente alla superficie media,
- asse x giacente sul piano tangente e diretto secondo il parallelo,

- asse y giacente sul piano tangente e diretto secondo il meridiano.

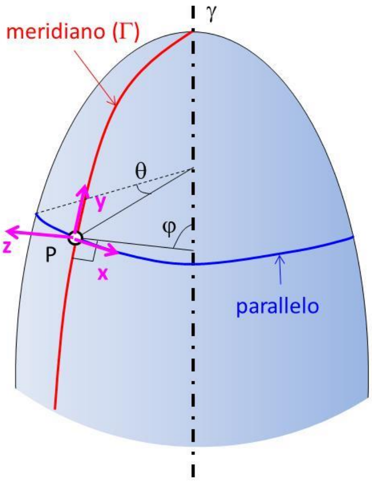

Figura 3 Linee e angoli di riferimento di un guscio assialsimmetrico

I raggi di curvatura rilevanti di un guscio assialsimmetrico sono i due raggi di curvatura principali della superficie e il raggio della sezione trasversale del guscio, così definiti (Fig.4):

- raggio di curvatura meridiano (R_φ): corrisponde al raggio di curvatura della curva Γ sul piano y-z; il centro di curvatura giace sul prolungamento dell'asse z; il raggio è positivo se il centro di curvatura giace nella porzione di piano delimitata dal meridiano contenente l'asse γ, negativo se nell'altra porzione;
- raggio di curvatura azimutale (R_Θ): distanza sul piano x-z tra P e l'intersezione dell'asse z con l'asse di simmetria, su cui giace il centro di curvatura O_θ; è sempre positivo;
- raggio di curvatura assiale (R_γ): raggio della sezione circolare trasversale o distanza tra P e l'asse di simmetria; risulta $R_\gamma = R_\theta \cdot sin(\varphi)$.

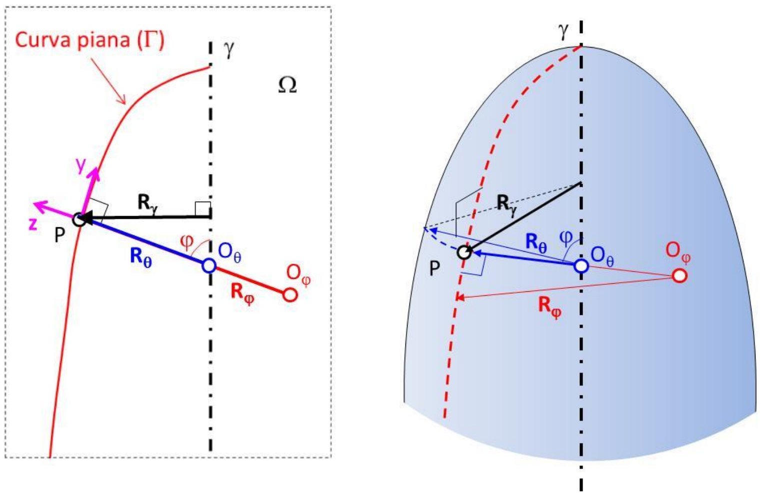

Figura 4 Raggi di curvatura rilevanti di un guscio assialsimmetrico

La teoria dei gusci sottili si basa su alcune ipotesi preliminari:

- gli spostamenti sotto carico sono molto minori dello spessore;
- i punti nello spessore che, prima della deformazione, giacevano su di una retta ortogonale alla superficie media, dopo la deformazione continuano a formare una retta ortogonale alla superficie media deformata (ipotesi di Kirchoff);

- le tensioni normali agenti ortogonalmente al piano medio della piastra sono trascurabili (stato piano di tensione).

Partendo da queste ipotesi generali, per i gusci sottili assialsimmetrici possono essere introdotte le seguenti ulteriori semplificazioni:

- la componente di spostamento in direzione circonferenziale è nulla per simmetria;
- le componenti di spostamento, tensione e deformazione sono costanti in direzione circonferenziale e cambiano solo nella direzione meridiana.

Per quanto riguarda l'equilibrio elementare di un guscio in pressione, si considera un elemento di dimensioni $R_\theta \cdot d\theta'$, $R_\varphi \cdot d\varphi$ e spessore *h*, soggetto a tensioni membranali in direzione del meridiano e del parallelo, costanti nello spessore. Tali tensioni, moltiplicate per *h,* corrispondono alle caratteristiche di sollecitazione membranali N_θ e N_φ.

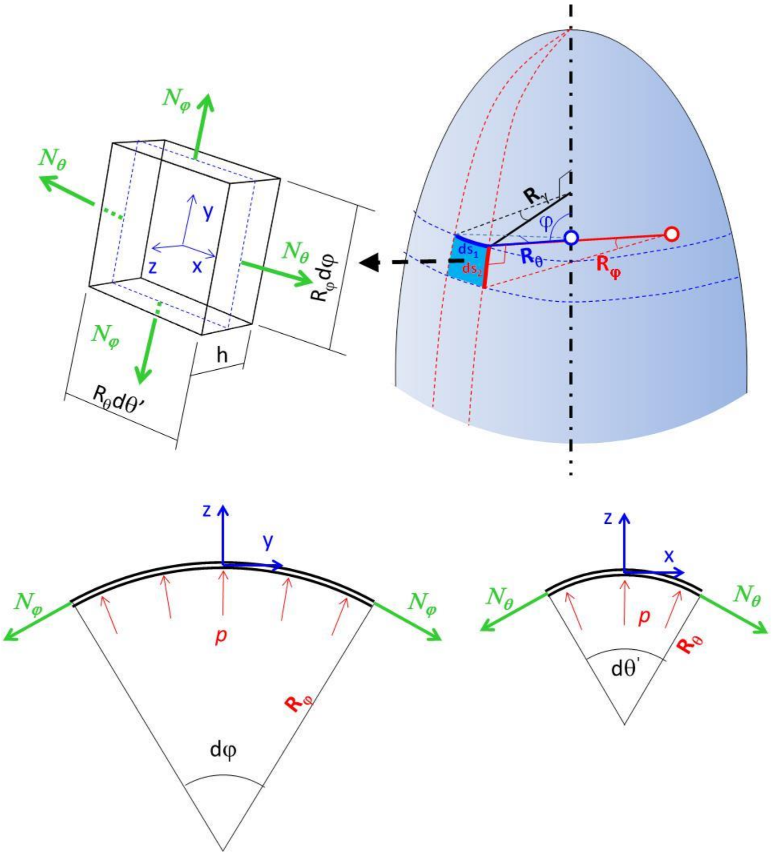

Figura 5 Schemi di corpo libero di elemento di guscio assialsimmetrico

Imponendo l'equilibrio dell'elemento in direzione z, approssimato il seno con l'angolo, si ottiene

$$N_\varphi \cdot R_\theta \cdot d\theta' \cdot d\varphi + N_\theta \cdot R_\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta' - p \cdot R_\theta \cdot R_\varphi \cdot d\theta' \cdot d\varphi = 0$$

e quindi l'equazione di Laplace che lega le sollecitazioni membranali alla pressione:

$$\frac{N_\varphi}{R_\varphi} + \frac{N_\theta}{R_\theta} = p$$

La pressione p è considerata positiva se interna al guscio, negativa se esterna. Può inoltre avere un andamento uniforme lungo il meridiano o variabile da punto a punto (es. pressione idrostatica variabile con l'altezza del battente di liquido).

Le sollecitazioni membranali in un punto generico P possono essere determinate imponendo due condizioni: a) l'equilibrio assiale di una porzione di guscio ottenuta sezionandola con un piano ortogonale all'asse di simmetria passante per P da cui si ricava N_φ e quindi σ_φ (Fig.6), b) l'equazione di Laplace da cui si ricava N_θ e quindi σ_θ.

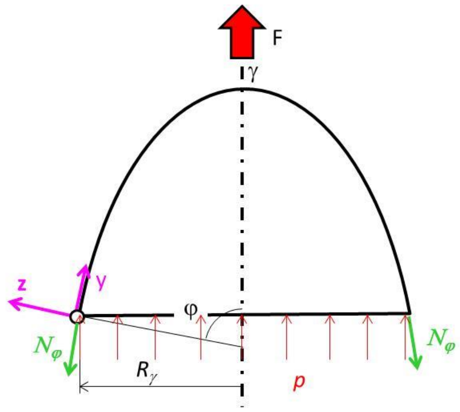

Figura 6 Schema di corpo libero di una porzione di guscio assialsimmetrico soggetto a pressione interna e forza assiale

Nell'equilibrio assiale della porzione di guscio si considera anche il fluido in pressione contenuto nel volume tra la superficie del guscio e la sezione ortogonale all'asse. Nell'equilibrio globale le forze che si scambiano fluido e guscio sono forze interne e quindi a risultante nulla mentre la risultante della pressione sulla sezione trasversale del fluido è pari al prodotto di p per l'area netta della sezione. Quindi, considerando i carichi di pressione e una forza concentrata assiale F, l'equilibrio può essere espresso dall'equazione

$$N_\varphi \cdot sin(\varphi) \cdot 2\pi \cdot R_\gamma - p \cdot \pi \cdot R_\gamma^2 - F = 0$$

in cui le forze N_θ evidentemente non contribuiscono, mentre le N_φ sono uniformemente distribuite.
Si riportano alcuni casi particolari:
a) guscio cilindrico soggetto a pressione interna e aperto alle estremità in cui $R_\varphi \to \infty$ e $R_\theta = R_\gamma = R$. Dalle equazioni scritte sopra si ricava facilmente

$$\sigma_\varphi = 0 \qquad \sigma_\theta = \frac{p \cdot R}{h}$$

b) guscio cilindrico in pressione chiuso alle estremità per il quale risulta invece dall'equilibrio assiale

$$N_\varphi \cdot 2\pi R = p \cdot \pi R^2$$

e quindi

$$\sigma_\varphi = \frac{p \cdot R}{2h} \qquad \sigma_\theta = \frac{p \cdot R}{h}$$

c) guscio sferico in pressione, per il quale $R_\theta = R_\varphi = R$; per esso risulta facilmente dimostrabile che

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{p \cdot R}{2h}$$

Per quanto riguarda le deformazioni, e in particolare la variazione di raggio, per il cilindro chiuso vale:

$$\Delta R = \varepsilon_\theta R = \frac{\sigma_\theta - \nu\sigma_\varphi}{E} R = \frac{p \cdot R^2 (2 - \nu)}{2hE}$$

mentre per la sfera:

$$\Delta R = \varepsilon_\theta R = \frac{\sigma_\theta - \nu\sigma_\varphi}{E} = \frac{p \cdot R^2 (1 - \nu)}{2hE}$$

E' facile quindi verificare che se un guscio assialsimmetrico è composto da porzioni di rigidezza diverse (es. cilindri di diverso spessore, cilindro con calotta sferica, etc.) la teoria membranale predice in corrispondenza della giunzione spostamenti radiali diversi per le due porzioni, spostamenti impediti dalla giunzione che generano azioni di taglio e flessionali determinabili con modelli analitici o numerici ben più complessi.