CAP.1

Concetti fondamentali e principi della meccanica

Grandezze fondamentali
Le grandezze fondamentali della meccanica sono spazio, tempo, massa e forza. Non possono essere completamente definite, ma accettate sulla base dell'intuito e dell'esperienza.

concetto di spazio	necessario per definire la posizione di un generico punto P in un sistema di riferimento attraverso le sue coordinate (lunghezze in 3 direzioni). L'unità di misura è il m. Nella meccanica spesso si usa il mm.
concetto di tempo	necessario per definire una sequenza di eventi. L'unità di misura è il sec.
concetto di massa	caratteristica dei corpi che misura la resistenza da questi offerta a variare il proprio moto. L'unità di misura è il kg.
concetto di forza	azione di un corpo su un altro per contatto diretto o a distanza.

Le prime tre grandezze sono primitive e tra loro indipendenti mentre la forza può essere definita a partire da esse.

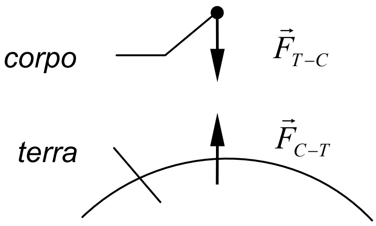
La forza
- <u>definizione dinamica</u>: agente fisico capace di alterare lo stato di quiete o di moto di un corpo (es. forza peso).
- <u>definizione statica</u>: agente fisico capace di produrre una deformazione. Su tale definizione si basano i dinamometri meccanici a molla, piezoelettrici, estensimetrici (celle di "carico"). Il dinamometro ideale è costituito da una molla senza massa, con dimensioni trascurabili e con allungamento proporzionale alla forza applicata.

Una forza è caratterizzata da un modulo, da una direzione e da un punto di applicazione. Può essere quindi rappresentata matematicamente da un vettore applicato.

L'unità di misura della forza nel sistema S.I. è il Newton. Il Newton è una grandezza derivata esprimibile come la forza necessaria ad imprimere ad una massa unitaria l'accelerazione di 1 m/s^2.

Nel presente corso verranno trattati principalmente corpi che sono immobili sotto le azioni delle varie forze applicate. In questo ambito la definizione statica di forza è più utile e significativa.

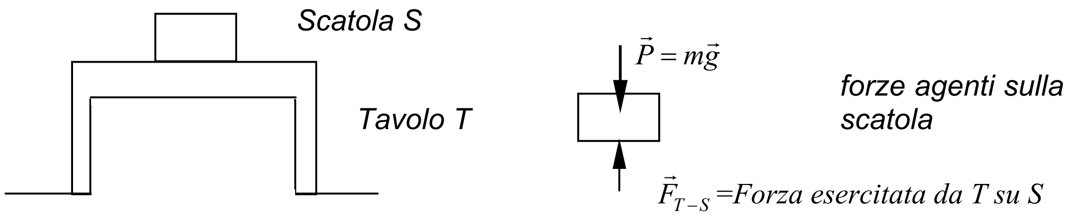
I tre principi fondamentali della meccanica newtoniana
Il più semplice corpo che può essere concepito è costituito da un punto geometrico dotato di massa (punto materiale). Analizzando il suo comportamento si può evidenziare che:
1) un punto materiale permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se non agisce su di esso una qualche causa esterna.
2) se la forza non è nulla, il punto materiale subirà un'accelerazione proporzionale alla forza stessa e inversamente proporzionale alla massa
$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$
3) principio di azione e reazione: ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria, cioè se il corpo A esercita una forza $\vec{F}$ su B allora il corpo B esercita una forza $-\vec{F}$ su A e $\vec{F}_{AB}$ e $\vec{F}_{BA}$ giacciono sulla stessa retta. Esse sono dunque sempre presenti contemporaneamente ma agiscono su corpi diversi e quindi hanno effetti diversi. Si applica sia a forze agenti per contatto che a forze agenti a distanza. Come esempio si consideri il caso dell'attrazione gravitazionale:



$$\vec{F}_{T-C} = m_C \vec{g} = -\vec{F}_{C-T}$$

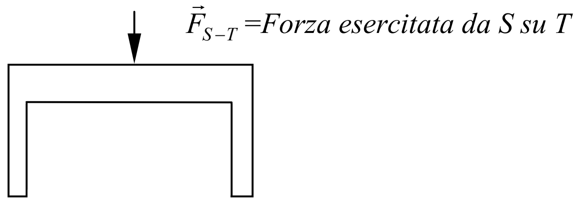
$$\frac{F_{C-T}}{m_T} = \frac{m_C}{m_T} g \cong 0$$

L’accelerazione prodotta sul corpo è molto maggiore dell’accelerazione della terra (trascurabile). Se il corpo in questione è però la luna, i suoi effetti diventano evidenti (maree).
Nel caso di forze di contatto si consideri il seguente esempio:



L’evidenza sperimentale suggerisce, essendo la scatola in equilibrio, il seguente bilancio di forze:
(1° principio) $$\vec{P} + \vec{F}_{T-S} = 0 \qquad (1)$$

Per il 3° principio l’azione del tavolo sulla scatola e l’azione della scatola sul tavolo soddisfano alla:
$$\vec{F}_{S-T} + \vec{F}_{T-S} = 0 \qquad (2)$$



Si noti la differenza tra le equazioni (1) e (2); la (2) è sempre valida, mentre la (1) non vale più se il tavolo cede, cioè se la scatola accelera, in quanto bisogna tenere conto, nell’equilibrio, della forza d’inerzia. Si pensi alla misura del peso con una comune bilancia: la lettura si effettua quando lo strumento si è assestato (immobile).
I problemi di statica vengono risolti mediante l’applicazione delle equazioni di equilibrio statico e l’utilizzo del 3° principio.

Competenze matematiche necessarie
Per poter affrontare i problemi di statica e di resistenza dei materiali lo studente dovrà conoscere le basi dell’algebra, della geometria, della trigonometria e del calcolo differenziale e integrale. Dovrà cioè essere in grado di effettuare semplici calcoli algebrici, applicare la legge dei seni e dei coseni, conoscere le tecniche per la discussione e risoluzione dei sistemi di equazioni lineari, calcolare derivate e integrali di funzioni semplici e elementari sviluppi in serie di Taylor.

Regole per calcoli numerici

a) unità di misura: bisogna esprimere ogni termine nelle equazioni in unità di misura omogenee (disattenzione a questo riguardo può comportare errori nei risultati di diversi ordini di grandezza)
b) approssimazione: quando si effettuano calcoli necessariamente si usano numeri approssimati, quindi il risultato non può essere espresso con un numero maggiore di cifre significative o di decimali superiore a quello dei dati di partenza; la maggior parte dei problemi pratici tollera un errore relativo del percento.

Richiami di algebra vettoriale

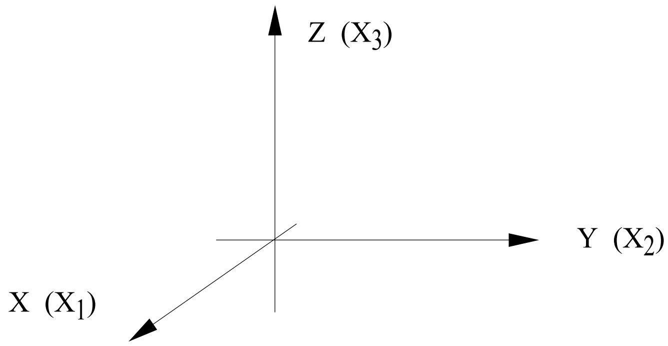
La forza è una grandezza vettoriale caratterizzata da intensità, direzione, verso e punto di applicazione e viene indicata con la seguente notazione:

$$\vec{F}$$

Graficamente la forza si disegna come un segmento orientato, cioè una freccia avente lunghezza, rappresentata con una scala prefissata, proporzionale all'intensità , applicato ad un determinato punto.

Utilità del formalismo algebrico dei vettori
La rappresentazione cartesiana è comoda per operare con le grandezze fisiche caratterizzate da intensità, direzione e verso come ad esempio spostamento, velocità, accelerazione, forza, ecc. Nel presente corso il sistema di riferimento è sempre assunto come una terna cartesiana in cui:

1) gli assi sono ortogonali
2) le unità di misura sono uguali
3) gli orientamenti sono fissati mediante la regola della mano destra (pollice=asse X, indice=asse Y, medio=asse Z)



Il verso di rotazione positivo è assunto antiorario. Un vettore si esprime allora con una sequenza ordinata delle sue componenti. Nel piano si avrà una coppia ordinata di componenti $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \end{pmatrix}$ e nello spazio una terna ordinata $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix}$. Nella notazione i pedici possono essere x,y,z oppure 1,2,3.
Il modulo di un vettore si calcola nel seguente modo:

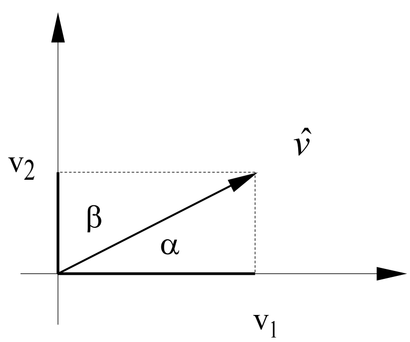
$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

La direzione e verso di un vettore è espressa dal corrispondente vettore unitario, o versore, definito mediante un procedimento di normalizzazione,

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \begin{pmatrix} \frac{u_x}{|\vec{u}|} & \frac{u_y}{|\vec{u}|} & \frac{u_z}{|\vec{u}|} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\vec{u} = |\vec{u}|\hat{u}$$



Le componenti di un versore sono per definizione i coseni direttori, cioè i coseni degli angoli che il versore forma con gli assi cartesiani. Nel piano ad esempio, un generico versore ha per componenti:

$$v_1 = |\hat{v}|\cos\alpha = \cos\alpha$$

$$v_2 = |\hat{v}|\cos\beta = \cos\beta$$

I versori degli assi cartesiani sono vettori di modulo unitario diretti come gli assi stessi. Nel caso spaziale essi sono espressi come:

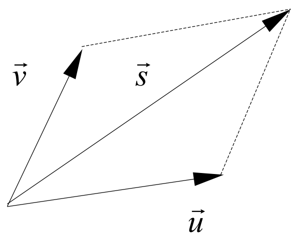
$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il vettore generico può quindi essere espresso come somma vettoriale delle sue componenti

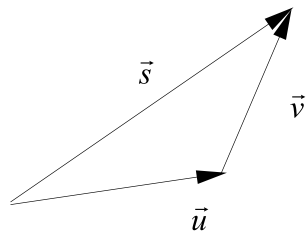
$$\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}$$

Operazioni sui vettori

1) *Somma*. E' differente rispetto alla somma degli scalari: infatti la regola del parallelogramma afferma che graficamente la somma di due vettori è pari alla diagonale del parallelogramma con lati ottenuti con i vettori addendi. Nel caso di più vettori la risultante si ottiene con la poligonale, cioè una linea spezzata formata dai vettori disposti in sequenza.



-a-



-b-

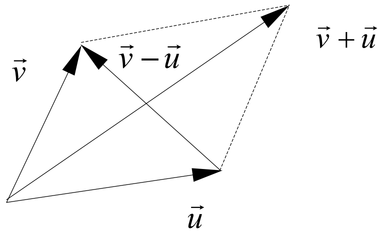
Il vettore risultante può essere determinato, in modulo e direzione, mediante calcoli trigonometrici (applicazione del teorema di Carnot e dei seni). In componenti cartesiane la somma di due vettori si esprime semplicemente come:

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{pmatrix}$$

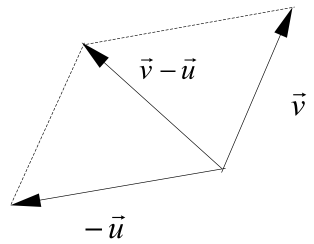
La somma vettoriale è commutativa e quindi è indifferente l'ordine con cui vengono sommati due o più vettori.

2) *Differenza*. Si riconduce al caso di somma con vettore opposto. Il vettore opposto di u è –u:

$$\vec{d} = \vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$$



-a-

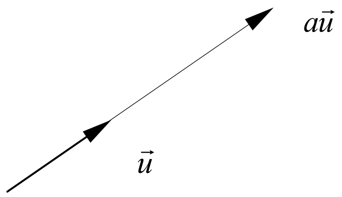


-b-

Espressa in componenti risulta:

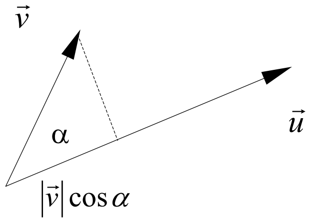
$$\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x - u_x \\ v_y - u_y \end{pmatrix}$$

3) Prodotto di uno scalare per un vettore. Il prodotto di un vettore $\vec{u}$ per uno scalare *a* dà come risultato un vettore avente la stessa direzione di $\vec{u}$, modulo pari al prodotto del modulo di $\vec{u}$ per *a* e verso concorde o discorde se *a* è positivo o negativo.



$$a \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} au_x \\ au_y \end{pmatrix}$$

4) Prodotto scalare tra due vettori. Si definisce prodotto scalare di due vettori uno scalare dato dal prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo formato dai vettori stessi. Si può interpretare come il prodotto del modulo del primo vettore per la proiezione del secondo sul primo. Esso è positivo, nullo o negativo se l'angolo formato dai due vettori è rispettivamente acuto, retto o ottuso.



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$$

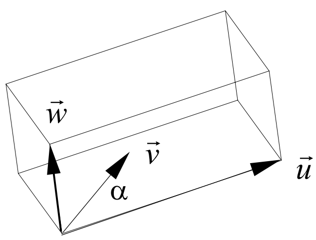
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = (u_x, u_y, u_z) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Supponiamo di prendere un sistema cartesiano in modo che il piano XY sia quello su cui giacciono i due vettori e che l'asse X sia orientato come $\vec{u}$, è facile verificare che il prodotto scalare risulta $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x$

Il prodotto scalare è commutativo e distributivo:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \qquad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

5) Prodotto vettoriale. Si definisce prodotto vettoriale $\vec{w}$ di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, il vettore che ha come modulo il prodotto dei moduli per il seno dell'angolo compreso, come direzione quella normale al piano individuato dai due vettori e verso dato dalla regola della mano destra.



$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

$$|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}| sin\alpha$$

Il vettore $\vec{w}$ può essere ottenuto formalmente mediante il calcolo del seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{i}(u_y v_z - v_y u_z) + \hat{j}(u_z v_x - v_z u_x) + \hat{k}(u_x v_y - v_x u_y)$$

Supponiamo di prendere un sistema cartesiano in modo che il piano XY sia quello su cui giacciono i due vettori e che l'asse X sia orientato come $\vec{u}$, è facile verificare che

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ |\vec{u}| & 0 & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = |\vec{u}| v_y \vec{k} = |\vec{u}||\vec{v}| sin\alpha \vec{k}$$

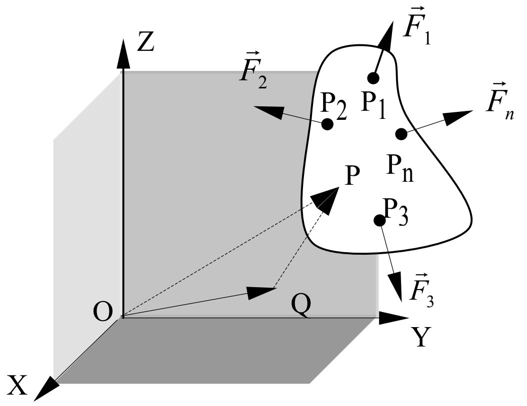
Il prodotto vettoriale è anticommutativo ed è nullo nel caso di vettori paralleli.

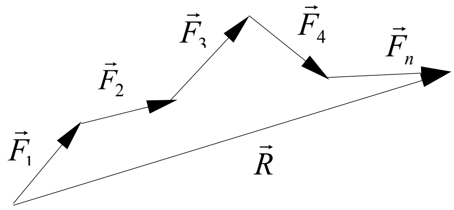
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

E' distributivo $\quad \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Forze come vettori

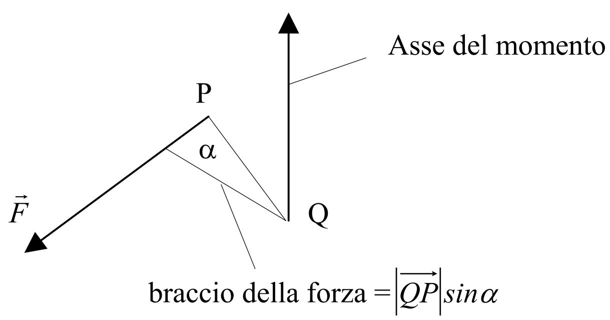
Consideriamo un corpo su cui agisce un insieme o sistema di forze. Si definisce risultante la somma vettoriale o poligonale delle forze: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_n$





Sia $\overrightarrow{OP}$ il vettore posizione del punto P, ad esempio il punto di applicazione della forza generica.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} x_p - x_q \\ y_p - y_q \\ z_p - z_q \end{pmatrix}$$



Consideriamo un punto Q qualunque dello spazio. Si definisce momento di una generica forza $\vec{F}_i$ applicata nel punto P_i rispetto al polo Q, o meglio rispetto all'asse per Q perpendicolare al piano contenente Q e la forza, il vettore

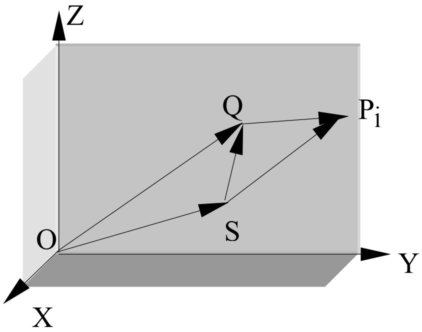
$$\vec{M}_{iQ} = \overrightarrow{QP}_i \wedge \vec{F}_i$$

Il momento misura la tendenza della forza a far ruotare il corpo a cui è applicata intorno ad un punto o ad un asse, con

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{F}\right|\left|\overrightarrow{QP}\right| sin\alpha = \left|\vec{F}\right| \cdot braccio$$

Il braccio è la distanza tra la retta d'azione della forza e l'asse. Il verso del momento è dato dal pollice della mano destra quando le dita sono piegate nella direzione della rotazione prodotta dalla forza. Nel sistema S.I. [M] = [N] [m] o sottomultiplo [M] = [N] [mm]. L'unità Nm rappresenta il momento prodotto da una forza di 1 N con un braccio di 1 m.

In generale $\vec{M}_i$ dipende dalla scelta del polo, infatti rispetto ad un altro polo S è:



$$\vec{M}_{iS} = \overrightarrow{SP}_i \wedge \vec{F}_i$$

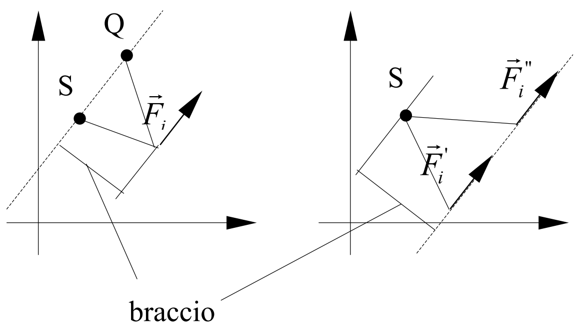
Ma vale anche

$$\overrightarrow{SP}_i = \overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QP}_i$$

$$\vec{M}_{i,S} = \left(\overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QP}_i \right) \wedge \vec{F}_i =$$

$$= \overrightarrow{SQ} \wedge \vec{F}_i + \overrightarrow{QP}_i \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{i,S} = \vec{M}_{i,Q} + \overrightarrow{SQ} \wedge \vec{F}_i$$



Si nota che il vettore momento è invariato se $\overrightarrow{SQ}$ è parallelo a $\vec{F}_i$ perché il secondo termine è pari a zero. Quindi il momento di una forza è lo stesso per tutti i punti di una retta parallela al vettore stesso. Lo spostamento quindi di una forza lungo la sua retta d'azione non modifica il suo momento rispetto a qualunque polo. Il **principio di trasmissibilità** afferma che forze equivalenti hanno stesso modulo, direzione, verso e retta d'azione anche su punti di applicazione diversi.

Dicesi momento risultante rispetto al polo Q la somma vettoriale dei momenti rispetto al medesimo polo,

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i,Q}$$

Teorema di Varignon

Il momento di una forza rispetto ad un punto è uguale alla somma dei momenti delle componenti della forza rispetto allo stesso punto. La dimostrazione deriva dalla proprietà distributiva del prodotto vettoriale. Infatti data una forza applicata al punto P di componenti:

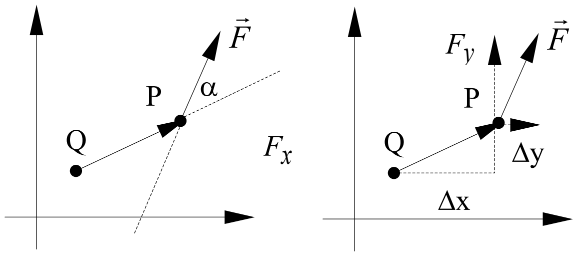
$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

si ha che

$\vec{M}_Q = \overrightarrow{QP} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{QP} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \overrightarrow{QP} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{F}_2 = \vec{M}_{Q1} + \vec{M}_{Q2}$

Questo concetto ha importanti applicazioni perché è spesso più semplice determinare i momenti delle componenti di una forza piuttosto che il momento della forza stessa.

Nel caso piano, cioè sia $\overrightarrow{QP}$ che $\vec{F}$ appartengano al piano

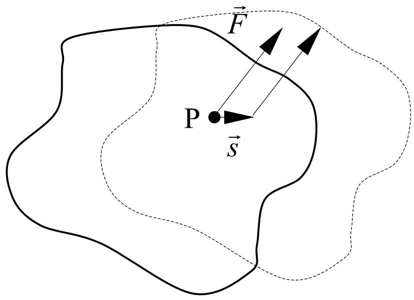


$$\vec{M}_Q = \overrightarrow{QP} \wedge \vec{F} = \left|\overrightarrow{QP}\right|\left|\vec{F}\right| sin\alpha \cdot \hat{k}$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \Delta x & \Delta y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \left(\Delta x F_y - \Delta y F_x\right)\hat{k}$$

Lavoro di una forza

Se il punto P su cui agisce una forza costante $\vec{F}$ subisce uno spostamento $\vec{s}$, si dice che $\vec{F}$ compie un lavoro definito da:

$L = \vec{F} \cdot \vec{s}$ (grandezza scalare).



Nel caso di forza variabile, si divide $\vec{s}$ in sottointervalli in modo che su ognuno la $\vec{F}$ possa ritenersi costante. Si ha in questo caso:

$$L \cong \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i$$

Al limite la relazione esatta risulta:

$$L = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

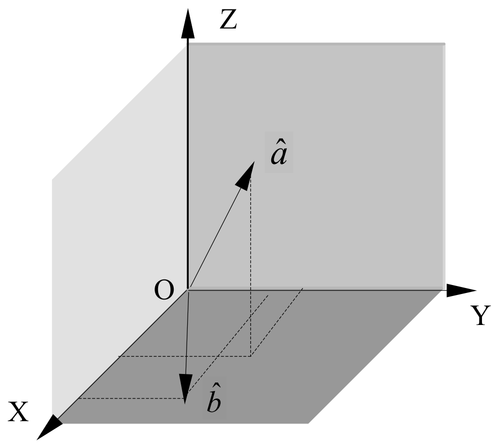
A seconda che la forza formi con lo spostamento un angolo acuto, retto, ottuso il lavoro sarà rispettivamente positivo, nullo o negativo. Nel sistema S.I. si ha che [L] = [N] [m] = [J].

Es.1

Siano dati 2 versori $\hat{a}$ e $\hat{b}$ applicati all'origine degli assi: $\hat{a}$ è la trisettrice del primo ottante, $\hat{b}$ giace sul primo quadrante del piano XY e forma un angolo di 30° con l'asse X.
Determinare:
1) le componenti cartesiane dei due versori;
2) la somma vettoriale dei due versori;
3) il loro prodotto scalare, il loro prodotto vettoriale e il modulo di quest'ultimo;
4) l'angolo formato dai due versori;
5) i due versori ad essi perpendicolari.

1) Si considera dapprima un vettore ausiliario diretto come $\hat{a}$ (equidistante dai tre assi)

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$



Se ne calcola il modulo:

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Si determina allora il versore corrispondente:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix}0.577\\0.577\\0.577\end{pmatrix}$$

il cui modulo è appunto $|\hat{a}| = 1$.

Per quanto riguarda il secondo versore, il problema è più semplice perché, noto l'angolo che forma con gli assi, si possono calcolare subito i coseni direttori.

$$\hat{b} = \begin{pmatrix}\cos(30°)\\ \mathrm{sen}(30°)\\ 0\end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix}0.866\\0.500\\0.000\end{pmatrix}$$

2) La somma dei due vettori, data dalla somma delle componenti, risulta:

$$\hat{a} + \hat{b} \cong \begin{pmatrix}1.443\\1.077\\0.577\end{pmatrix}$$

3) Il prodotto scalare risulta:

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.789$$

Il prodotto vettoriale

$$\hat{a} \wedge \hat{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0.577 & 0.577 & 0.577\\ 0.866 & 0.500 & 0.000\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-0.289\\0.500\\-0.211\end{pmatrix}$$

Il suo modulo

$$|\hat{a} \wedge \hat{b}| = 0.615$$

4) Dalla definizione di prodotto vettoriale si può ricavare l'angolo α formato dai due versori,

$$\alpha = \text{arcsen}\frac{\left|\hat{a} \wedge \hat{b}\right|}{|\hat{a}||\hat{b}|} = 38°$$

Tale angolo può essere anche ricavato dalla definizione di prodotto scalare

$$\alpha = \arccos\frac{\hat{a} \cdot \hat{b}}{|\hat{a}||\hat{b}|} = 38°$$

5) Dalla definizione di prodotto vettoriale, il cui risultato è un vettore perpendicolare ai due vettori di partenza, si ottiene il versore

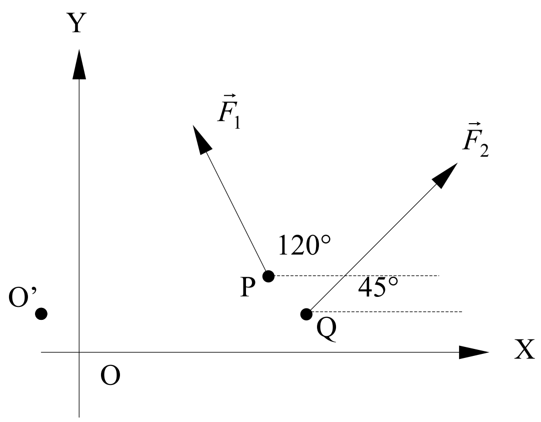
$$\hat{c} = \frac{\hat{a} \wedge \hat{b}}{\left|\hat{a} \wedge \hat{b}\right|} = \begin{pmatrix} -0.470 \\ 0.813 \\ -0.343 \end{pmatrix}$$

L'altro versore perpendicolare ai due versori è naturalmente $-\hat{c}$, che ha verso opposto.

Es.2

In un sistema di riferimento cartesiano piano, sono date due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ agenti rispettivamente nei punti *P* e *Q* di coordinate (5 m, 2 m) e (6 m, 1 m). Le forze hanno rispettivamente intensità di 300 N e 400 N e formano con l'asse X angoli di 120° e 45°. Valutare:

1) la risultante $\vec{R}$ delle forze ed il suo modulo;
2) i momenti $\vec{M}_1$ e $\vec{M}_2$ delle forze rispetto all'origine e il momento risultante $\vec{M}$;
3) il momento risultante rispetto al polo *O'* di coordinate (-1,1);
4) la posizione S in cui dovrebbe essere applicata una forza pari a $\vec{R}$ perché il prodotto vettoriale $\overrightarrow{OS} \times \vec{R}$ sia uguale a $\vec{M}$.



1) Noti gli angoli che le rette d'azione delle forze formano con gli assi, si possono calcolare i coseni direttori e quindi, noti i moduli, le componenti delle forze (in N)

$$\vec{F}_1 = 300\begin{pmatrix} \cos(120°) \\ \text{sen}(120°) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -150.0 \\ 259.8 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_1 = 400\begin{pmatrix} \cos(45°) \\ \text{sen}(45°) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 282.8 \\ 282.8 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

e quindi la loro risultante e il corrispondente modulo:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 132.8 \\ 542.6 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{R}\right| = 558.6$$

2) I momenti delle due forze rispetto all'origine (in Nm), e il corrispondente momento risultante, risultano:

$$\vec{M}_{O1} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 2 & 0 \\ -150.0 & 259.8 & 0.0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.6 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_{O2} = \overrightarrow{OQ} \wedge \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 1 & 0 \\ 282.8 & 282.8 & 0.0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.4 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{O1} + \vec{M}_{O2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.0 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

3) Il momento risultante rispetto al nuovo polo O' è

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}_2 =$$

$$= \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.0 \cdot 10^3 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 132.8 & 542.6 & 0.0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.7 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

4) Imponendo l'uguaglianza al momento risultante rispetto ad *O* del prodotto vettoriale indicato, si ha:

$$\overrightarrow{OS} \wedge \vec{R} = \vec{M}_O$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_S & y_S & 0 \\ R_x & R_y & 0.0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \end{pmatrix}$$

da cui si ricavano le coordinate incognite del punto S

$$x_S R_y - y_S R_x = M_z$$

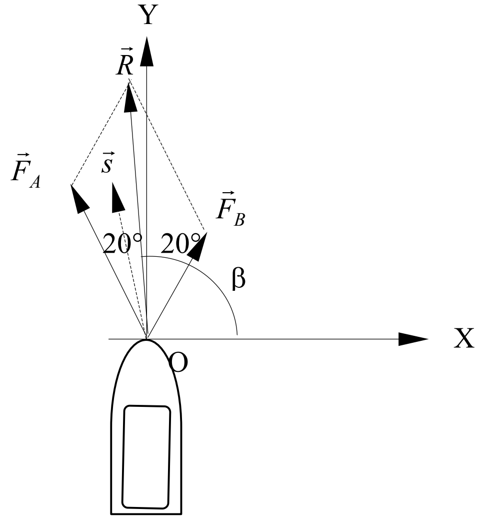
$$y = 4.1x - 27.9$$

Si ottiene *l'equazione della retta di azione della risultante che ha rispetto al polo prescelto momento pari al momento risultante*. Tale retta è il cosiddetto **asse centrale** dei vettori.

Es.3

Due rimorchiatori A e B tirano una nave con delle funi che formano ognuna un angolo di 20° rispetto all'asse della nave stessa.

1) Sapendo che la forza esercitata da A è 1.5 volte maggiore di quella di B, valutare la direzione in cui viene spinta la nave.
2) Se la nave subisce uno spostamento di 2 m verso sinistra e 10 m in avanti, quale lavoro compiono le due navi?
3) In quale direzione dovrebbe spingere B se si vuole che la risultante abbia la direzione dell'asse della nave?



1) Considerando i moduli delle due forze, di cui si conosce il rapporto, come funzioni dell'incognita F

$$\left|\vec{F}_A\right| = 1.5F \qquad \left|\vec{F}_A\right| = 1.0F$$

si possono scrivere i due vettori

$$\vec{F}_A = 1.5F\begin{pmatrix}\cos(110°)\\ \text{sen}(110°)\end{pmatrix} \qquad \vec{F}_B = 1.0F\begin{pmatrix}\cos(70°)\\ \text{sen}(70°)\end{pmatrix}$$

e quindi la risultante

$$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = F\begin{pmatrix}-0.171\\ 2.349\end{pmatrix}$$

il cui modulo è

$$\left|\vec{R}\right| = 2.355F$$

A questo punto è semplice determinare la direzione della risultante, individuata dall'angolo

$$\beta = \arccos\left(\frac{R_x}{\left|\vec{R}\right|}\right) = \arccos\left(\frac{-0.171}{2.355}\right) = 94°$$

2) Dato lo spostamento

$$\vec{s} = \begin{pmatrix}-2.0\\ 10.0\end{pmatrix}$$

Il lavoro delle forze è subito calcolato:

$$L_A = \vec{F}_A \cdot \vec{s} = 15.1F$$
$$L_B = \vec{F}_B \cdot \vec{s} = 8.7F$$
$$L_{tot} = L_A + L_B = \vec{R} \cdot \vec{s} = 23.8F$$

3) Data invece la direzione della risultante come

$$\overline{\beta} = \arccos\left(\frac{R_x}{\left|\vec{R}\right|}\right) = 90°$$

ed esprimendo la componente R_x come somma delle componenti delle due forze, si ha

$$R_x = 1.5F\cos(110°) + F\cos\left(\overline{\alpha}_B\right) = 0$$

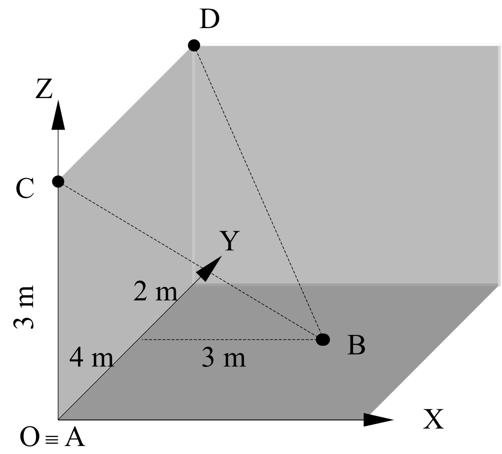
e quindi l'angolo che la forza $\vec{F}_B$ forma con l'asse X risulta

$$\overline{\alpha}_B = \arccos\left(-1.5\cos(110°)\right) = 59°$$

Es.4

Due mezzi di soccorso C e D stanno effettuando la rimozione di una macchina B caduta in una scarpata. Nella figura sono rappresentate le posizioni dei due mezzi.

1) Nell'ipotesi che le forze esercitate dagli argani di sollevamento siano le stesse (6000 N), valutare la risultante applicata alla vettura B, l'angolo che questa forma con la verticale e il momento risultante rispetto al punto A.
2) Se all'inizio del sollevamento la macchina subisce uno spostamento di 5 cm sul piano orizzontale, perpendicolarmente al ciglio della scarpata CD, quale lavoro compiono le due forze?
3) Volendo che la risultante giaccia su un piano perpendicolare al ciglio, quale dovrebbe essere la forza esercitata da ciascuno dei due mezzi?



1) Si determinano innanzi tutto i vettori posizione, in m, per arrivare a definire le direzioni delle forze applicate, che sono dirette come $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$.

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si calcolano i versori corrispondenti:

$$\hat{c} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \begin{pmatrix} -0.514 \\ -0.686 \\ 0.514 \end{pmatrix} \qquad \hat{d} = \frac{\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \begin{pmatrix} -0.640 \\ 0.426 \\ 0.640 \end{pmatrix}$$

Noto quindi il modulo delle forze, $F = 6000\,\text{N}$, e le direzioni, definite dai versori, si può calcolare la risultante, in N,

$$\vec{R} = F\hat{c} + F\hat{d} = F\vec{r} = 6000\begin{pmatrix} -1.154 \\ -0.260 \\ 1.154 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6.924 \cdot 10^3 \\ -1.560 \cdot 10^3 \\ 6.924 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

L'angolo che questa forma con la verticale è ricavabile dal coseno direttore corrispondente, cioè dalla componente verticale del versore $\hat{r}$,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{r_z}{|\vec{r}|}\right) = 46°$$

Il momento risultante rispetto ad O è, in Nm,

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{R} = \begin{pmatrix} 2.77 \cdot 10^4 \\ -2.08 \cdot 10^4 \\ 2.30 \cdot 10^4 \end{pmatrix}$$

2) Dato lo spostamento, in m,

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -0.05 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

il lavoro complessivo delle due forze è

$$L_{tot} = \vec{R} \cdot \vec{s} = R_x \cdot s_x = 346.2\,J$$

3) Se si vuole che la risultante giaccia su un piano parallelo a XZ, la sua componente R_y deve essere nulla, quindi

$$R_y = F_C c_y + F_D d_y = 0$$

e

$$\frac{F_D}{F_C} = -\frac{c_y}{d_y} = 1.61$$