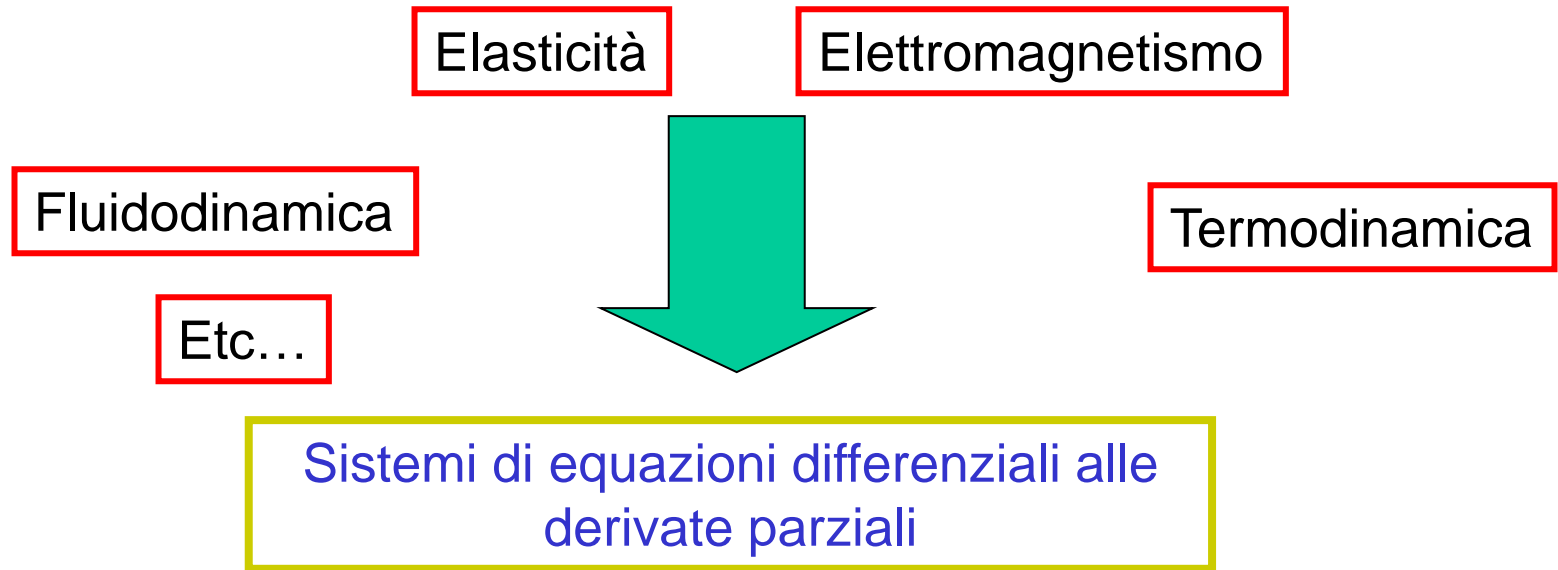


Il metodo degli elementi finiti

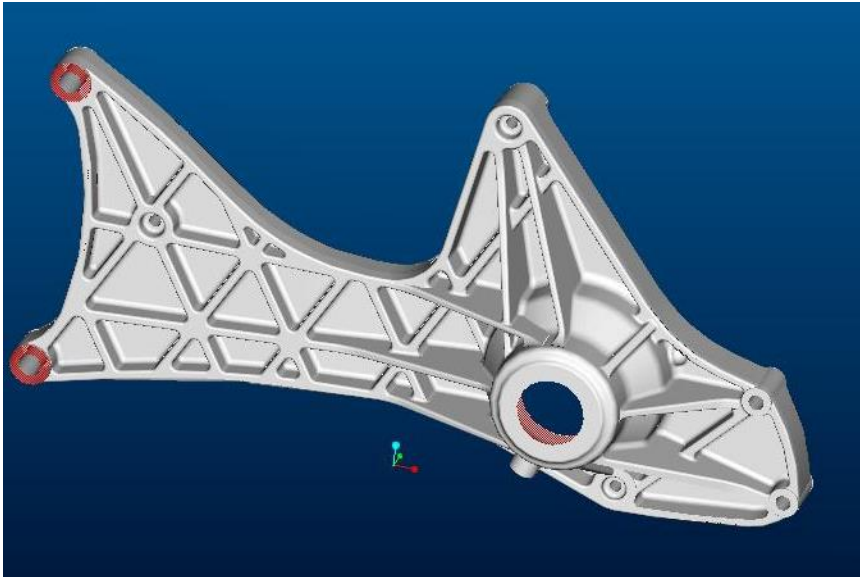


Distribuzione di \mathbf{u} , \mathbf{B} , \mathbf{v} , T , etc.

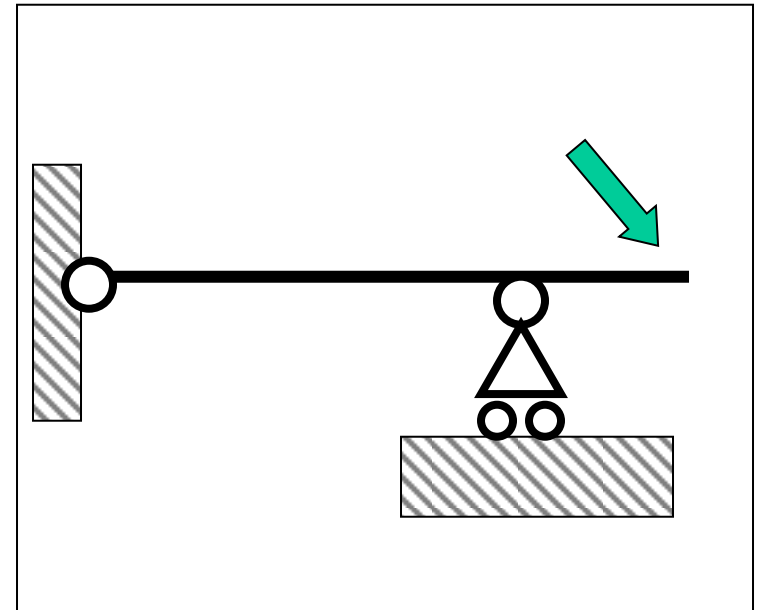
es. Eq. di Navier-Cauchy
o dell'equilibrio elastico

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{X}{G} = 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{Y}{G} = 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{Z}{G} = 0 \end{array} \right.$$

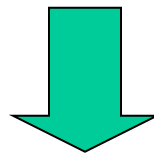
Soluzioni analitiche: solo in casi particolari, introducendo rilevanti semplificazioni (travi, piastre, gusci...)



staffa sospensione di scooter



modello trave



Sviluppo di tecniche di soluzione **approssimate**

Metodi di soluzione approssimata:

- Differenze finite
- Elementi Finiti
- Elementi al contorno
- Metodo delle celle
- ...

Il Metodo degli Elementi Finiti (MEF) è oggi di gran lunga il più diffuso, soprattutto a causa della sua estrema versatilità

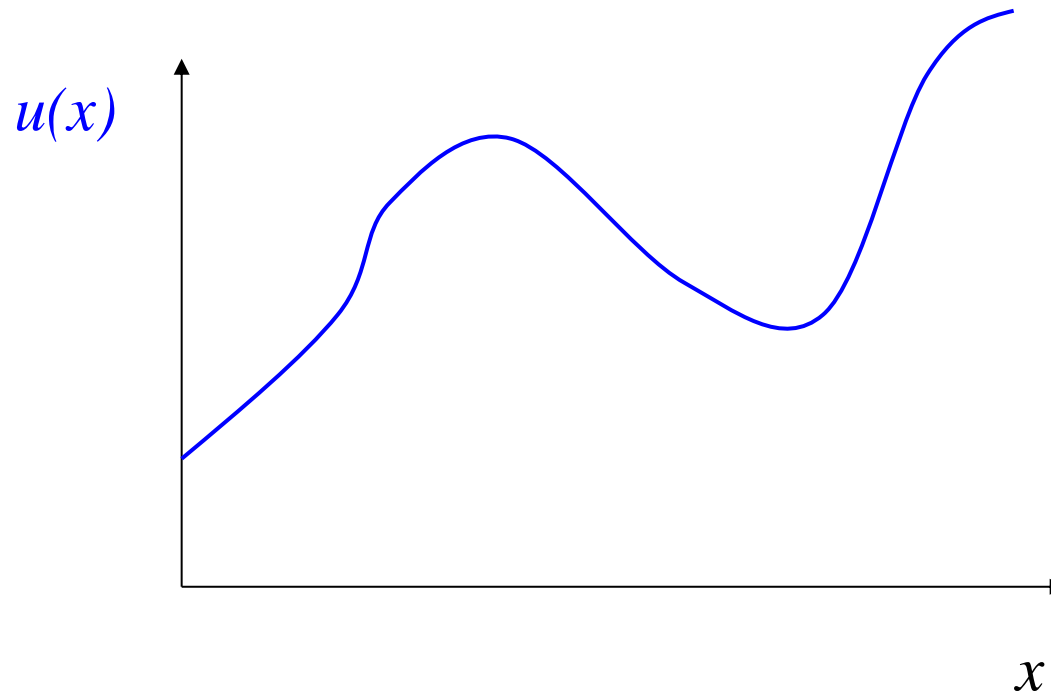
Idea centrale del MEF (e delle altre tecniche approssimate):

Problema originale: determinare le f.ni incognite
spostamento $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$

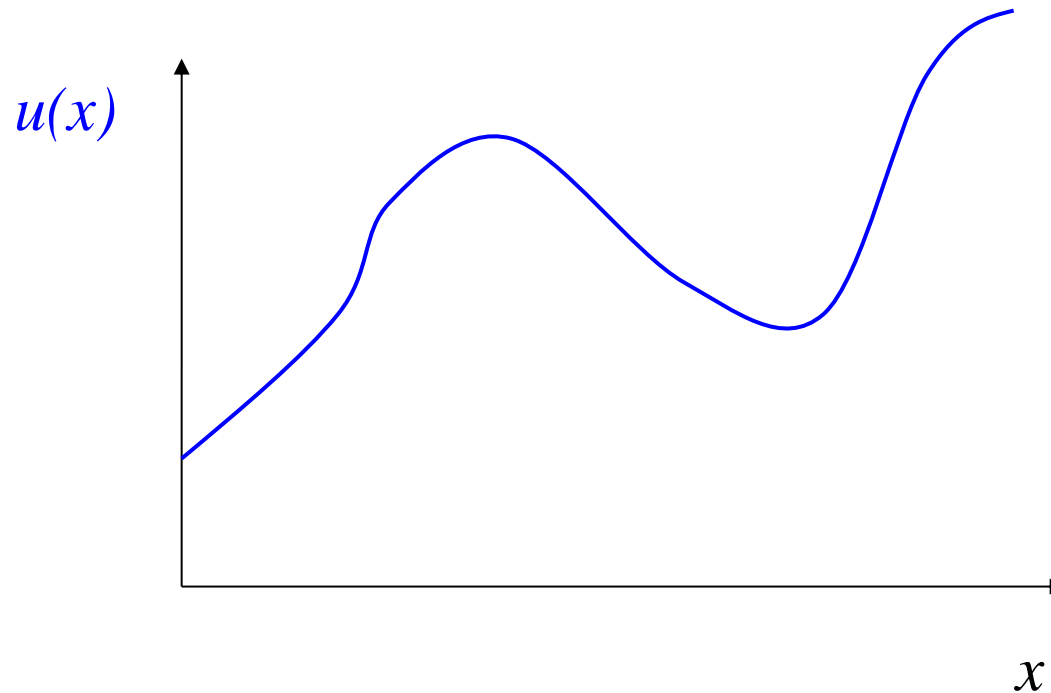
$$\begin{cases} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{X}{G} = 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{Y}{G} = 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{Z}{G} = 0 \end{cases}$$

Problema sostitutivo: determinare delle funzioni sostitutive che approssimino u , v e w con un errore accettabile ai fini pratici e siano relativamente facili da calcolare

Esempio di funzione approssimante
(problema monodimensionale- x)



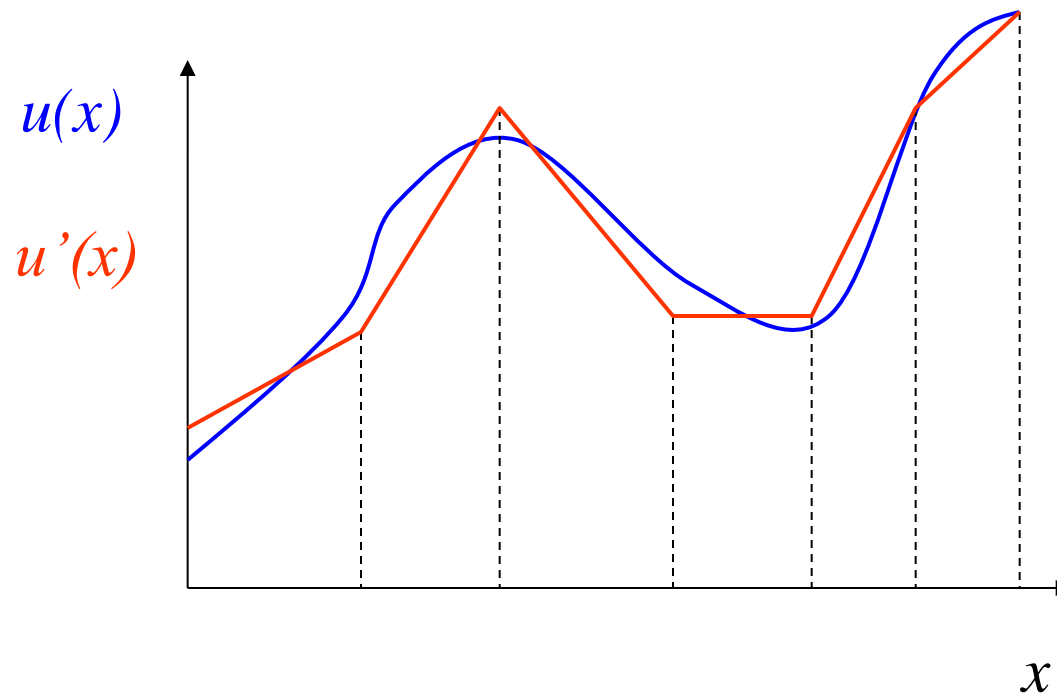
Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale- x)



F.ne sostitutiva $u'(x)$:

- espressione matematica semplice
- nota ovunque una volta noto il valore di un n° finito di parametri

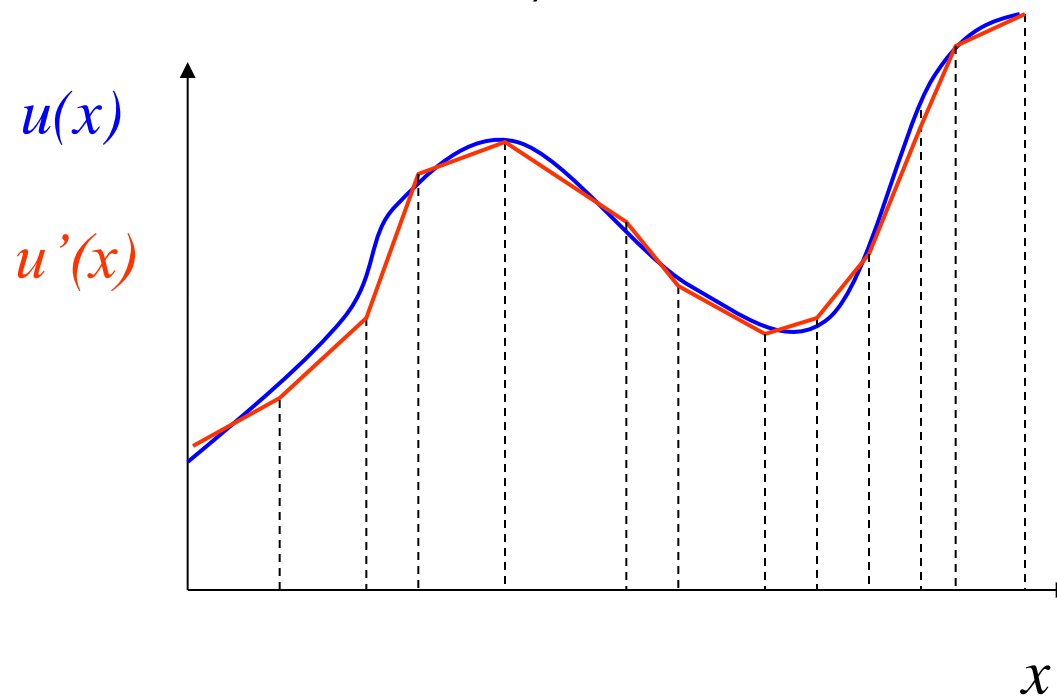
Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale- x)



F.ne sostitutiva $u'(x)$:

- espressione matematica semplice (es. spezzata)
- nota ovunque una volta noto il valore di un n° finito di parametri (es. valore agli estremi degli intervalli)

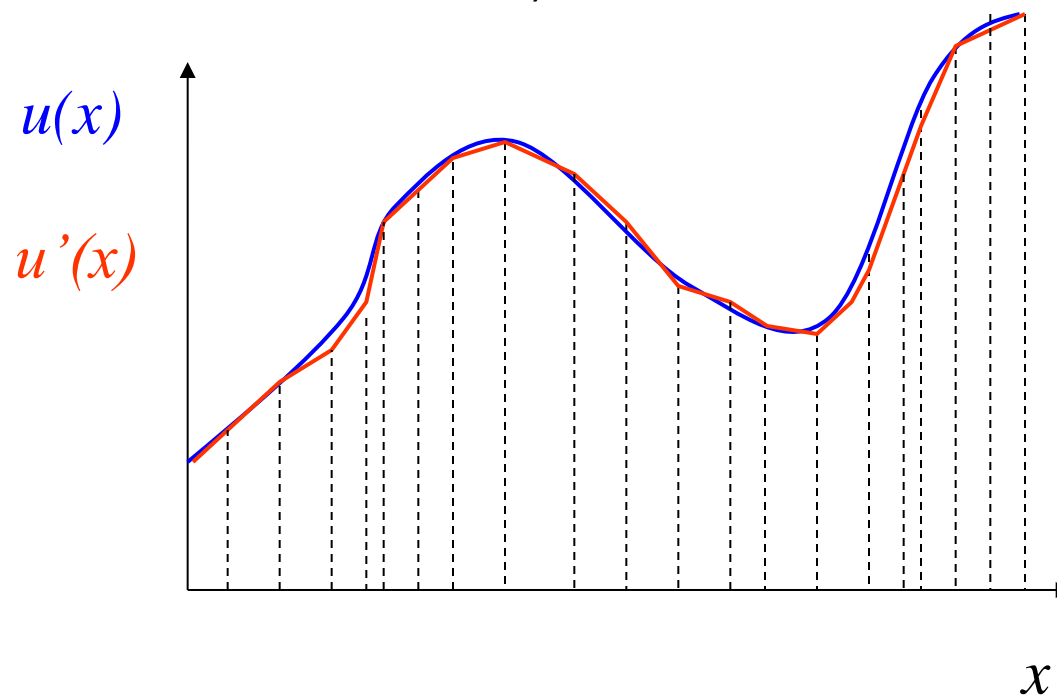
Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale- x)



F.ne sostitutiva $u'(x)$:

- espressione matematica semplice (es. spezzata)
- nota ovunque una volta noto il valore di un n° finito di parametri (es. valore agli estremi degli intervalli)

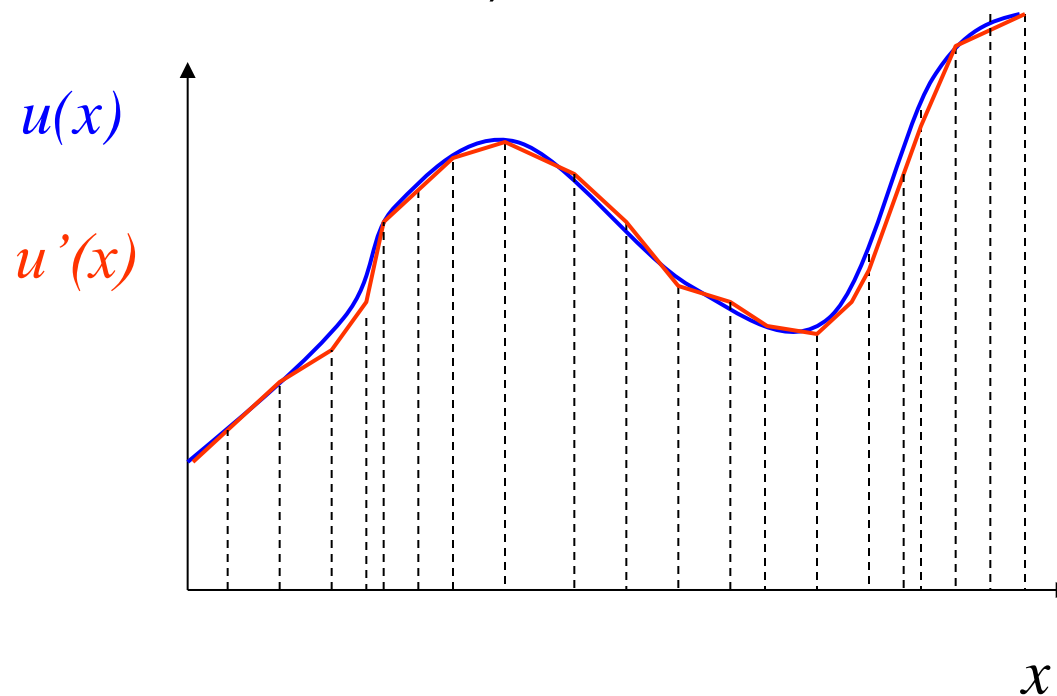
Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale- x)



F.ne sostitutiva $u'(x)$:

- espressione matematica semplice (es. spezzata)
- nota ovunque una volta noto il valore di un n° finito di parametri (es. valore agli estremi degli intervalli)

Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale)



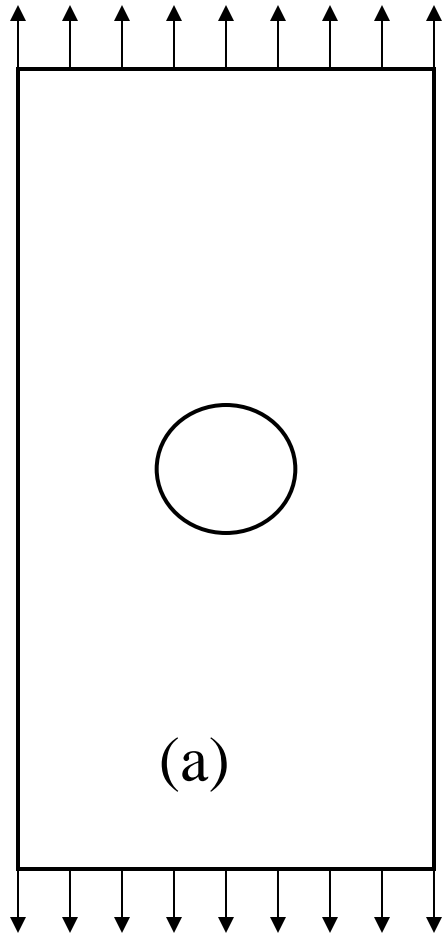
F.ne sostitutiva $u'(x)$:

- espressione matematica semplice (es. spezzata)
- nota ovunque una volta noto il valore di un n° finito di parametri (es. valore agli estremi degli intervalli)

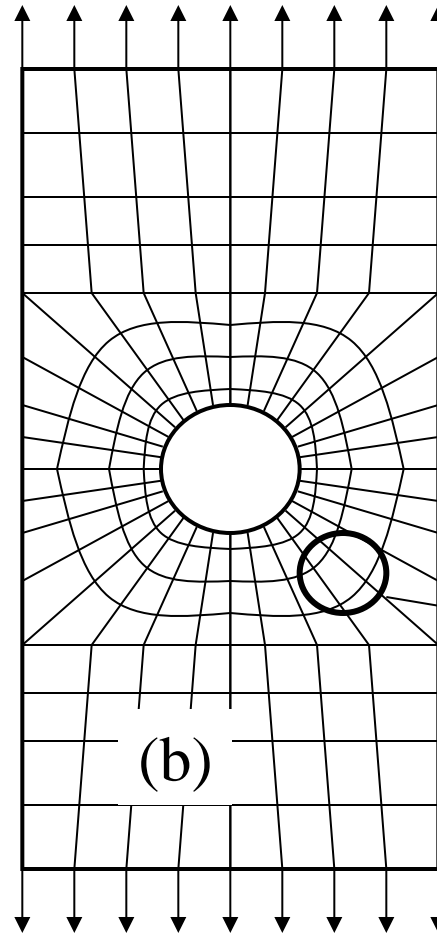
Oss.ni:

- necessario assicurare la **convergenza** ($u'(x) \rightarrow u(x)$)
- soluzione affetta da **errori**

Discretizzazione di un solido per determinare $u(x,y)$

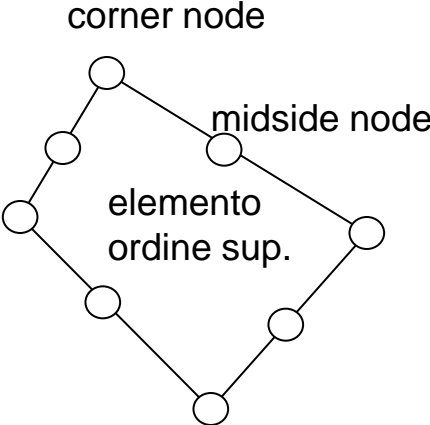
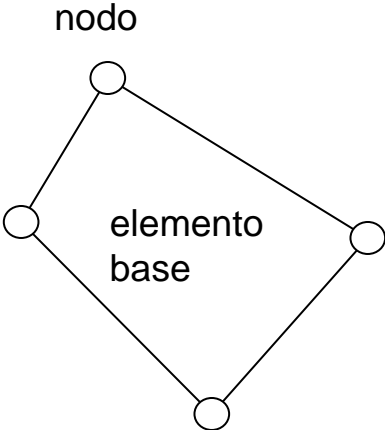


Struttura

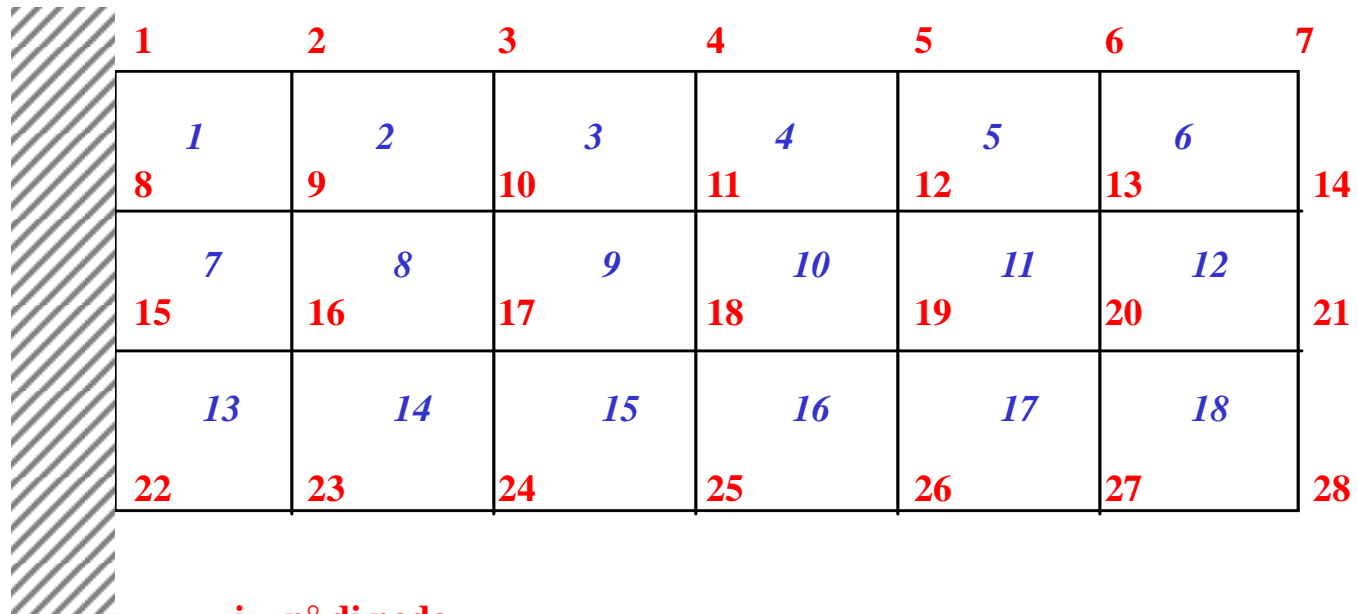


Modello ("mesh")

Esempi di elementi piani con diverse disposizioni dei nodi



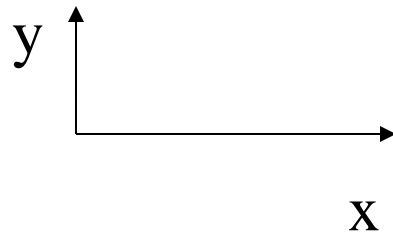
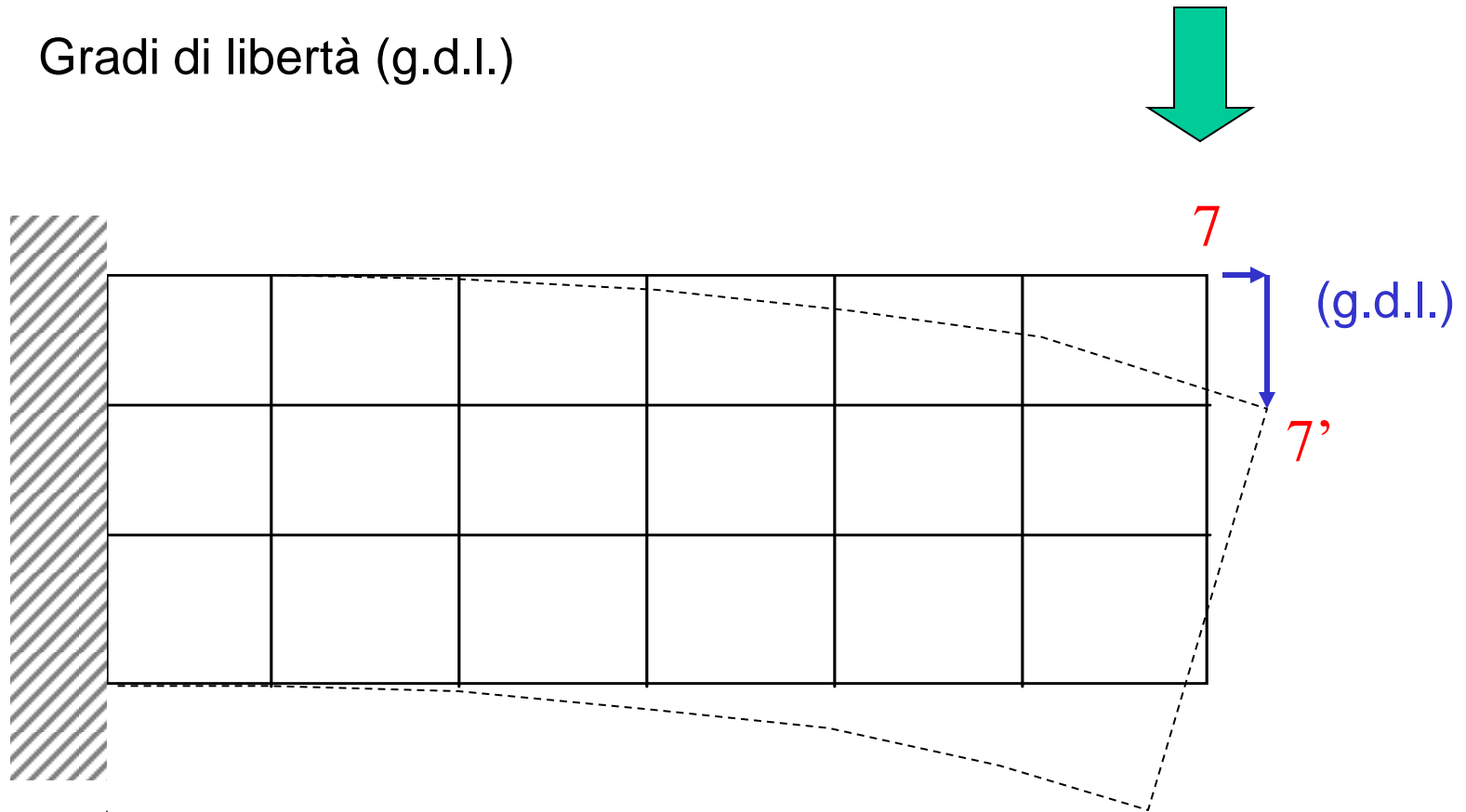
Nodi ed elementi identificati da un numero univoco



$i = n^\circ$ di nodo

$i = n^\circ$ di elemento

Gradi di libertà (g.d.l.)

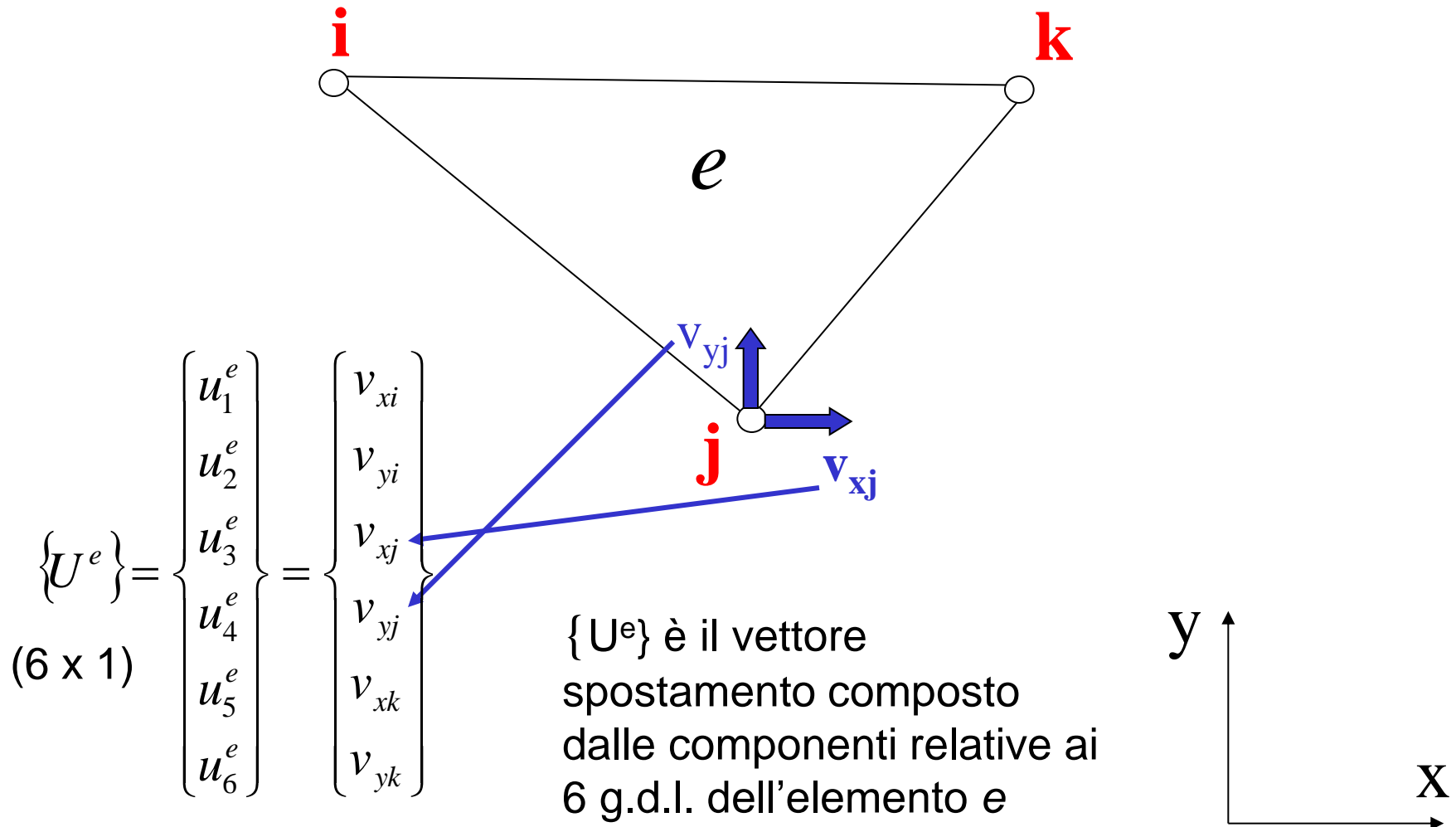


- N° g.d.l./nodo varia da 2 a 6 secondo:
- tipo di elemento
 - natura problema

$$N^{\circ} \text{ totale g.d.l.} = N^{\circ} \text{ g.d.l./nodo} * N^{\circ} \text{ nodi}$$

Studio del comportamento meccanico del singolo elemento

Elemento piano per problemi 2D



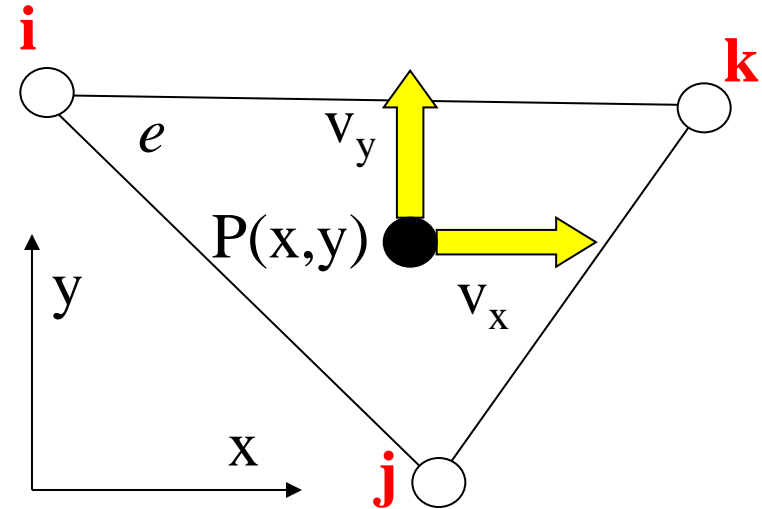
Spostamenti nei punti interni all'elemento

$$\{v(x, y)\} = \begin{Bmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{Bmatrix} = [N^e(x, y)] \cdot \{U^e\}$$

$2 \times 1 \qquad 2 \times 1 \qquad 2 \times 6 \qquad 6 \times 1$

F.ni di forma ("shape functions")

$$v_r = \sum_{l=1}^6 N_{rl}^e(x, y) \cdot u_l$$



Ogni f.ne di forma rappresenta il “peso” (dipendente dalla posizione di P) che ciascuna componente di spostamento nodale ha nel determinare lo spostamento di P

Pb: - che forma matematica dare alle $N^e(x, y)$?
- come determinare le $N^e(x, y)$?

Matrice delle funzioni di forma

$$\{v(x, y)\} = \begin{Bmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{Bmatrix} = [N^e(x, y)] \cdot \{U^e\}$$

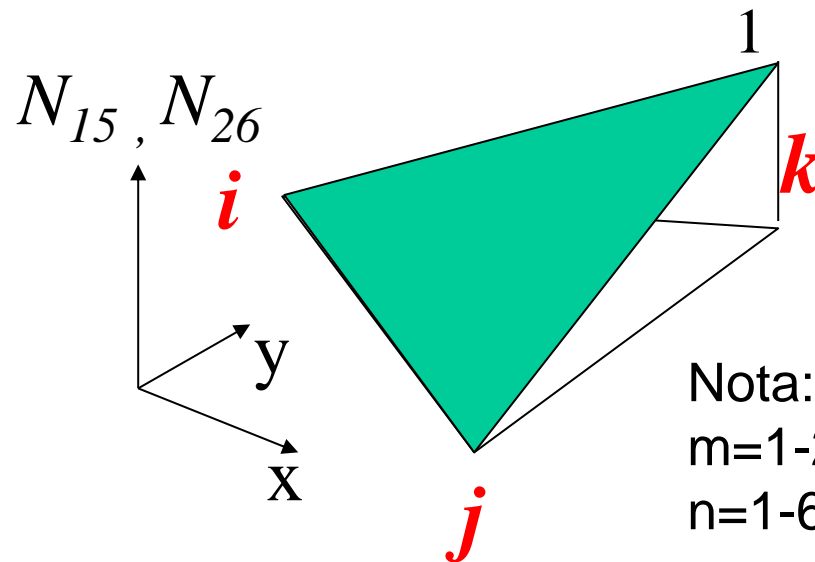
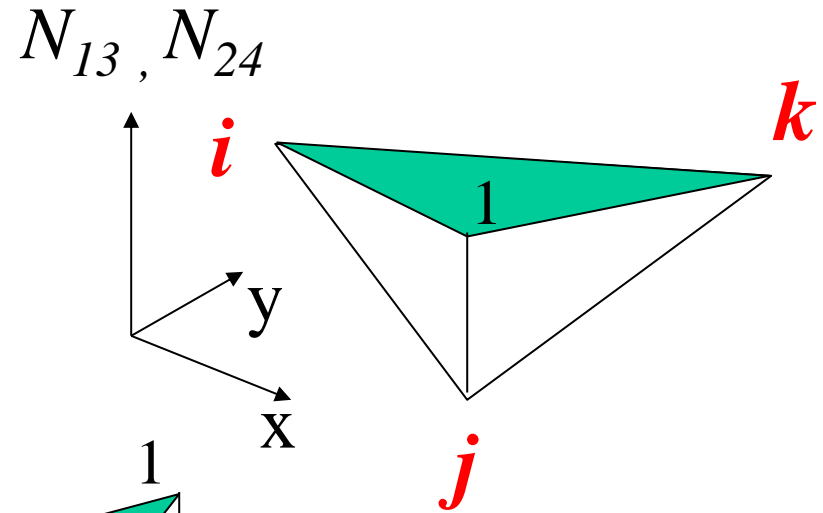
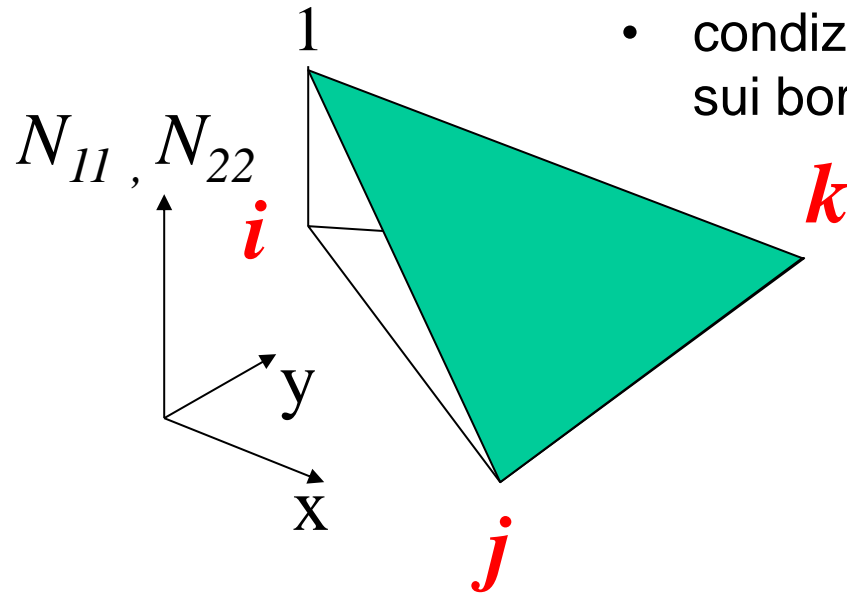
2×1 2×1 2×6 6×1

$$\begin{bmatrix} N_{11}(x, y) & 0 & N_{13}(x, y) & 0 & N_{15}(x, y) & 0 \\ 0 & N_{22}(x, y) = N_{11}(x, y) & 0 & N_{24}(x, y) = N_{13}(x, y) & 0 & N_{26}(x, y) = N_{15}(x, y) \end{bmatrix}$$

v_x e v_y scorrelati (piccole def.)

stesso andamento v_x e v_y

- es. funzioni di forma lineari
- condizioni: spost.nodo indipendente, spost sui bordi dip. solo da nodi estremi



Nota: N_{mn}
 $m=1-2 \rightarrow v_x, v_y$
 $n=1-6 \rightarrow v_x, v_y$ dei 3 nodi

$$N_{lm}^e(x, y) = A_{lm} + B_{lm} \cdot x + C_{lm} \cdot y$$

come determinare coefficienti
funz. forma?

3 per ogni funz. → 3 cond.

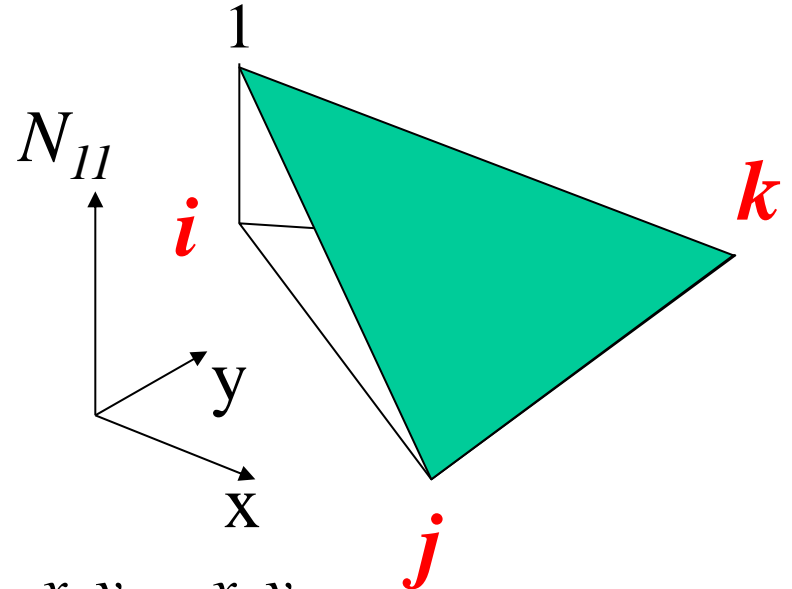
$$\begin{cases} N_{11}(x_i, y_i) = 1 \\ N_{11}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{11}(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$



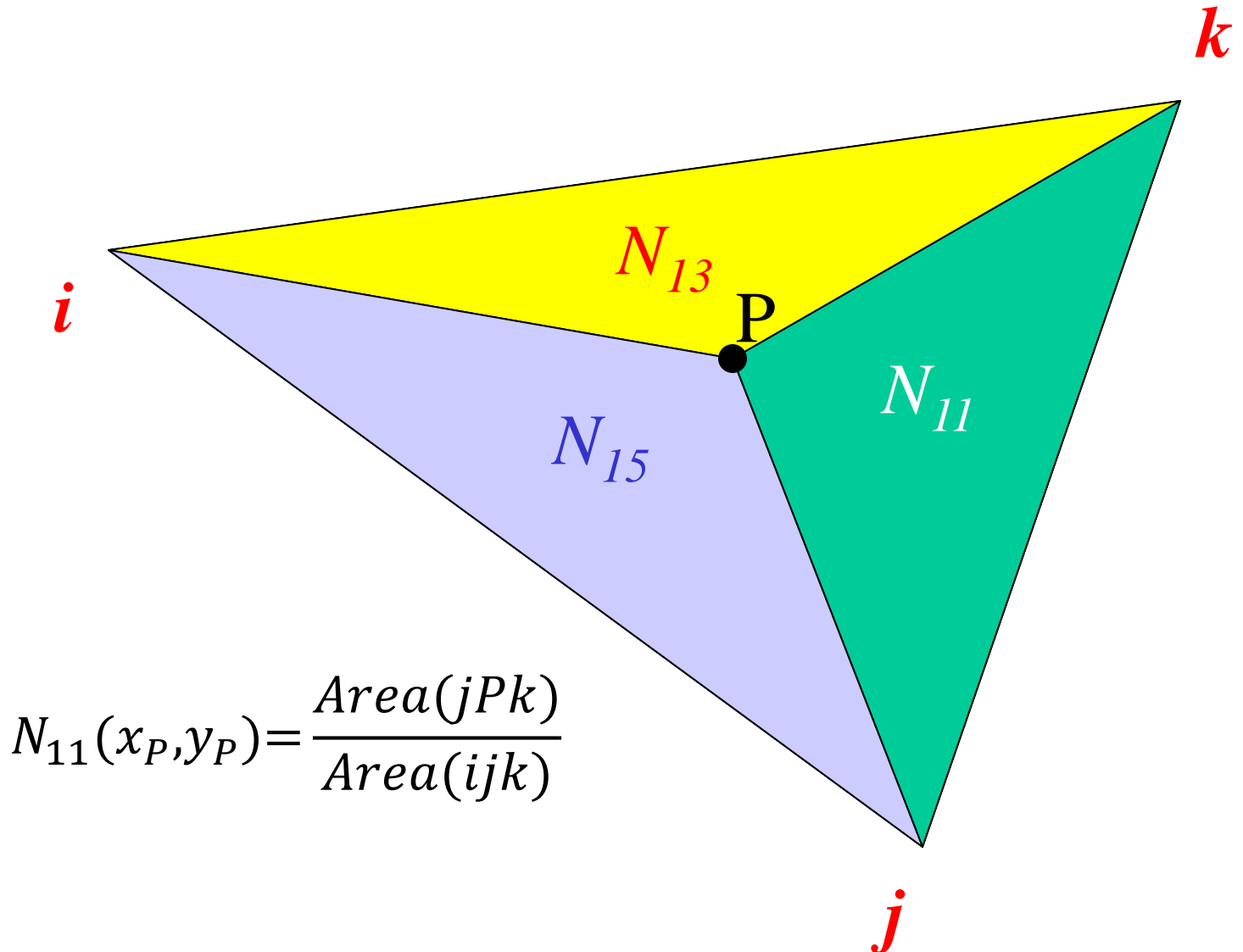
$$\begin{cases} A_{11} + B_{11}x_i + C_{11}y_i = 1 \\ A_{11} + B_{11}x_j + C_{11}y_j = 0 \\ A_{11} + B_{11}x_k + C_{11}y_k = 0 \end{cases}$$



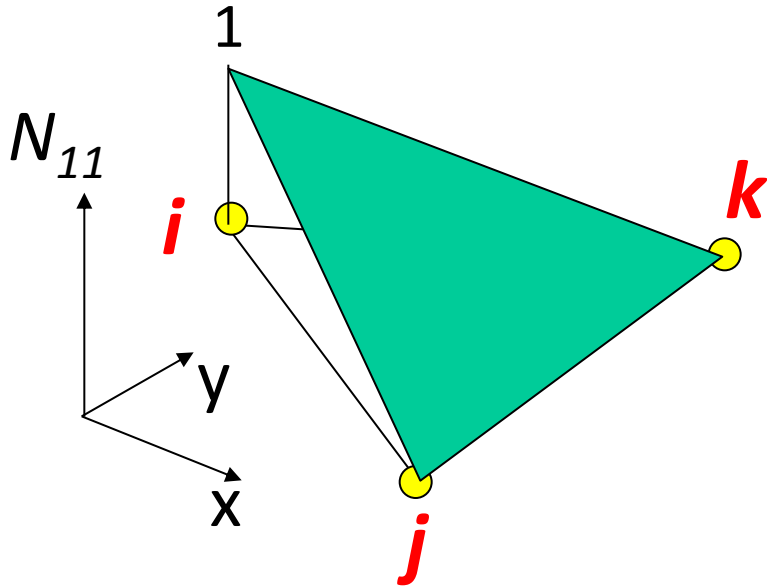
$$\begin{cases} A_{11} = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{\Delta} \\ B_{11} = \frac{y_j - y_k}{\Delta} \\ C_{11} = \frac{x_k - x_j}{\Delta} \end{cases} \quad \Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$



Interpretazione geometrica

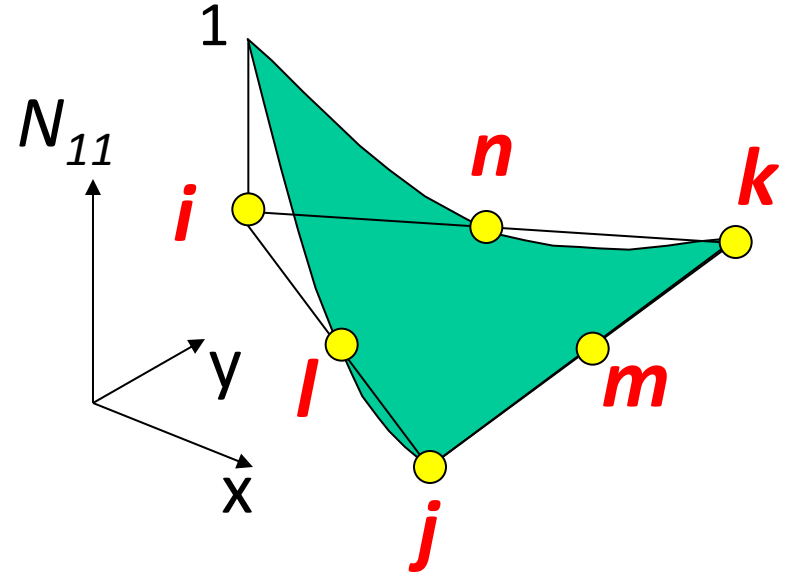


Elementi di ordine superiore



$$\begin{cases} N_{11}(x_i, y_i) = 1 \\ N_{11}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{11}(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

$$N_{lm}^e(x, y) = A_{lm} + B_{lm} \cdot x + C_{lm} \cdot y$$



$$\begin{cases} N_{11}(x_i, y_i) = 1 \\ N_{11}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{11}(x_k, y_k) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N_{11}(x_l, y_l) = 0 \\ N_{11}(x_m, y_m) = 0 \\ N_{11}(x_n, y_n) = 0 \end{cases}$$

$$N_{lm}^e(x, y) = A_{lm} + B_{lm} \cdot x + C_{lm} \cdot y + D_{lm} \cdot x^2 + E_{lm} \cdot y^2 + F_{lm} \cdot xy$$

Calcolo delle deformazioni



$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{array} \right\} = [L]\{v(x, y)\}$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [L]\{v(x, y)\}$$

3x1

3x2

2x1

$$\{v(x, y)\} = [N(x, y)]\{U^e\}$$

2x1

2x6

6x1


$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{U^e\} = [B]\{U^e\}$$

3x1

3x6 6x1

Contenuto matrice [B]

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & N_{24} & 0 & N_{26} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{13}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{15}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{22}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_{24}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_{26}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{11}}{\partial y} & \frac{\partial N_{22}}{\partial x} & \frac{\partial N_{13}}{\partial y} & \frac{\partial N_{24}}{\partial x} & \frac{\partial N_{15}}{\partial y} & \frac{\partial N_{26}}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$N_{11} = A_{11} + B_{11}x + C_{11}y$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x} = B_{11} = \frac{y_j - y_k}{\Delta}$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial y} = C_{11} = \frac{x_k - x_j}{\Delta}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} & 0 & C_{26} \\ C_{11} & B_{22} & C_{13} & B_{24} & C_{15} & B_{26} \end{bmatrix}$$

N.B.: La matrice [B] in questo caso contiene solo costanti, dato che le f.ni di forma sono lineari. Nel caso di f.ni di forma di ordine superiore al primo la matrice [B] conterrebbe funzioni in (x,y)

Relazioni costitutive

Esempio 1: **stato piano di tensione**, materiale elastico, lineare, omogeneo, isotropo

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \quad \left\{ \sigma \right\} = [D] \left\{ \varepsilon \right\}$$

Relazioni costitutive

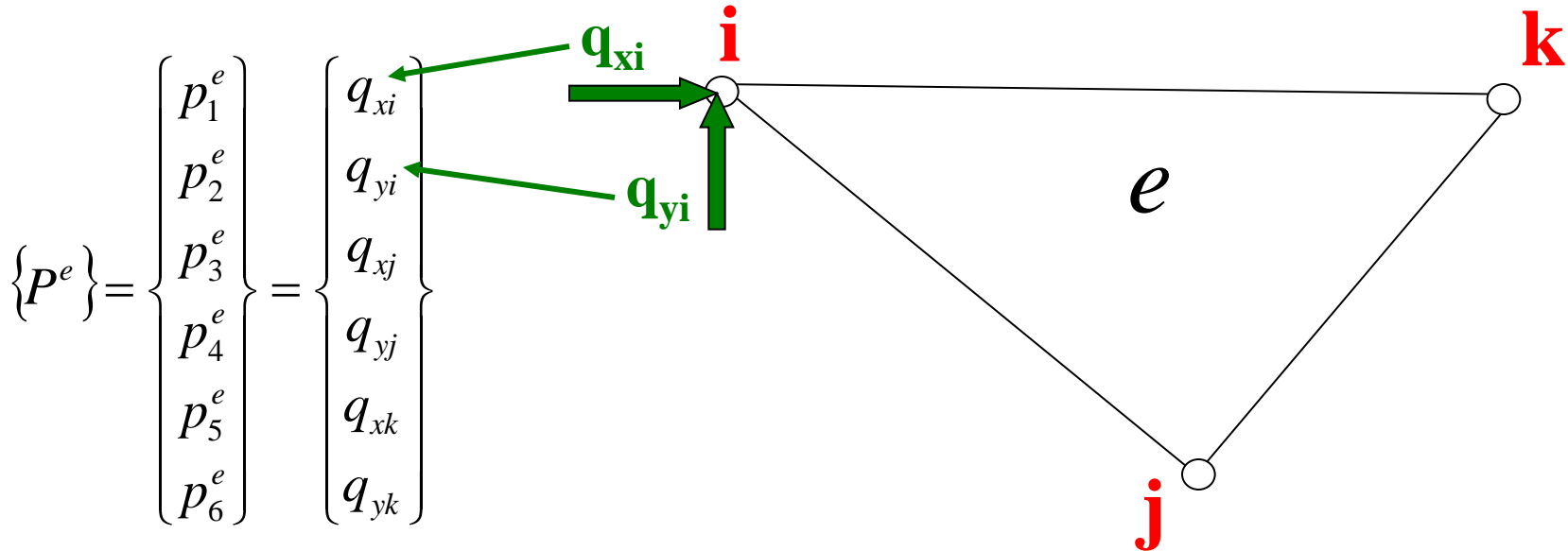
Esempio 2: **stato piano di deformazione**, materiale elastico, lineare, omogeneo, isotropo

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} \end{array} \right. \quad [D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} = 0$$

Studio del comportamento meccanico del singolo elemento

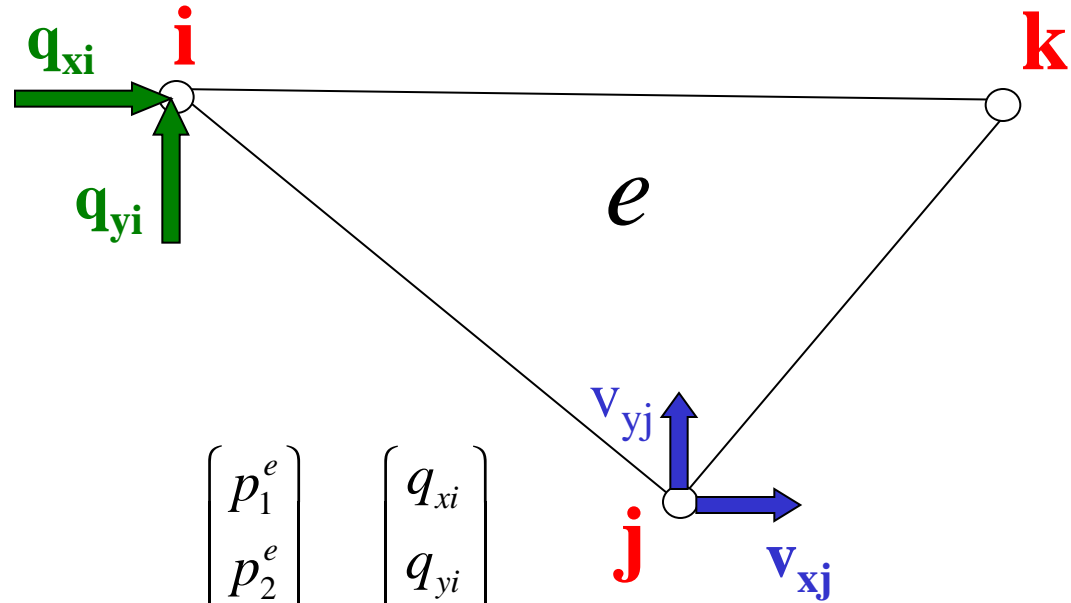
Elemento piano per problemi 2D



$\{P^e\}$ è il vettore contenente tutti i 6 carichi nodali

Studio del comportamento meccanico del singolo elemento

Elemento piano per problemi 2D

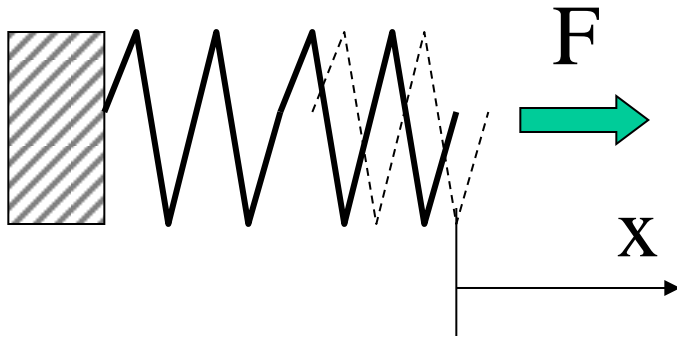


$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \\ u_5^e \\ u_6^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{xj} \\ v_{yj} \\ v_{xk} \\ v_{yk} \end{Bmatrix}$$

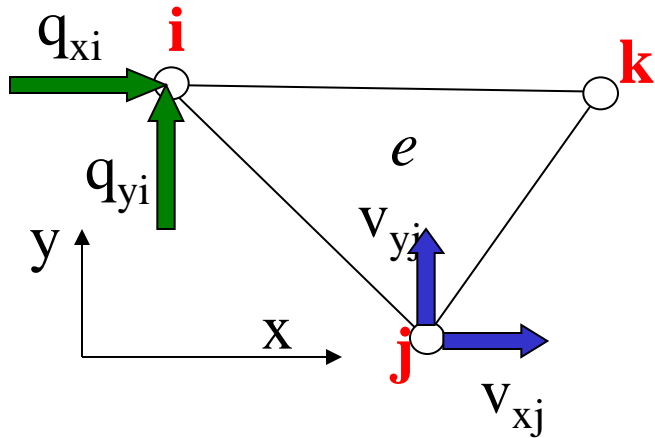
$$\{P^e\} = \begin{Bmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \\ p_5^e \\ p_6^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{xi} \\ q_{yi} \\ q_{xj} \\ q_{yj} \\ q_{xk} \\ q_{yk} \end{Bmatrix}$$

$$\{U^e\} \xrightarrow{?} \{P^e\}$$

Elemento = molla "multidimensionale"



$$F = k x$$



$$\{P^e\} = [K^e] \cdot \{U^e\}$$

Studio condotto in campo lineare:

$$\left\{ P^e \right\} = \left[K^e \right] \cdot \left\{ U^e \right\}$$

6×1 6×6 6×1

Matrice di rigidezza dell'elemento

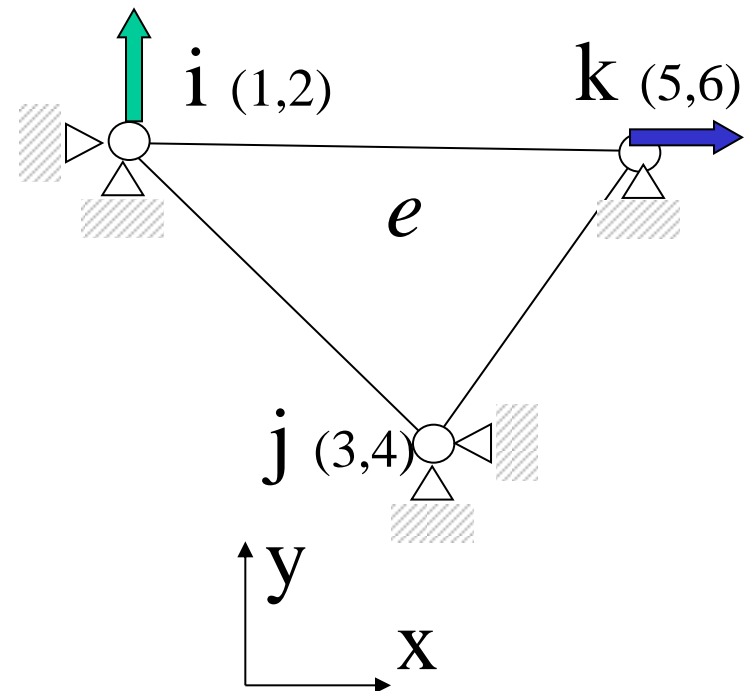
Significato fisico dei termini della matrice $[K^e]$

Il termine $k_{m,n}$ di $[K^e]$ è pari alla reazione vincolare presente secondo il grado di libertà “ m ” ($m=1,..6$), se si applica un sistema di spostamenti nodali in cui tutte le componenti sono nulle tranne la “ n -esima” che assume valore pari ad 1

$$p_m^e = \sum_n k_{m,n}^e u_n^e$$

“peso” di u_n nel contribuire a p_m

es. k_{25}



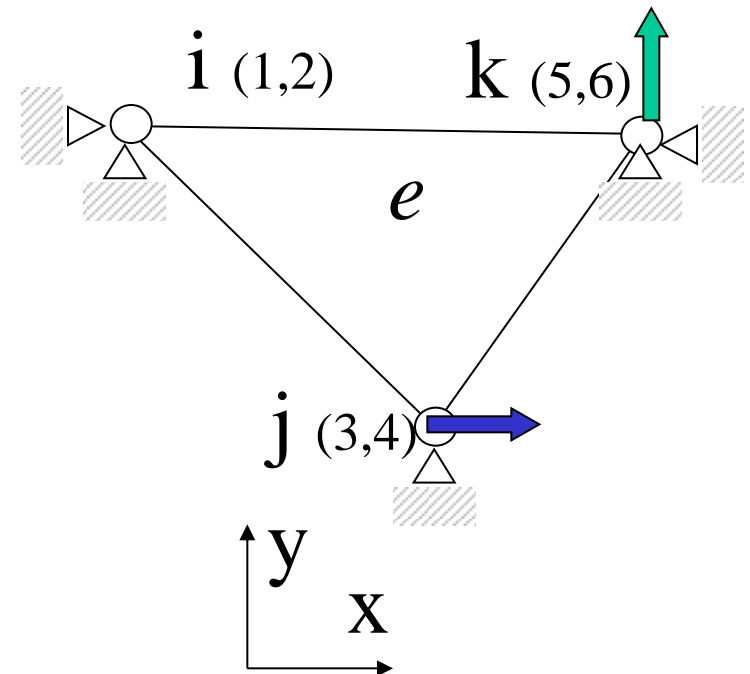
Significato fisico dei termini della matrice $[K^e]$

Il termine $k_{m,n}$ di $[K^e]$ è pari alla reazione vincolare presente secondo il grado di libertà “ m ” ($m=1,..6$), se si applica un sistema di spostamenti nodali in cui tutte le componenti sono nulle tranne la “ n -esima” che assume valore pari ad 1

$$p_m^e = \sum_n k_{m,n}^e u_n^e$$

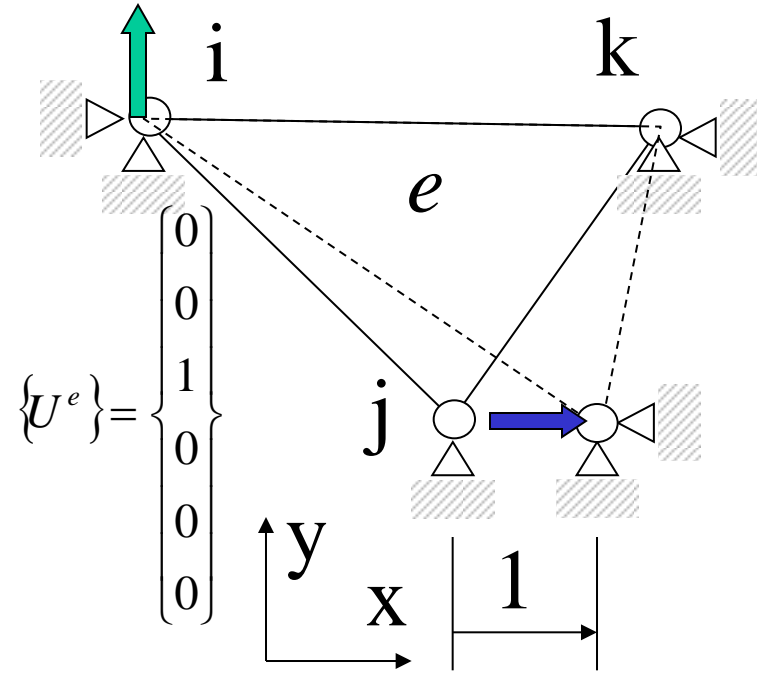
“peso” di u_n nel contribuire a p_m

es. k_{63}



es. si impone $u_3=1$

$$\begin{Bmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \\ p_5^e \\ p_6^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

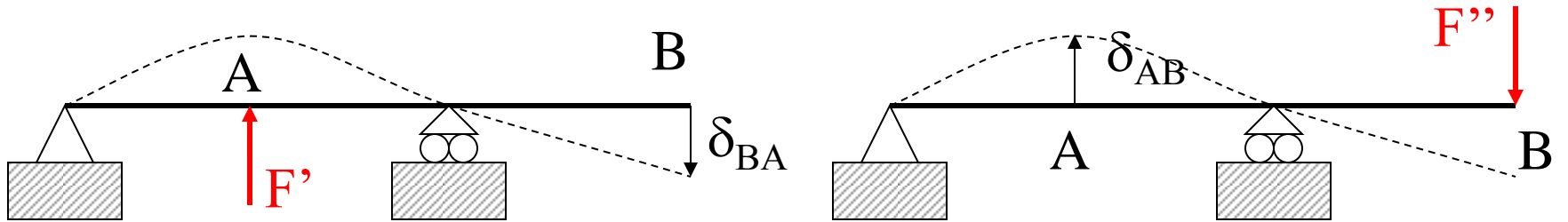


$$p_2^e = k_{21} \cdot 0 + k_{22} \cdot 0 + k_{23} \cdot 1 + \dots + k_{26} \cdot 0 = k_{23}$$

$$p_1^e = k_{13}; \quad p_3^e = k_{33}; \quad p_4^e = k_{43} \dots$$

analogamente per altri u_i

Teorema di reciprocità (Betti → Maxwell)



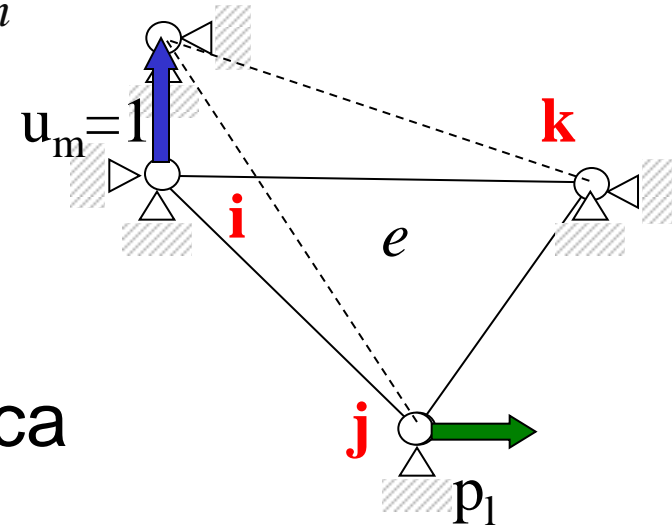
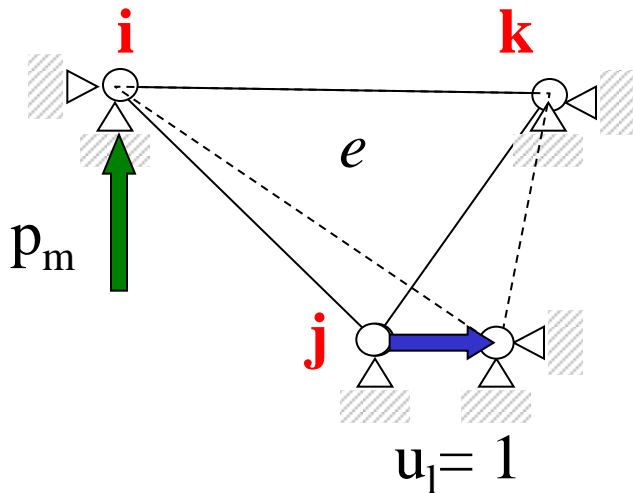
$$F' \delta_{AB} = F'' \delta_{BA}$$

$$\text{se } F' = F'' \Leftrightarrow \delta_{AB} = \delta_{BA}$$

$$p_m^e u_l^e = p_l^e u_m^e$$

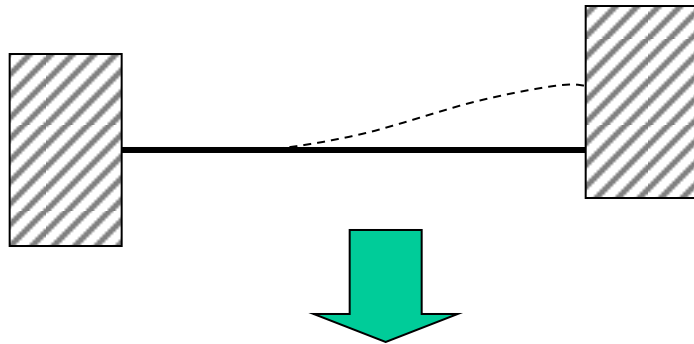
$$k_{ml} = k_{lm}$$

$[K^e]$ simmetrica



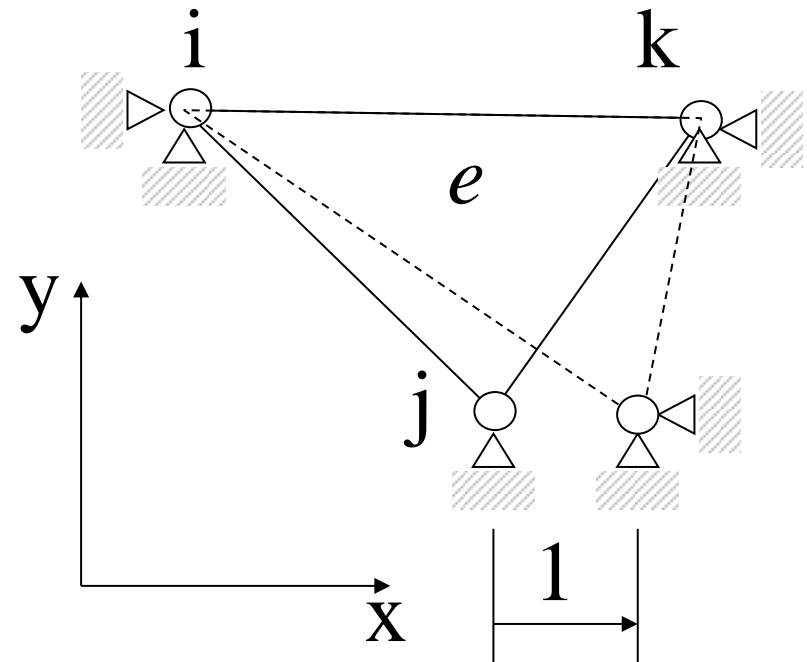
Valutazione di $[K^e]$

In casi semplici è possibile calcolare le reazioni vincolari in presenza di “cedimenti vincolari” dei nodi (Es. elementi asta, trave)



si ottengono immediatamente le

$$k_{m,n}^e$$

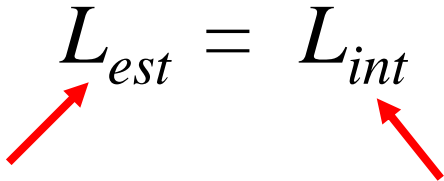


In generale, questa procedura non è praticabile per un elemento di forma generica

Valutazione di $[K^e]$

Principio dei Lavori Virtuali

Dato un sistema di forze e tensioni equilibrato e un sistema di spostamenti e deformazioni congruente, il lavoro che le forze esterne del primo sistema compiono sugli spostamenti del secondo è uguale al lavoro che le tensioni interne del primo sistema compiono sulle deformazioni del secondo.

$$L_{est} = L_{int}$$


*Carichi nodali veri ·
spost.nodali virtuali*

*Tensioni vere
·deformazioni virtuali*

Valutazione di $[K^e]$

Principio dei Lavori Virtuali

$$L_{est} = L_{int}$$

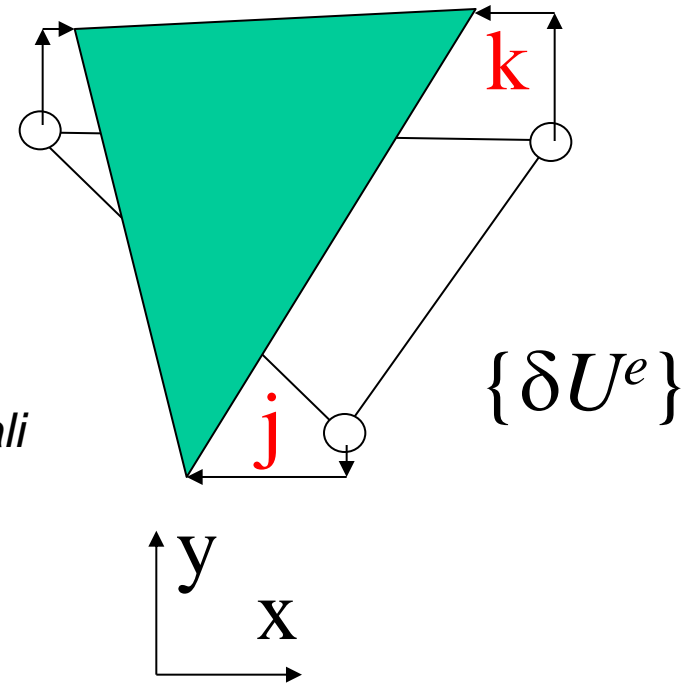
*Carichi nodali veri ·
spost.nodali virtuali*

*Tensioni vere
·deformazioni virtuali*

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\}$$

Spost. virtuali

Carichi effettivi



$$L_{\text{int}} = \int_V \{\delta\epsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

$$\{\delta\epsilon\} = [B]\{\delta U^e\}$$

$$\{\delta\epsilon\}^T = \{\delta U^e\}^T [B]^T$$

$$L_{\text{int}} = \int_V \{\delta U^e\}^T [B]^T \{\sigma\} dV = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$$


$$L_{\text{int}} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D]\{\epsilon\} dV$$

$$\{\epsilon\} = [B]\{U^e\}$$

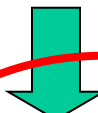
$$L_{\text{int}} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D][B]\{U^e\} dV = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D][B] dV \{U^e\}$$

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\}$$

$$L_{int} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D][B] dV \{U^e\}$$


$$\{\delta U^e\}^T \{P^e\} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D][B] dV \{U^e\}$$

affinché l'uguaglianza sia valida per qualunque spostamento virtuale deve valere


$$\{P^e\} = \int_V [B]^T [D][B] dV \{U^e\}$$


$$\{P^e\} = [K^e] \{U^e\}$$

Applicazione

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D][B] dV$$

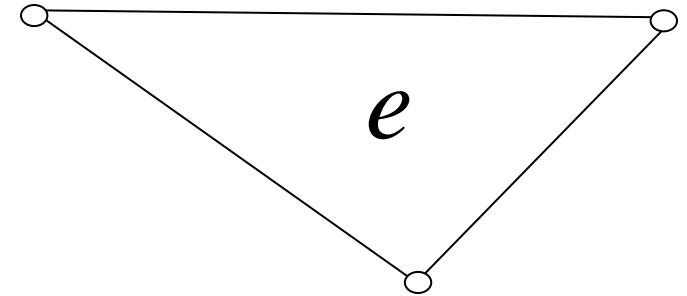
$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} & 0 & C_{26} \\ C_{11} & B_{22} & C_{13} & B_{24} & C_{15} & B_{26} \end{bmatrix}$$

*con f.forma lineari
dipende solo da
coordinate nodi*

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

*In questo caso (f.forma
lineari) si può isolare il
volume e calcolare [K]*

$$[K^e] = [B]^T [D][B] \int_V dV = [B]^T [D][B]V$$



Osservazione: unità di misura

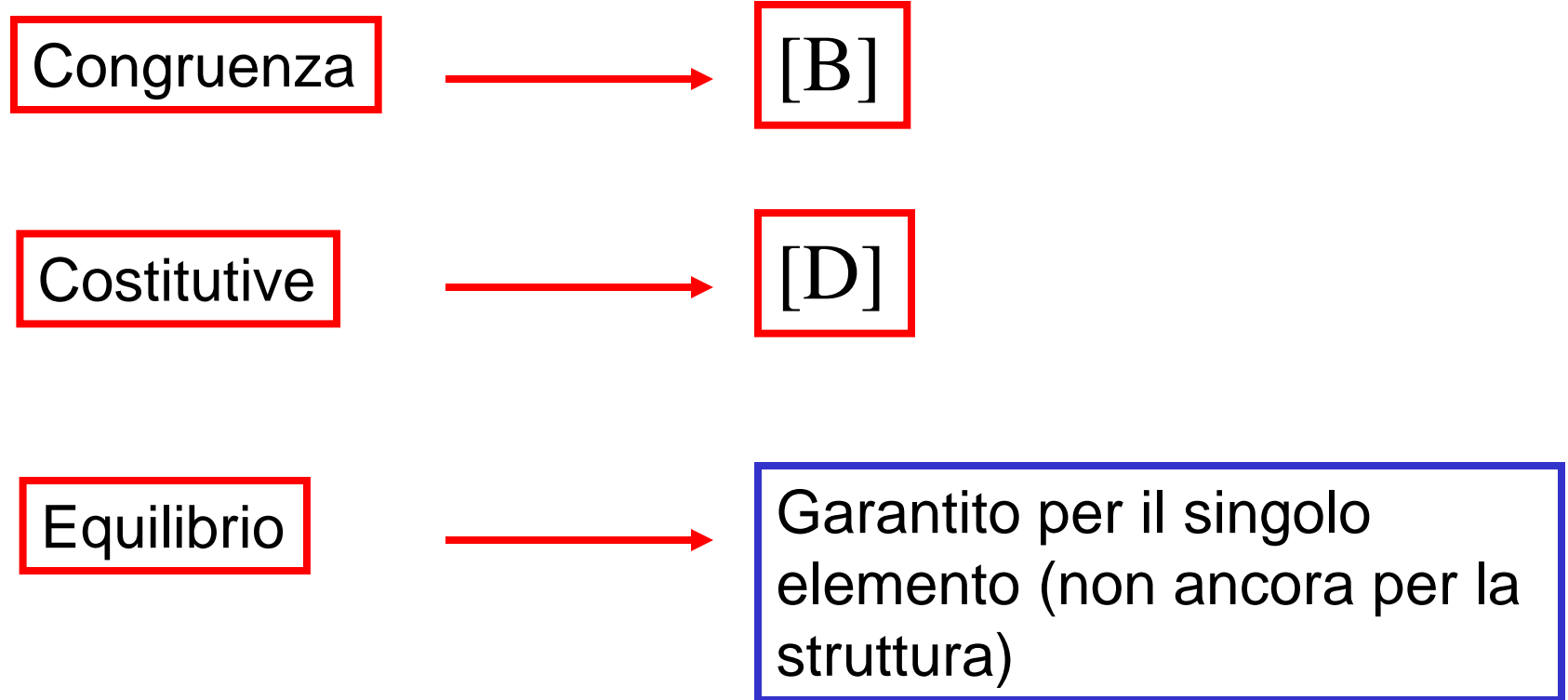
$$[K^e] = [B]^T [D] [B] V$$

Diagram illustrating the units of measurement for the equation $[K^e] = [B]^T [D] [B] V$. Arrows point from the units to the corresponding terms in the equation:

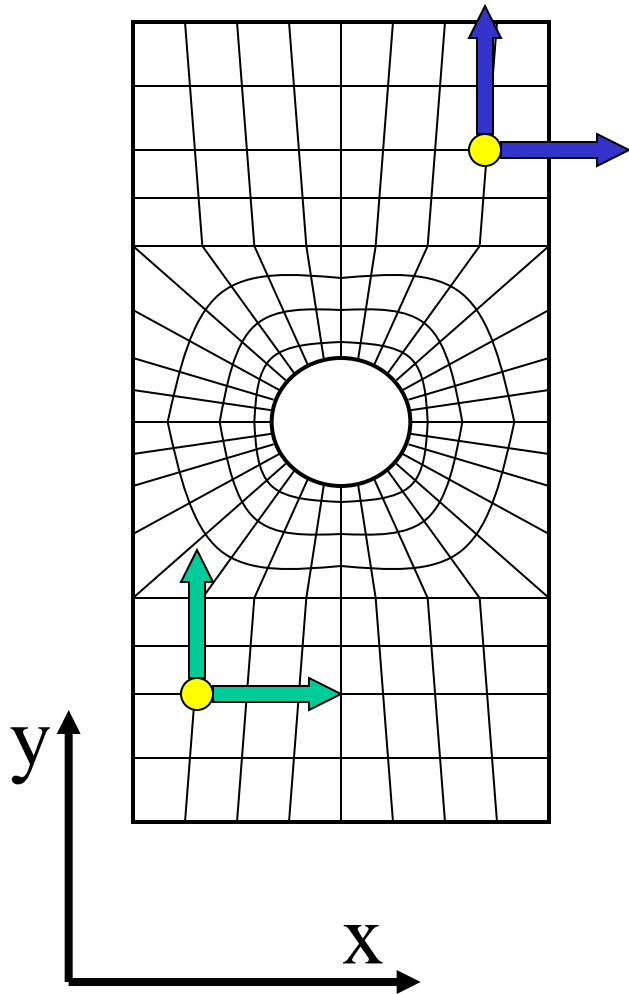
- $[K^e]$ is associated with $N m^{-1}$ (blue text).
- $[B]^T$ is associated with m^{-1} (red text).
- $[D]$ is associated with $N m^{-2}$ (red text).
- $[B]$ is associated with m^{-1} (red text).
- V is associated with m^3 (red text).

$$\frac{1}{m} \frac{N}{m^2} \frac{1}{m} m^3 = \frac{N}{m}$$

ANALISI INTERA STRUTTURA



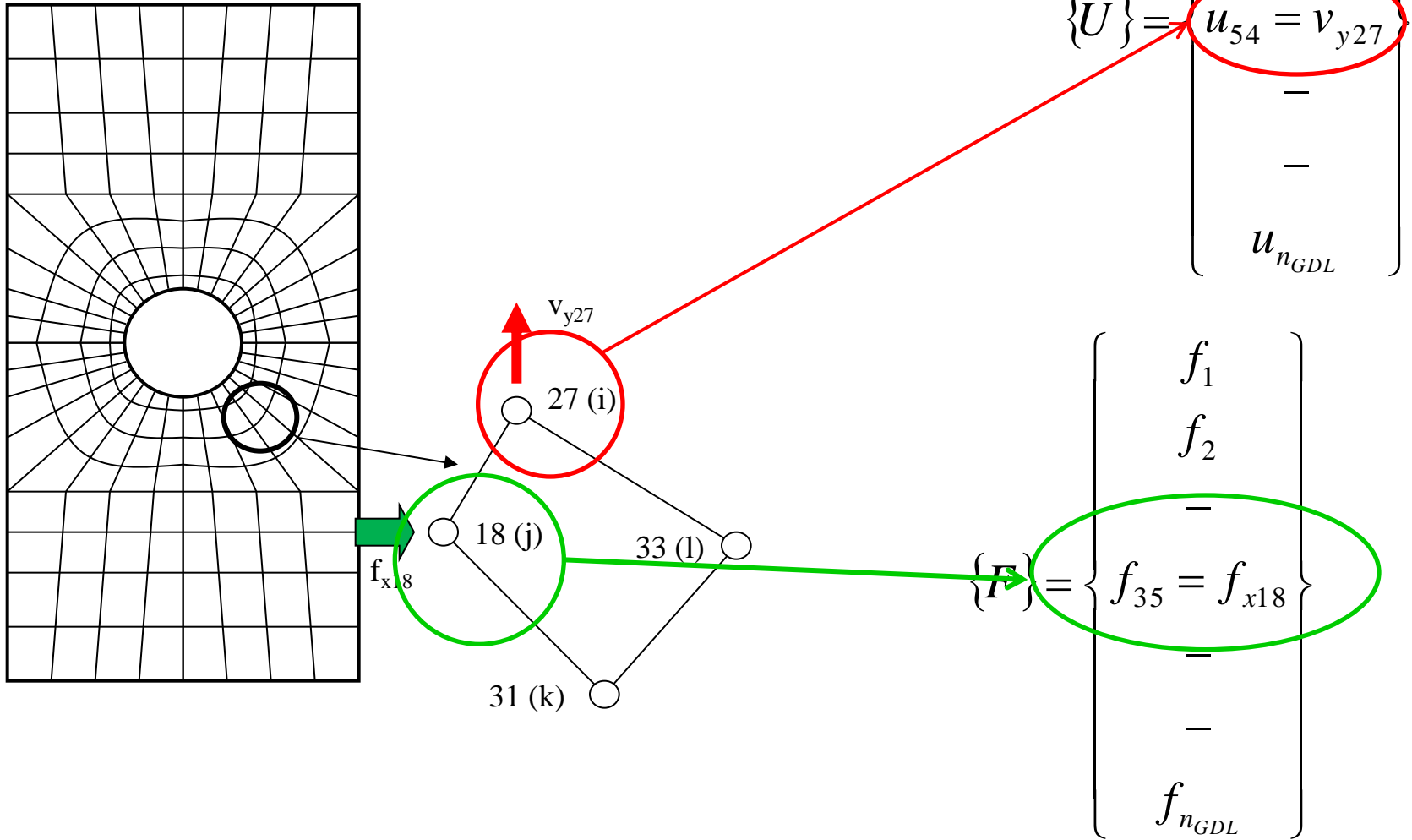
VETTORI DEGLI SPOSTAMENTI E DEI CARICHI ESTERNI PER L'INTERA STRUTTURA



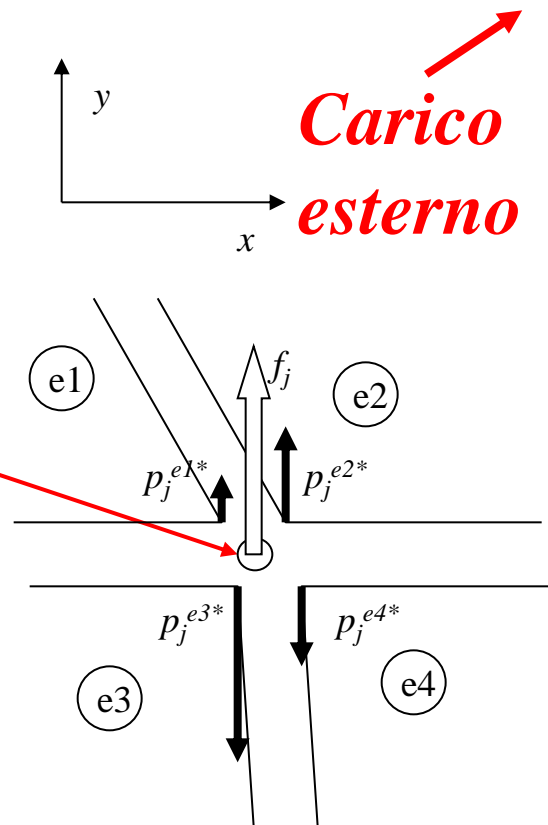
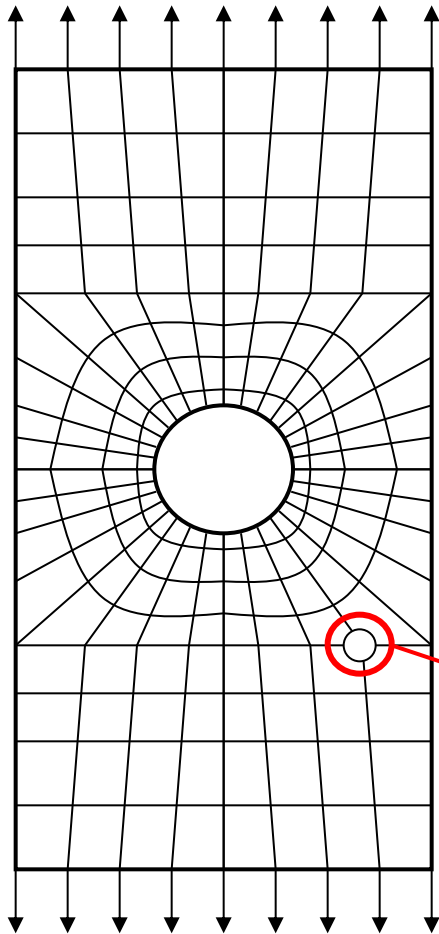
$$\{U\} = \begin{Bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ - \\ - \\ - \\ v_{yn_N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ - \\ - \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ - \\ - \\ - \\ f_{yn_N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ - \\ - \\ - \\ f_{n_{GDL}} \end{Bmatrix}$$

VETTORI DEGLI SPOSTAMENTI E DEI CARICHI APPLICATI PER L'INTERA STRUTTURA



Equazione di equilibrio al nodo



Carico esterno

Carico applicato nel nodo all'elemento "e" (espanso)

$$f_j - \sum_{e^*=1}^{n_e^*} p_j^{e^*} = 0$$

$$f_j = \sum_{e^*=1}^{n_e^*} p_j^{e^*}$$

Si considerano tutti e soli gli elementi che *convergono* nel nodo considerato

$$\{P^e\} = [K^e]\{U^e\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix}_{8 \times 1} = \begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix}_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} k_{1,1}^e & k_{1,2}^e & k_{1,3}^e & k_{1,4}^e & \dots & k_{1,8}^e \\ k_{2,1}^e & k_{2,2}^e & k_{2,3}^e & k_{2,4}^e & \dots & k_{2,8}^e \\ k_{3,1}^e & \mathbf{k}_{3,2}^e & k_{3,3}^e & k_{3,4}^e & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{8 \times 8} \begin{Bmatrix} \dots \\ v_{yi}^e \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix}_{8 \times 1}$$

**Matrice di
rigidezza del
singolo
elemento
quadrilatero**

$$\{P^{e*}\} = [K^{e*}]\{U\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix}_{n_{gdl} \times 1 \text{ (di cui } 8 \neq 0)} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{n_{gdl} \times n_{gdl} \text{ (di cui } 64 \neq 0)} \begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{u_{54} (= v_{yi}^e)} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix}_{n_{gdl} \times 1}$$

**Matrice di
rigidezza
“ESPANSA” per il
singolo elemento**

$$\{P^{e*}\} = [K^{e*}]\{U\} \quad \text{per ogni elemento}$$

Le equazioni di equilibrio su tutti i nodi si ottengono semplicemente sommando i vettori nodali di forza (interna) espansi

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{n_N} P^{e*} \quad \text{Vettore forze nodali "ESPANSO"}$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{n_N} [K^{e*}]\{U\}$$

Si definisce **matrice della struttura** la somma delle matrici espansi di ciascun elemento (assemblaggio)

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_N} [K^{e*}]$$

più in dettaglio:

$$f_j = \sum_{e^*=1}^{n_e^*} P_j^{e^*} =$$

reazioni al nodo j dovuti a u dei nodi i degli elementi connessi al nodo del gdl j

$$= \sum_{e^*=1}^{n_e^*} \left(\sum_{i=1}^{n_{gdl}} k_{ji}^{e^*} u_i \right) =$$

$$= \dots + \left(k_{ji}^{1^*} + k_{ji}^{2^*} + \dots + k_{ji}^{n_E^*} \right) u_i + \dots =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_{gdl}} \left(\sum_{e^*=1}^{n_e^*} k_{ji}^{e^*} \right) u_i$$

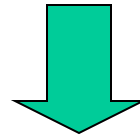
si sommano quindi le rigidzze degli elementi che hanno nodi, meglio gdl, a comune

Equazione d'equilibrio

*Matrice di rigidezza
della struttura*

$$\begin{matrix} \nearrow \\ n_{GDL} \times 1 \end{matrix} \{F\} = \begin{matrix} \nearrow \\ n_{GDL} \times n_{GDL} \end{matrix} [K] \begin{matrix} \nwarrow \\ n_{GDL} \times 1 \end{matrix} \{U\}$$

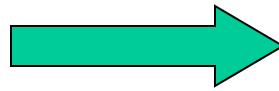
Soluzione



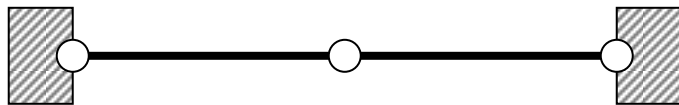
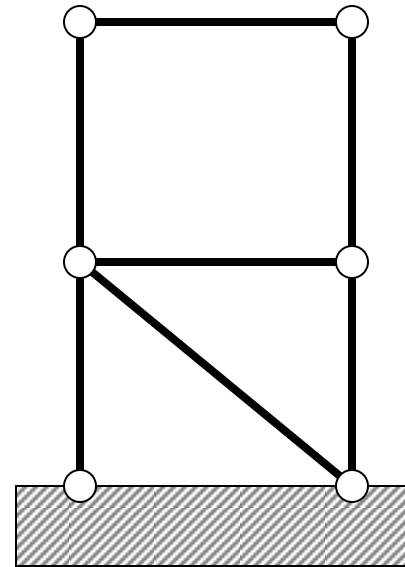
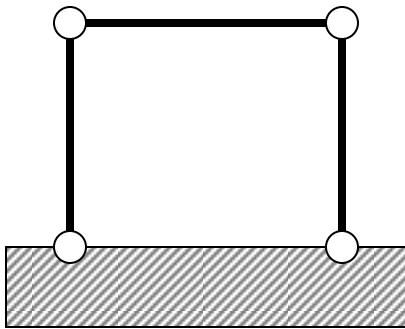
$$\{U\} = [K]^{-1} \{F\}$$

c.n.s. : $\det[K] \neq 0$

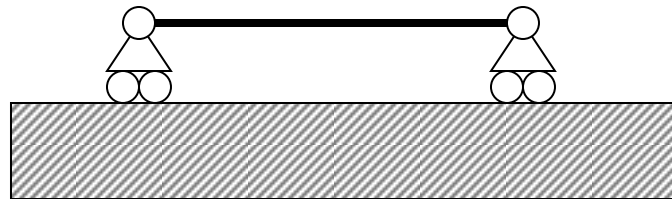
$$\det[\mathbf{K}] = 0$$



Struttura labile



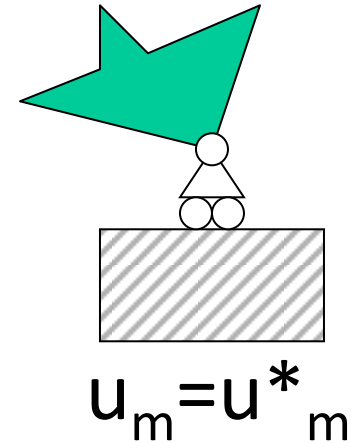
es. strutture labili



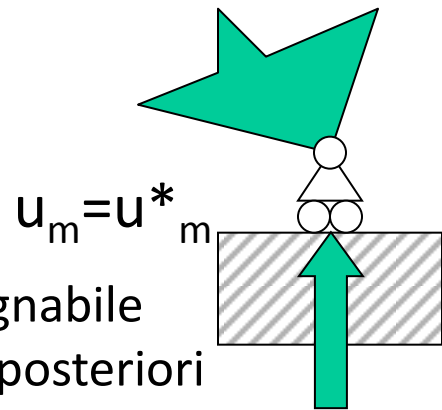
VINCOLI

Per rendere una struttura non labile occorre introdurre vincoli.

Vincolare = assegnare “a priori” il valore di una delle componenti di spostamento (g.d.l.)



$$\begin{matrix}
 \left. \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ - \\ f_m \\ - \\ f_{n_{GDL}} \end{matrix} \right\} & = & \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & - & - & k_{1m} & - & k_{1n_{GDL}} \\ k_{21} & k_{22} & - & - & k_{2m} & - & k_{2n_{GDL}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{m1} & k_{m2} & - & - & k_{m,m} & - & k_{mn_{GDL}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{n_{GDL}1} & k_{n_{GDL}2} & - & - & k_{n_{GDL}m} & - & k_{n_{GDL}n_{GDL}} \end{bmatrix} & \left. \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ - \\ - \\ u_m \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{matrix} \right\} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 n_{GDL} \bullet 1 & & n_{GDL} \bullet n_{GDL} & & n_{GDL} \bullet 1 & & n_{GDL} \bullet 1
 \end{matrix}$$



$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ - \\ f_m \\ - \\ f_{n_{GDL}} \end{bmatrix} = -u_m^* \begin{bmatrix} k_{1m} \\ k_{2m} \\ - \\ - \\ k_{m,m} \\ - \\ k_{n_{GDL}m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & - & k_{1m-1} & k_{1m+1} & - & k_{1n_{GDL}} \\ k_{21} & k_{22} & - & k_{2m-1} & k_{2m+1} & - & k_{2n_{GDL}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{m1} & k_{m2} & - & k_{m,m-1} & k_{m,m+1} & - & k_{mn_{GDL}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{n_{GDL}1} & k_{n_{GDL}2} & - & k_{n_{GDL}m-1} & k_{n_{GDL}m+1} & - & k_{n_{GDL}n_{GDL}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ - \\ - \\ u_{m-1} \\ u_{m+1} \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{bmatrix}$$

$n_{GDL} \bullet 1$ $n_{GDL} \bullet (n_{GDL}-1)$ $(n_{GDL}-1) \bullet 1$

Introduzione di 1 vincolo = riduzione di 1 del numero di incognite ed equazioni

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ - \\ f_{m-1} \\ f_{m+1} \\ - \\ f_{n_{GDL}} \end{array} \right\} - u_m \left\{ \begin{array}{c} k_{1m} \\ k_{2m} \\ - \\ k_{m-1,m} \\ k_{m+1,m} \\ - \\ k_{n_{GDL}m} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccccc} k_{11} & k_{12} & - & k_{1m-1} & k_{1m+1} & - & k_{1n_{GDL}} \\ k_{21} & k_{22} & - & k_{2m-1} & k_{2m+1} & - & k_{2n_{GDL}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{m-1,1} & k_{m-1,1} & - & k_{m-1,m-1} & k_{m-1,m+1} & - & k_{m-1,n_{GDL}} \\ k_{m+1,1} & k_{m+1,2} & - & k_{m+1,m-1} & k_{m+1,m+1} & - & k_{m+1,n_{GDL}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{n_{GDL}1} & k_{n_{GDL}2} & - & k_{n_{GDL}m-1} & k_{n_{GDL}m+1} & - & k_{n_{GDL}n_{GDL}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ - \\ u_{m-1} \\ u_{m+1} \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

$(n_{GDL}-1) \bullet 1$
 $(n_{GDL}-1) \bullet (n_{GDL}-1)$
 $(n_{GDL}-1) \bullet 1$

Resa invertibile la matrice K' , si possono determinare gli spostamenti nodali (esclusi i vincoli già noti)

$$\{U'\} = [K']^{-1} \{F'\}$$

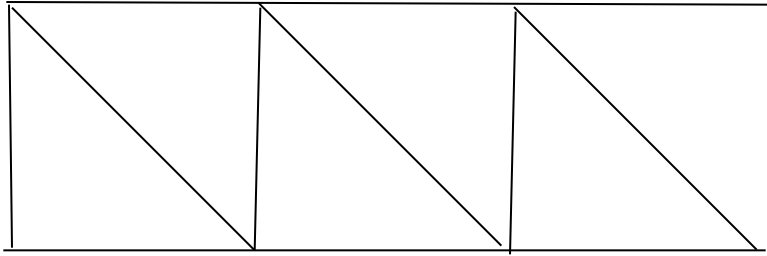
quindi spostamenti in tutti i punti della struttura tramite le funzioni di forma e quindi deformazioni e tensioni

$$\begin{Bmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{Bmatrix} = [N^e(x, y)] \cdot \{U^e\} \rightarrow \{\varepsilon\} = [B] \{U^e\} \rightarrow \{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

infine le reazioni vincolari incognite

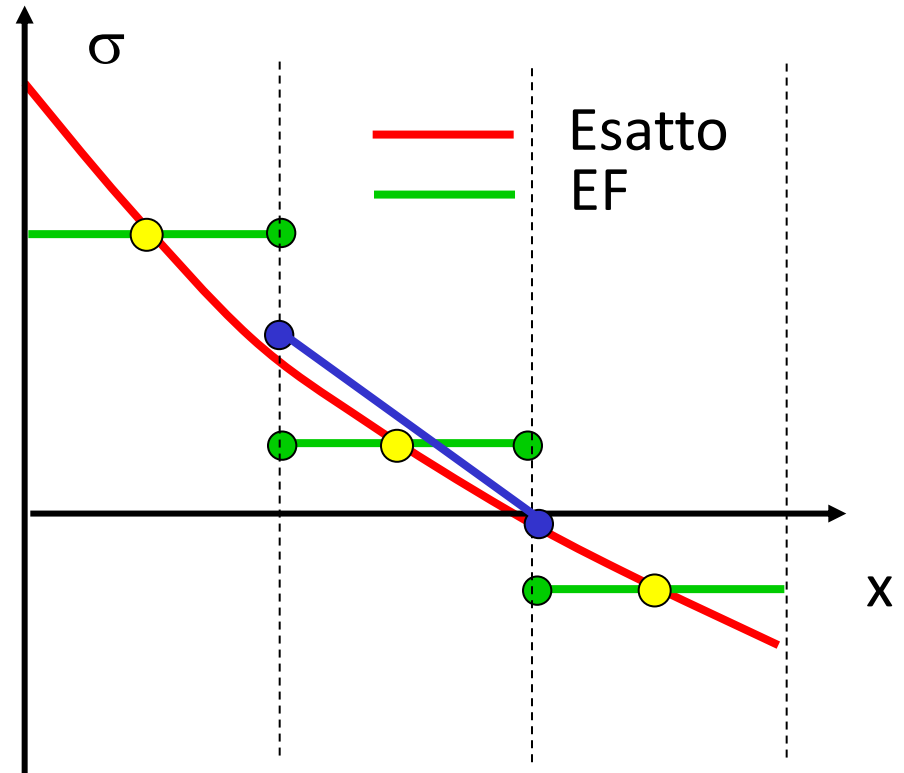
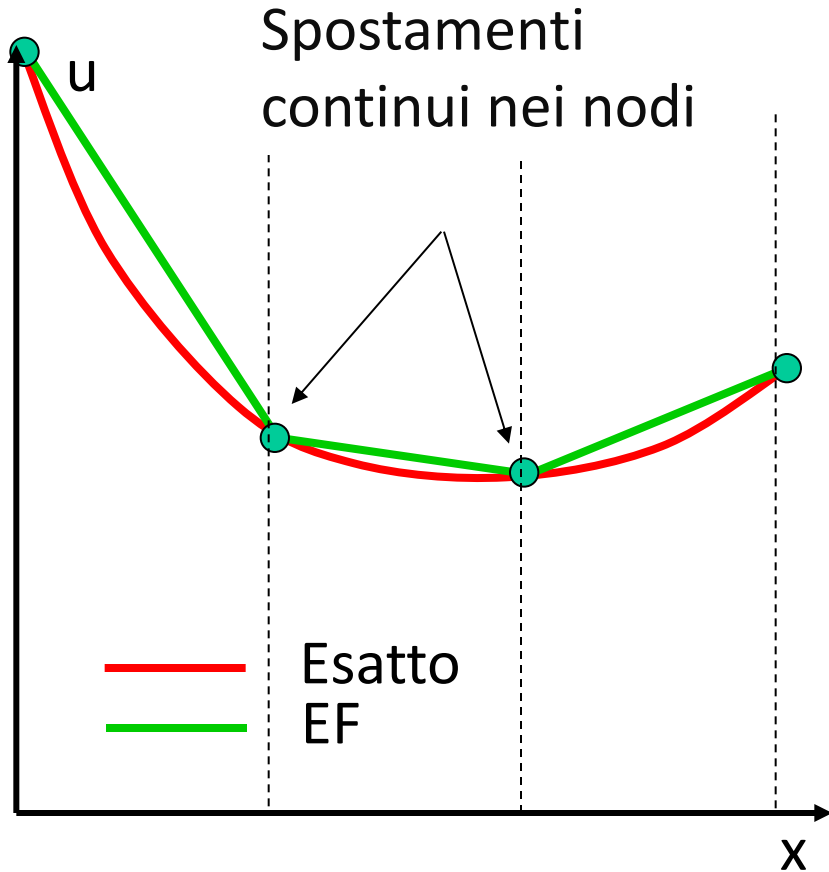
$$f_m = \left[\begin{array}{cccccc} k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{m,m} & \dots & k_{mn_{GDL}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ - \\ - \\ u_m^* \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{array} \right\}$$

vincolo imposto



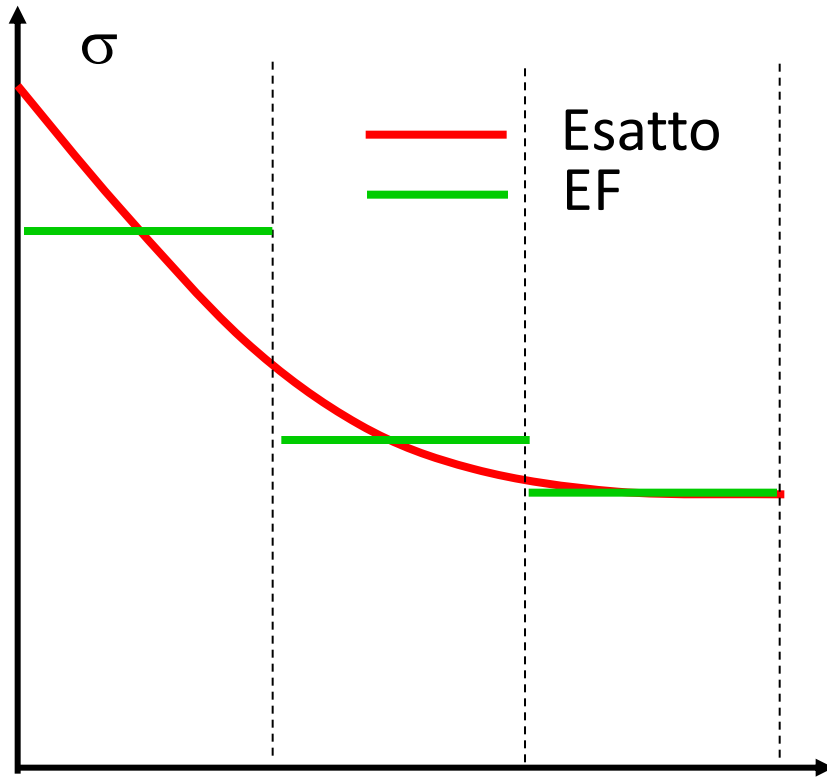
Andamento effettivo delle tensioni

Tensioni discontinue nei nodi
(calcolate nei punti di Gauss)

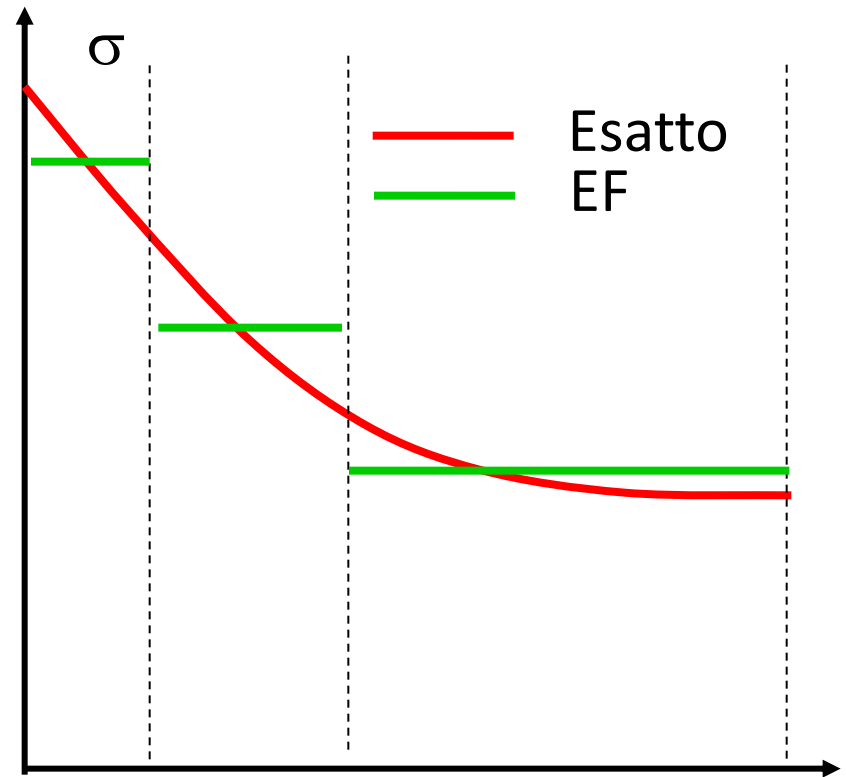


Calcolo di valori mediati nei nodi
 (media aritmetica o altre tecniche)

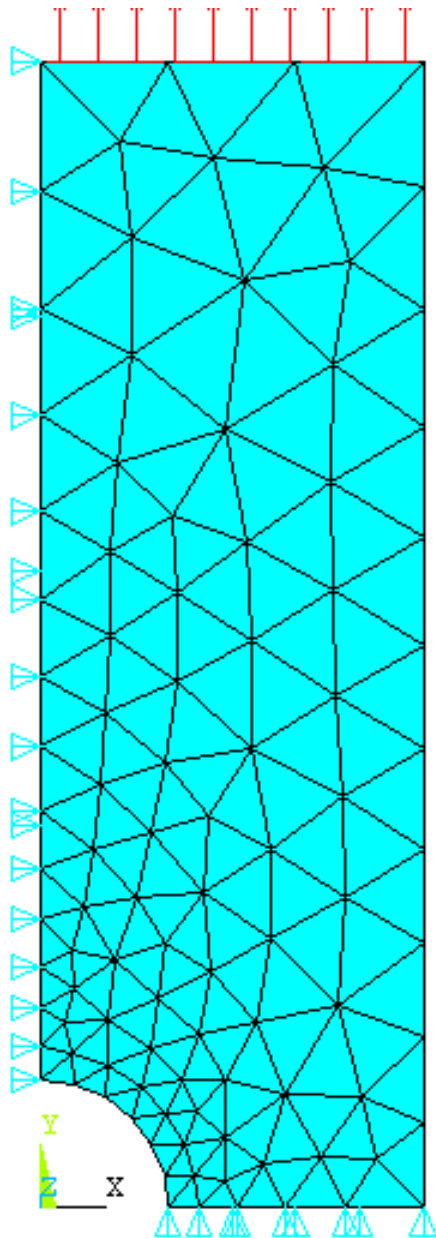
Dimensioni ottimali degli elementi per maggior accuratezza ai nodi



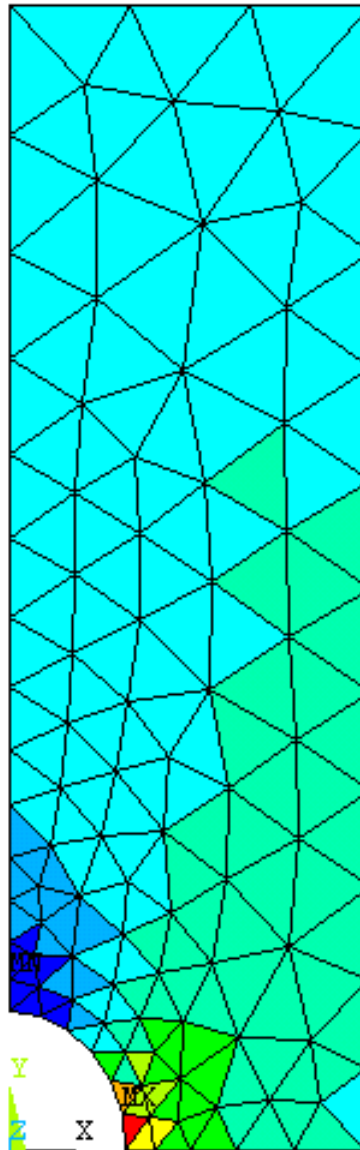
Dimensioni elementi
non ottimali
(uniformi)



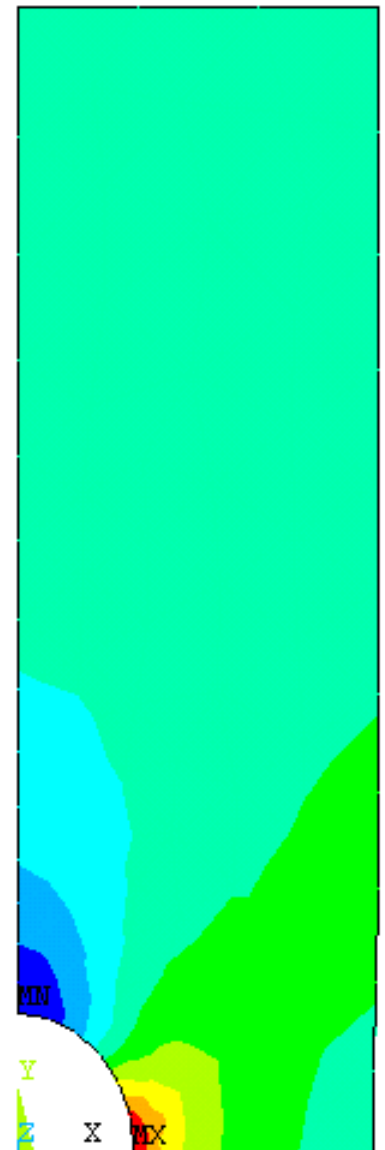
Dimensioni elementi
ottimali
(minori dove maggiore è il gradiente)



Modello



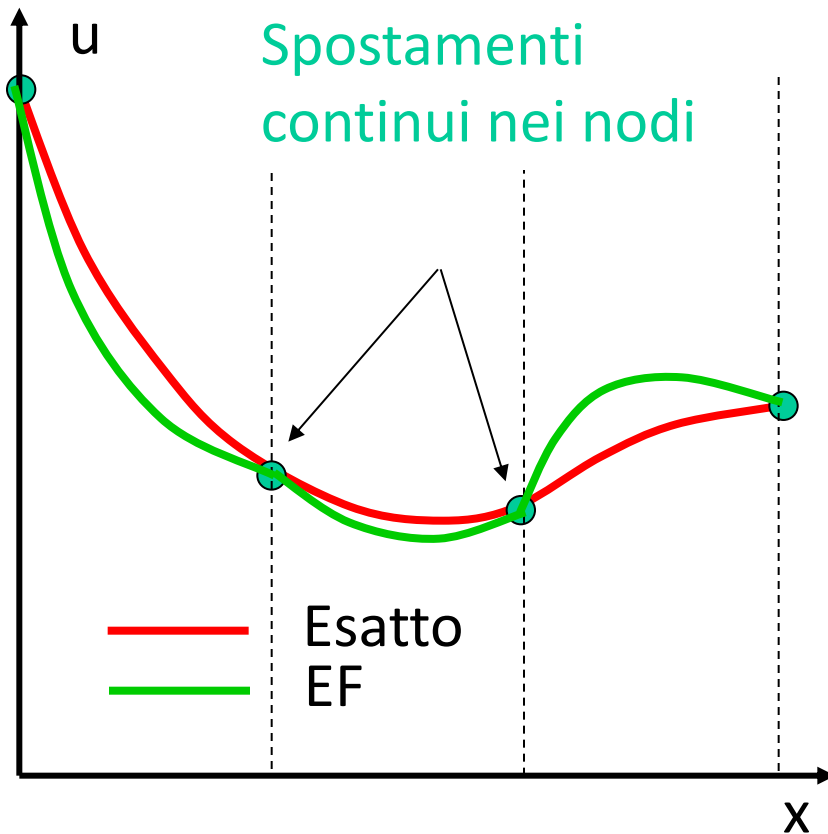
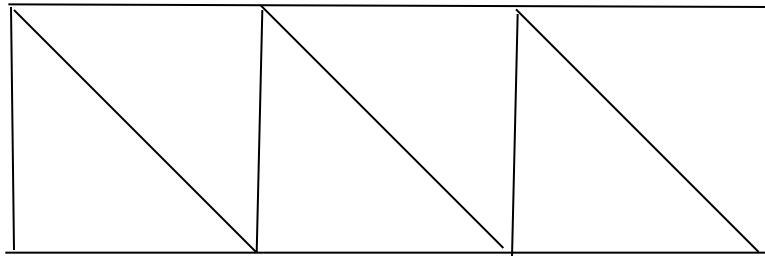
Tensioni σ_y non mediate



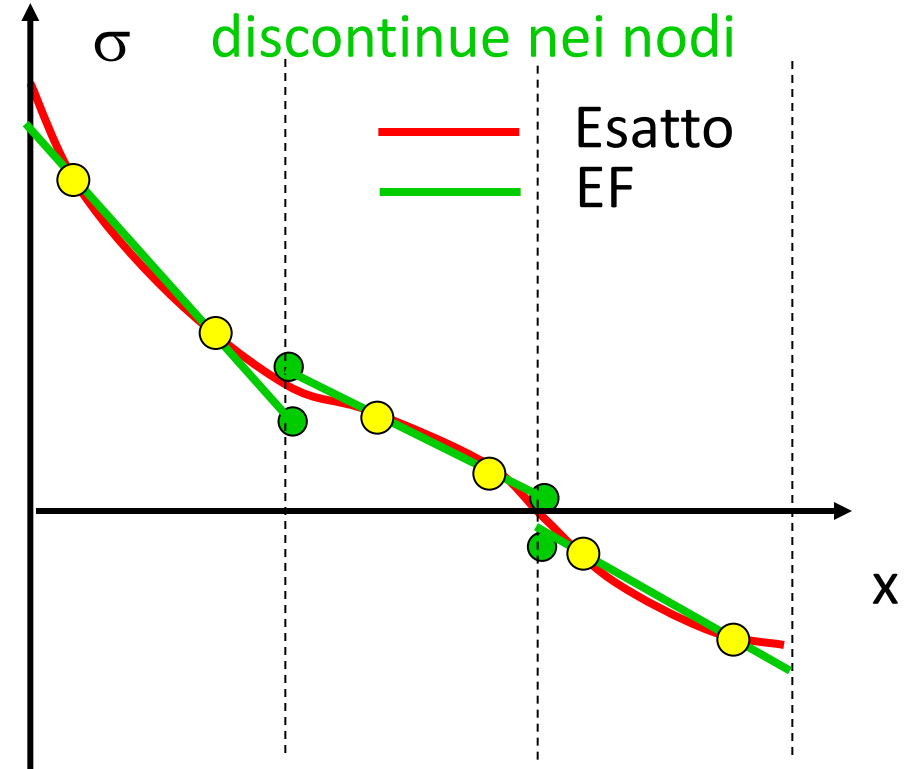
Tensioni σ_y mediate

Elemento con F.ne Forma quadratica

Generalmente la soluzione è più accurata a parità di dimensione dell'elemento



La convergenza delle tensioni è più lenta di quella sugli spostamenti



*punti Gauss per calcolo K^e
→ convergenza delle tensioni*

INFORMAZIONI UTILI

TESTI E LINK

- Slides
- Madenci, Guven, «The Finite Element Method and Applications in Engineering using ANSYS», Springer
- <http://www.mece.ualberta.ca/tutorials/ansys/> → tutorial
- <http://www.ansys.com/Products/Academic/ANSYS-Student>
→ download free del software versione student: Ansys Workbench & Ansys Mechanical (limite su dimensione modello 32knodi/elementi)