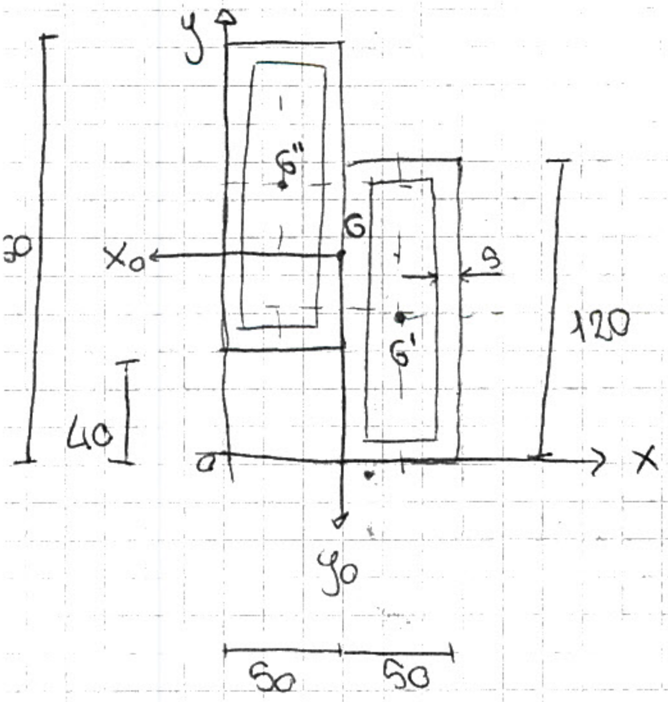
Appello 19/02/2016

I esercizio



Trovo le coordinate del baricentro rispetto ad un sistema di riferimento x_0y:

$x_G = 50$ mm

$y_G = 80$ mm ✓

Le coordinate del baricentro sono facilmente dedotte dalla composizione delle due parti identiche, che presentano i baricentri G' e G'', simmetrici rispetto a G.

Calcolo del sistema di riferimento principale: (ruotato di angolo α)

$$0 = J_{x_\alpha y_\alpha} = \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \cdot \sin 2\alpha + J_{x_0 y_0} \cos 2\alpha$$

$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{J_{x_0y_0} \cdot 2}{J_{y_0} - J_{x_0}}$$

J_{y_0} e J_{x_0} sono noti; è da calcolare $J_{x_0y_0}$:

$$J_{x_0y_0} = \sum_i J_{x_0y_0 \, i} = 0 + 2 \cdot (-25 \cdot 20) \cdot \underbrace{50 \cdot 120}_{\text{Area pieno}} +$$

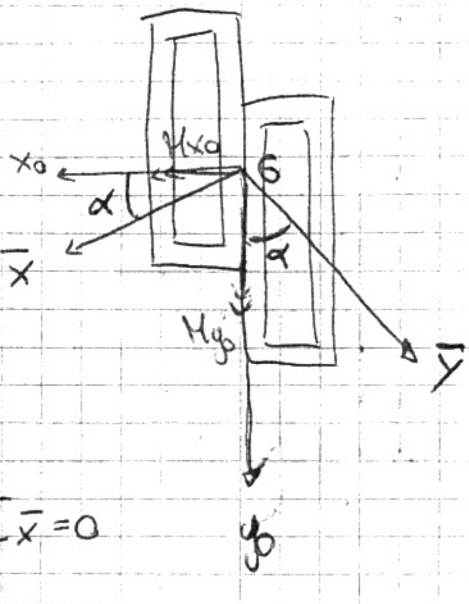
↑ rettangoli "pieni" meno rettangoli "vuoti" con formule di trasporto

$$+ (-0 - 2(-25 \cdot 20) \cdot 40 \cdot 110) = -6 \cdot 10^6 + 4{,}4 \cdot 10^6 =$$ ✓

$$\tan 2\alpha = \frac{-1{,}6\cdot\cancel{10^6}\cdot 2}{3{,}33\cdot\cancel{10^6} - 6{,}81\cdot\cancel{10^6}} = 0{,}919$$ ✓

$\alpha = 21{,}29°$

Chiamo gli assi principali $\bar{x}$ e $\bar{y}$:



Con $M_{x0} = M_0$ e $M_{y0} = 0{,}5\, M_0$

Calcolo dell'asse neutro:

Formula di Navier: $\sigma_z = \frac{M_{\bar{x}}}{J_{\bar{x}}}\bar{y} - \frac{M_{\bar{y}}}{J_{\bar{y}}}\bar{x} = 0$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{M_{\bar{y}}}{J_{\bar{y}}}\cdot\frac{J_{\bar{x}}}{M_{\bar{x}}}\cdot\bar{x}$$

Sono da calcolare $J_{\bar{x}}$, $J_{\bar{y}}$, $M_{\bar{x}}$ ed $M_{\bar{y}}$, poiché Navier può funzionare solo se il calcolo avviene per assi centrali e principali.

- $J_{\bar{x}} = J_{x0}\cdot\cos^2\alpha + J_{y0}\cdot\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\; J_{x0y0} =$
  $= 6{,}81\cdot 10^6\cdot 0{,}868 + 3{,}33\cdot 10^6\cdot 0{,}132 - 2\cdot 0{,}338\cdot(-1{,}6)\cdot 10^6 =$
  $= 7{,}43\cdot 10^6\ mm^4$ ✓

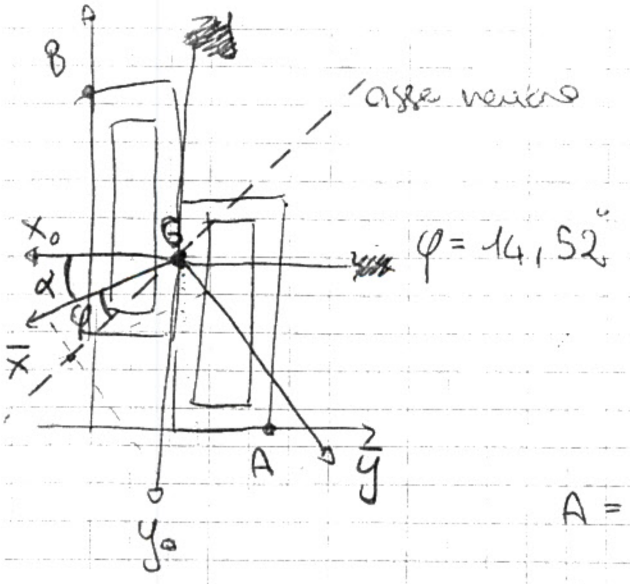
- $J_{\bar{y}} = J_{x0}\cdot\sin^2\alpha + J_{y0}\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha\; J_{x0y0} =$
  $= 6{,}81\cdot 10^6\cdot 0{,}132 + 3{,}33\cdot 10^6\cdot 0{,}868 + 2\cdot 0{,}338\cdot(-1{,}6)\cdot 10^6 =$
  $= 2{,}707\cdot 10^6\ mm^4$ ✓

- $M_{\bar{x}} = M_{x0}\cdot\cos\alpha + M_{y0}\cdot\sin\alpha = M_0\cdot 0{,}93 + M_0\cdot 0{,}5\cdot 0{,}36 = 1{,}11\, M_0$ ✓

- $M_{\bar{y}} = -M_{x0}\sin\alpha + M_{y0}\cdot\cos\alpha = -M_0\cdot 0{,}36 + M_0\cdot 0{,}5\cdot 0{,}93 = 0{,}105\, M_0$ ✓

Calcolo dell'equazione dell'asse neutro: $\bar{y} = \frac{0{,}105\,\cancel{M_0}}{1{,}11\,\cancel{M_0}}\cdot\frac{7{,}43\cdot\cancel{10^6}}{2{,}707\cdot\cancel{10^6}}\bar{x} =$

$= 0{,}260\,\bar{x}$ ✓



I punti della sezione che possono risultare maggiormente sollecitati sono A e B, simmetrici rispetto al baricentro.
~~Si confrontano le sollecitazioni~~ a ~~parità di Mo~~.

$$A = (\bar{x}_A, \bar{y}_A)$$

$$B = (\bar{x}_B, \bar{y}_B) = (-x_A, -y_A)$$

(il disegno risulta impreciso)

$$\bar{x}_A = x_{0A}\cdot\cos(\alpha) + y_{0A}\cdot\sin(\alpha) = -50\cdot 0{,}93 + 80\cdot 0{,}36 = -17{,}45$$

$$\bar{y}_A = y_{0A}\cos(\alpha) - x_{A0}\cdot\sin(\alpha) = 80\cdot 0{,}93 + 0{,}36\cdot 50 = 92{,}4$$

$$\cancel{\bar{x}_B = x_{0B}\cos\alpha + y_{0B}\sin\alpha =}$$

$$\cancel{\bar{y}_B = y_{0B}\cos\alpha - x_{0B}\cdot\sin\alpha =}$$

$$\underset{\text{in } A}{\sigma_{z\,max}} = \frac{M_{\bar{x}}}{J_{\bar{x}}}\bar{y}_A - \frac{M_{\bar{y}}}{J_{\bar{y}}}\bar{x}_A = \frac{1{,}14\,M_0}{9{,}43\cdot 10^6}\cdot 92{,}4 - \frac{0{,}105\,M_0}{2{,}707\cdot 10^6}\cdot(-17{,}45) =$$

$$= 13{,}8\cdot 10^{-6}M_0 + 0{,}677\cdot 10^{-6}M_0 = 14{,}47\cdot 10^{-6}M_0$$

Il momento Mo da rendere massimo è quello per cui la sezione ha una $\sigma_{amm} = 300$ MPa

Assumendo un coefficiente di sicurezza unitario vale:

$$\frac{\sigma_{amm}}{\sigma_{eq\,max}} = 1 \Rightarrow 300\text{ MPa} = \sigma_{eq\,max} \cancel{=} \cancel{\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}} = \sigma_{z\,max}$$

~~utilizzando il criterio di Tresca~~

tensione normale massima

$$300\text{ MPa} = 14{,}47\cdot 10^{-6}M_0$$

$$M_0 = 20{,}73\cdot 10^6\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

Si ipotizza $\frac{M_0}{2} = M_0'$. Calcolo l'aggiuntivo M_z sopportabile.

Utilizzando il criterio di Tresca con l'aggiunta della tensione tangenziale dovuta ad M_z:

$$300 \text{ MPa} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{z\theta}^2}$$

$$\tau_{z\theta} = \sqrt{\frac{300^2 - \sigma_z^2}{4}} \quad \text{con } \sigma_z \text{ dovuto ad } M_0'$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\max \\ \downarrow \\ \text{in } A}}{\sigma_z} = 14{,}47 \cdot 10^{-6} \cdot M_0' = 149{,}98 \text{ MPa}$$

150!

$$\tau_{z\theta} = \frac{\sqrt{300^2 - 149{,}98^2}}{2} = \frac{\sqrt{67506}}{2} = 129{,}9 \text{ MPa}$$

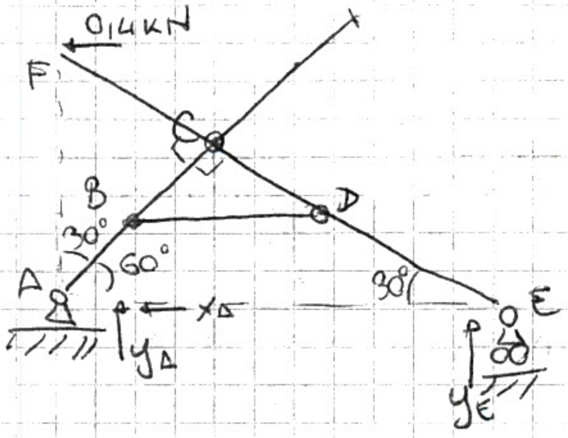
Considero M_z distribuito equamente tra i due profilati chiusi a spessore sottile:

$$\tau_{z\theta} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{M_z}{2A_0 \cdot b}}_{\text{per ogni profilo rettangolare}} = \frac{1}{2} \frac{M_z}{2 \cdot b \cdot (\underbrace{45 \cdot 115}_{A_0})}$$

$$\Rightarrow M_z = 129{,}9 \cdot 4 \cdot b \cdot (45 \cdot 115) = 13{,}44 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

II esercizio

1)



$AB = BC = 0,25\,m$

Equilibrio globale:

y) $y_A + y_E = 0$

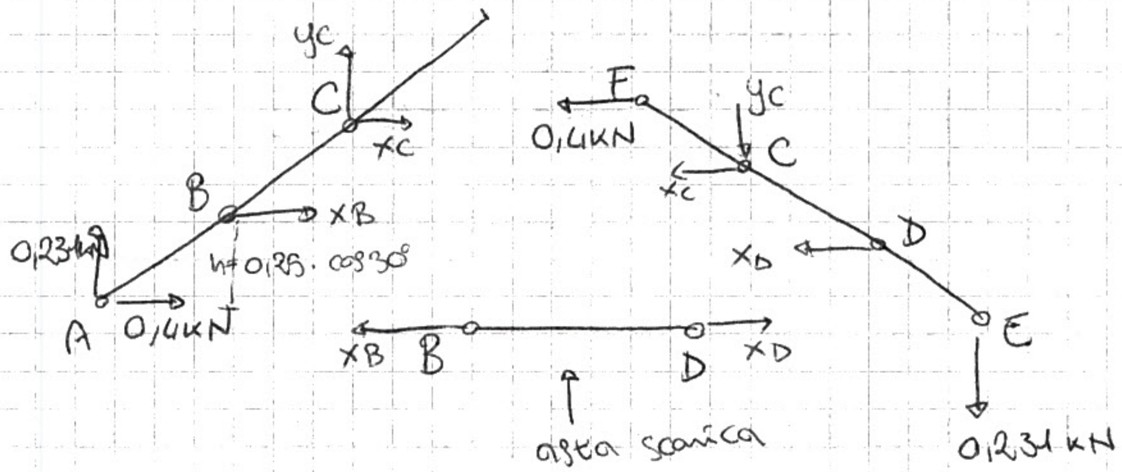
x) $x_A = -0,4\,kN$

$M_{\text{in } A}$) $y_E \cdot \underset{\underset{1m}{\parallel}}{AE} + 0,4\,kN \cdot \underset{\underset{\frac{0,5\,m}{\cos 30°} = 0,577}{\parallel}}{AF} = 0$

$\Rightarrow y_E = -0,231\,kN$

$\Rightarrow y_A = 0,231\,kN$

Schema di corpo libero degli elementi:



BD) $x_B = x_D$

ABC) $x_B + x_C + 0,4\,kN = 0$; $y_C = -0,231\,kN$; $x_B \cdot 0,216 + x_C \cdot 0,432 = y_C \cdot 0,25$

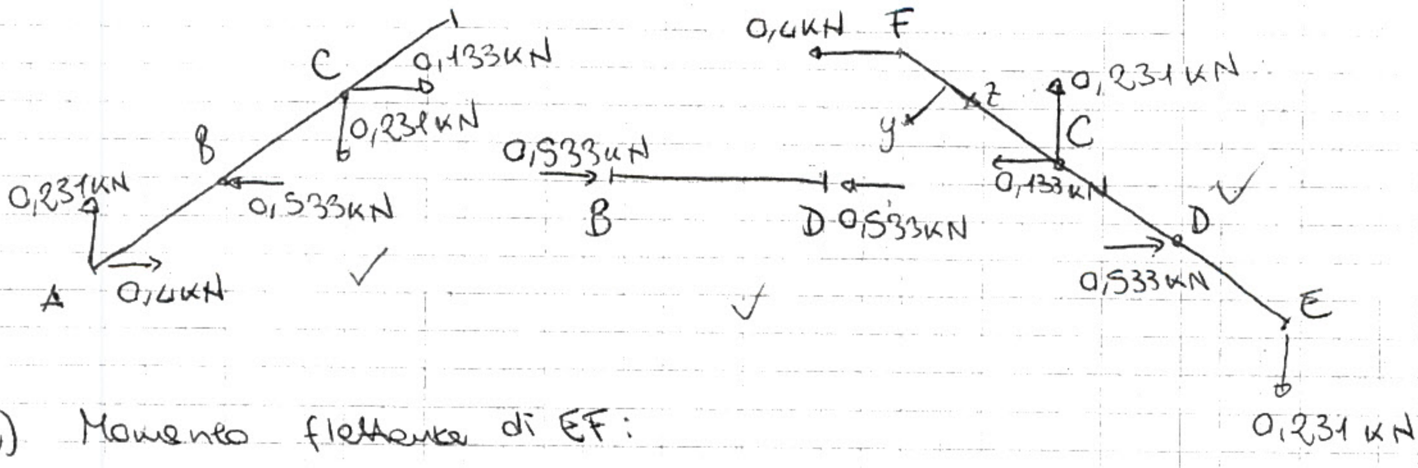
$x_B = -x_C - 0,4\,kN$

$x_B = \dfrac{-0,231\,kN \cdot 0,25 - x_C \cdot 0,432}{0,216} = -0,267 - 2x_C$

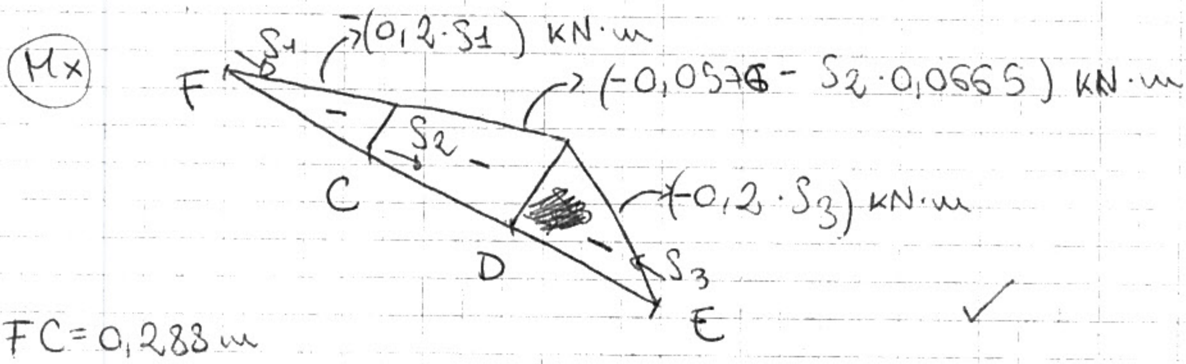
$\Rightarrow -0,267 - 2x_C = -x_C - 0,4\,kN \Rightarrow x_C = 0,133\,kN$

$X_B = -X_C - 0{,}4\,kN = -0{,}133 - 0{,}4 = -0{,}533\,kN = X_D$

Struttura risolta:



2) Momento flettente di EF:



FC = 0,288 m

CD = 0,433 m

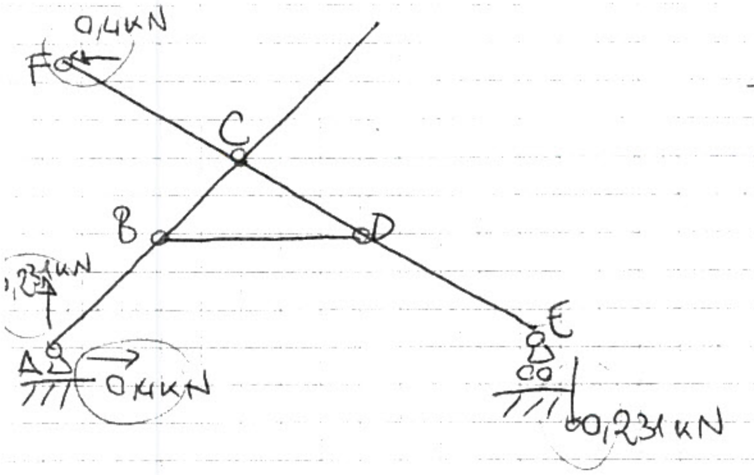
DE = CD

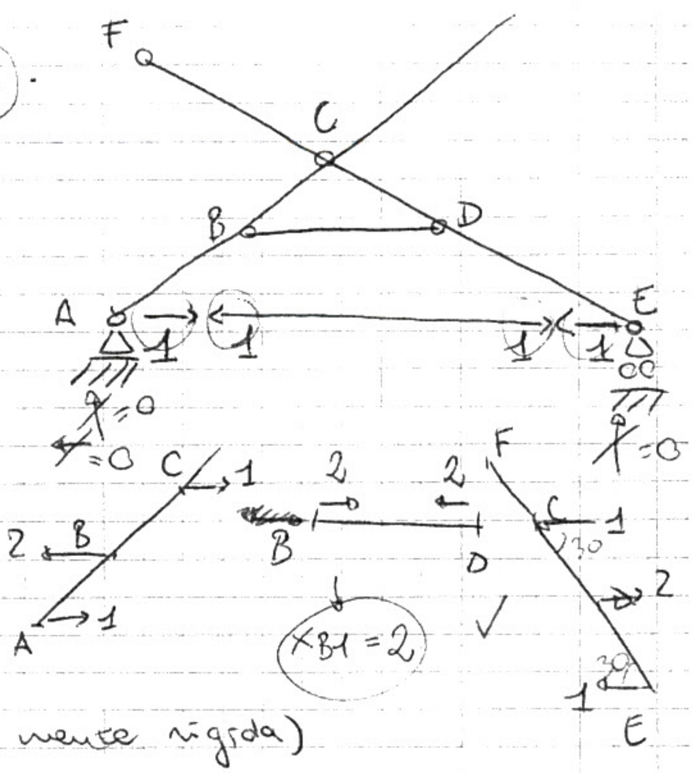
3) Si rinforza la struttura con un'asta incernierata tra A ed E di caratteristiche uguali a BD. Trovare la variazione della forza normale in BD.

Con il rinforzo la struttura diventa iperstatica; si sconnette l'asta appena aggiunta e si descrive un nuovo sistema ausiliario, mentre quello principale è già stato risolto.

La variazione della forza normale in BD è $X_1 \cdot X_{B1}$

SISTEMA PRINCIPALE + X_1 · SISTEMA AUSILIARIO



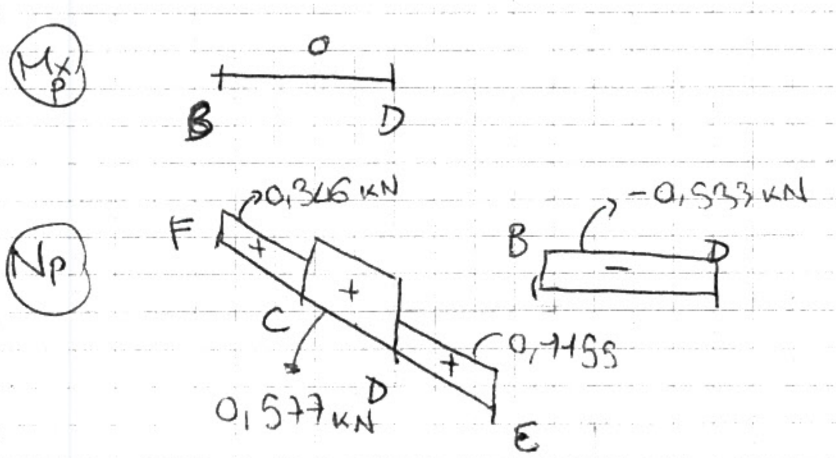


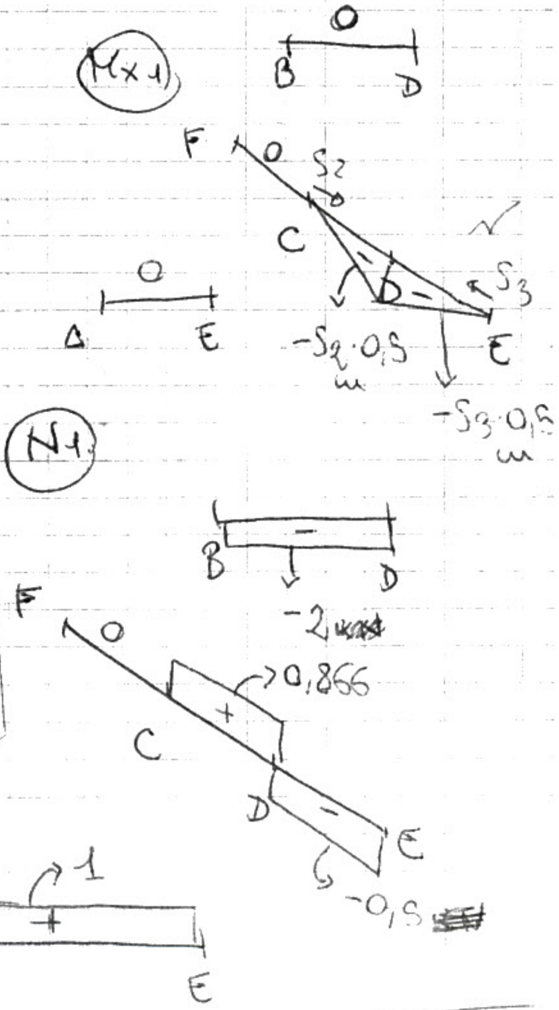
Equazione di congruenza:

$$\delta_{1P} + X_1 \delta_{11} = 0$$

(L'asta AC è definita infinitamente rigida)

Caratteristiche di sollecitazione mancanti:

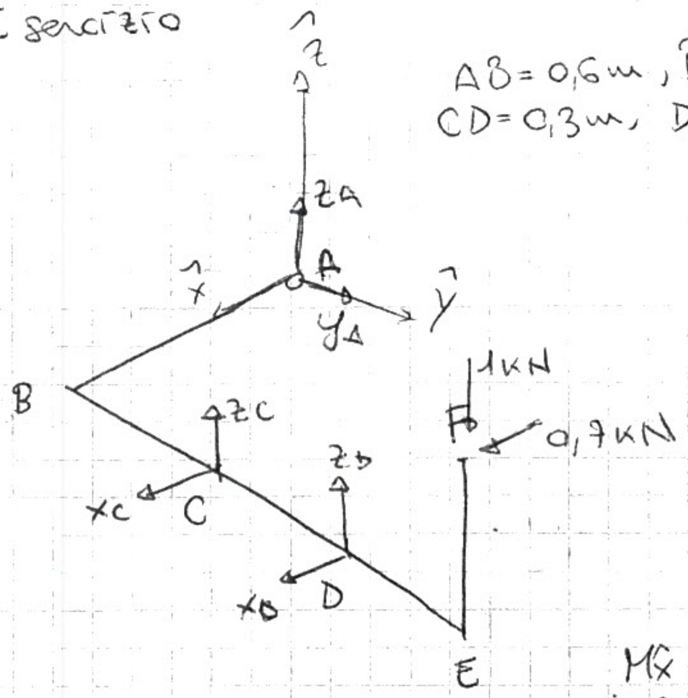




$$\delta_{1P} = \int_0^{0,433} \frac{(-S_2 \cdot 0,5)(-0,0576 - S_2 \cdot 0,0665)}{E \cdot J_x\,(EF)} dS_2 + \int_0^{0,433} \frac{(-0,2S_3)(-0,5 \cdot S_3)}{E J_x\,(EF)} + \int_0^{0,5} \frac{(-0,533)(-2)}{E \cdot A\,(BD)} \cdot dS + \int_0^{0,433} \frac{0,577 \cdot 0,866}{E \cdot A\,(EF)} dS + \int_0^{0,433} \frac{0,1155 \cdot (-0,5)}{E \cdot A\,(EF)}dS$$

$$= \frac{0,00359}{120000 \cdot 2,5 \cdot 10^5} + \frac{0,00270}{120000 \cdot 2,5 \cdot 10^5} + \frac{0,533}{120000 \cdot 100} + \frac{0,216}{120000 \cdot 100} + \left(-\frac{0,0250}{120000 \cdot 100}\right)$$

III Esercizio



AB = 0,6 m, BC = 0,3 m
CD = 0,3 m, DE = 0,6 m, EF = 0,6 m

Equilibrio globale:

z) $z_A + z_D + z_C = 1\,kN$

y) $y_A = 0$

x) $x_D + x_C + 0{,}7\,kN = 0$

M_x in C) $-BC \cdot z_A + CD \cdot z_D - CE \cdot 1\,kN = 0$

M_y in C) $AB \cdot z_A + EF \cdot 0{,}7\,kN = 0$

M_z in C) $-\cancel{AB \cdot y_A} - CD \cdot x_D - CE \cdot 0{,}7\,kN = 0$, $y_A = 0$

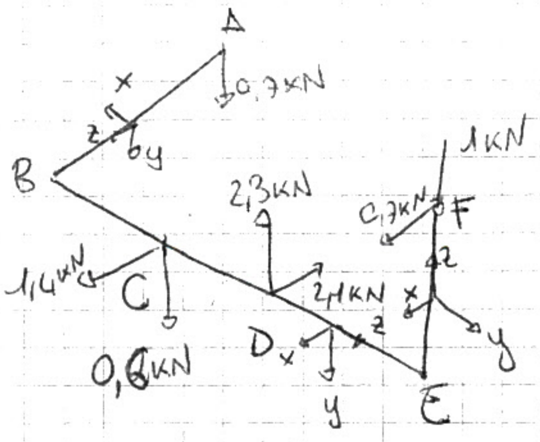
$x_D = -\frac{CE}{CD} \cdot 0{,}7 = -2{,}1\,kN$

$z_A = -\frac{EF}{AB} \cdot 0{,}7 = -0{,}7\,kN$

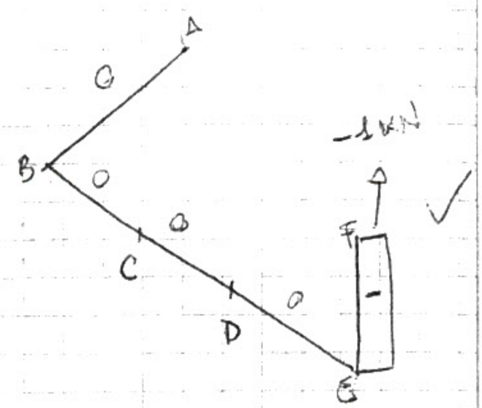
$z_D = \frac{CE + BC \cdot z_A}{CD} = 3 - 0{,}7 = 2{,}3\,kN$

$z_C = 1 - z_A - z_D = 1 + 0{,}7 - 2{,}3 = -0{,}6\,kN$

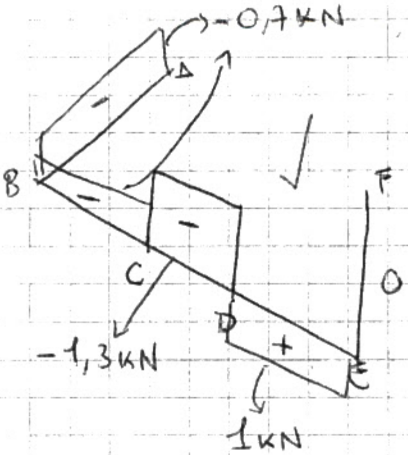
$x_C = -0{,}7 - x_D = 1{,}4\,kN$



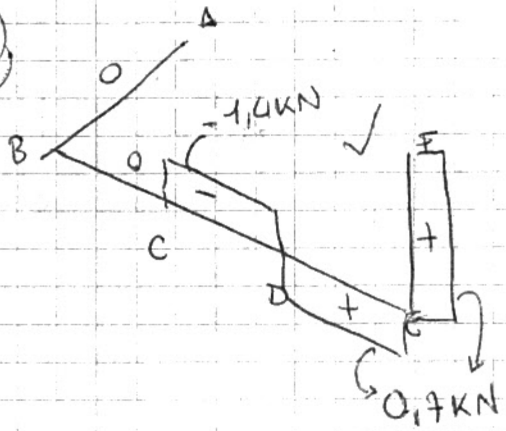
N



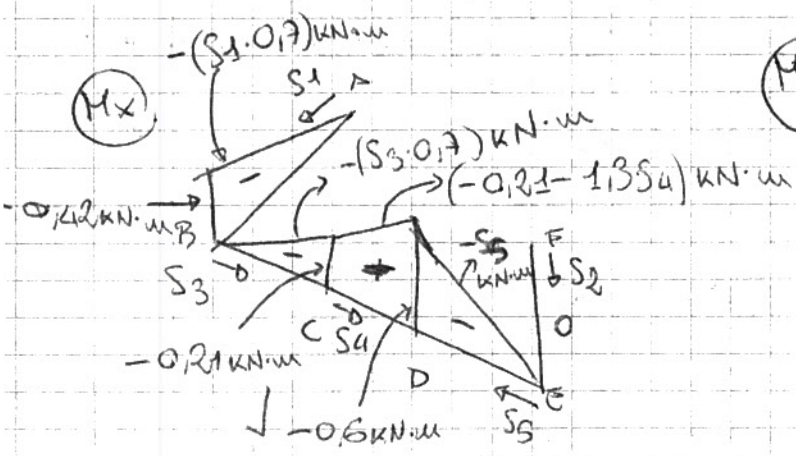
Ty



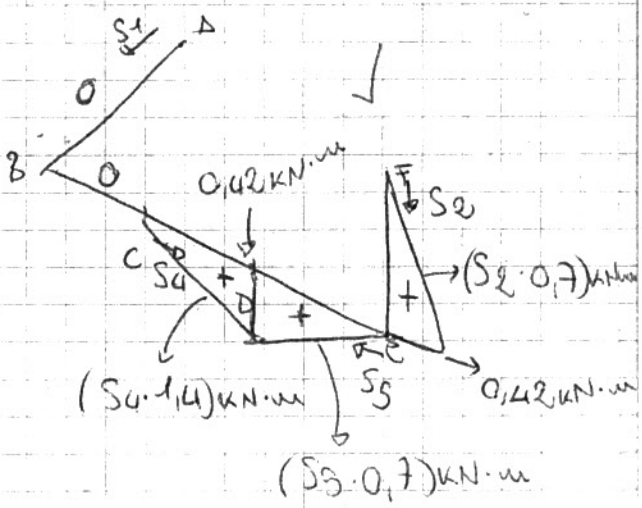
Tx



Mx



My



Mz