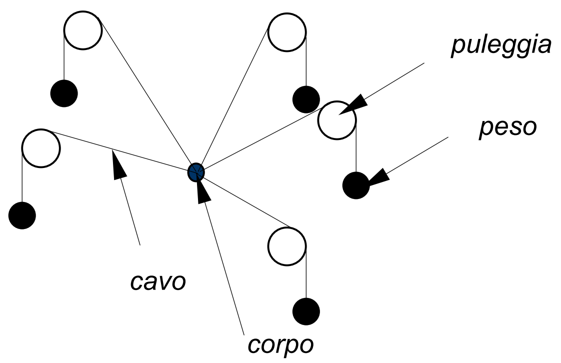
CAP.2

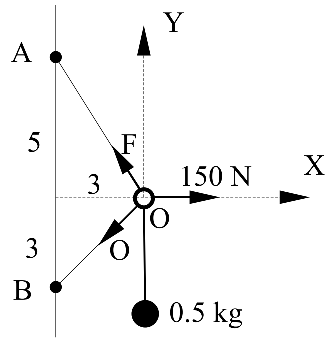
Statica del punto materiale

Si definisce punto materiale un corpo per il quale le dimensioni possono ritenersi trascurabili rispetto alle altre dimensioni del problema in esame e tutte le forze agenti possono assumersi aventi lo stesso punto di applicazione. E' un concetto fisico astratto perché si associa ad un punto (privo di estensione) una massa finita che invece presuppone un corpo esteso. E' importante soffermarsi sul fatto che le dimensioni assolute non sono importanti per cui uno stesso oggetto può essere considerato un punto materiale in certi contesti e un sistema più complesso in altri. Ad esempio la Terra può essere considerata sia come un punto nella sua orbita attorno al sole che come sistema di punti se considerata nella sua rotazione o se ci si riferisce a fenomeni geologici.
Vediamo quali effetti producono più forze agenti su un punto materiale. Un esempio di come si potrebbe realizzare un'esperienza di questo tipo è rappresentato schematicamente in figura, con un corpo (puntiforme) collegato a vari cavi sostenuti da carrucole e mantenuti in trazione con dei pesi. Il cavo funge da elemento che permette la trasmissione della forza di trazione mantenendola inalterata mentre la puleggia ideale (senza attrito) è un elemento che consente di modificare esclusivamente la direzione del cavo e quindi del carico. Variando pesi e posizioni delle carrucole è possibile riprodurre l'effetto di svariati sistemi di forze sul corpo.



L'evidenza sperimentale suggerisce che se un sistema di forze ha $\vec{R}=0$ il corpo si comporta come se su di esso non agisse alcuna forza, cioè è in equilibrio. Si noti che è implicitamente anche $\vec{M}=0$ per qualunque polo si scelga, essendo tutte le forze applicate allo stesso punto materiale. Il calcolo dei momenti è pertanto irrilevante nella valutazione dell'equilibrio dei punti materiali.

Es.1
Un corpo avente massa di 0.5 kg è sostenuto tramite un sistema di due funi (rappresentato nello schema a fianco), collegate ad un anello, a cui è applicata una forza orizzontale di 150N. Le distanze riportate sono espresse in m.
1)Valutare la trazione delle funi.
2) Cosa si potrebbe dire se la massa da sostenere fosse di 30 kg?



In questo caso è **assegnata la configurazione**, e bisogna **determinare la forza per mantenere l'equilibrio**. Partendo dal presupposto che l'anello sia un punto materiale, si ragiona così:

1) Si isola una parte significativa di struttura (nell'esempio l'anello, punto di applicazione del carico esterno)
2) Si definisce un sistema di riferimento

3) Si scompongono le forze (determinazione delle componenti)
4) Il corpo è in equilibrio $\rightarrow \vec{R} = 0$
5) Si risolvono le equazioni di equilibrio

Si considera l'equilibrio dell'anello sotto l'azione della forza orizzontale, del peso e delle reazioni incognite delle funi

$$F\hat{f} + Q\hat{q} = -\begin{pmatrix} 150.0 \\ 0.5 \cdot 9.8 \end{pmatrix}$$

Si individuano i versori delle forze di trazione delle funi

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_A}{|OA|} \\ \dfrac{y_A}{|OA|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.514 \\ 0.857 \end{pmatrix} \qquad \hat{q} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_B}{|OB|} \\ \dfrac{y_B}{|OB|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.707 \\ -0.707 \end{pmatrix}$$

Si riscrive l'equazione di equilibrio in termini di componenti delle forze

$$\begin{cases} -0.514F - 0.707Q = -150.0 \\ 0 - 857F - 0.707Q = 4.9 \end{cases}$$

Si risolve il sistema:

$$F = 113.0 \qquad Q = 130.0$$

Cambiando il valore del carico esterno verticale, si ottiene

$$F\hat{f} + Q\hat{q} = -\begin{pmatrix} 150.0 \\ 30 \cdot 9.8 \end{pmatrix}$$

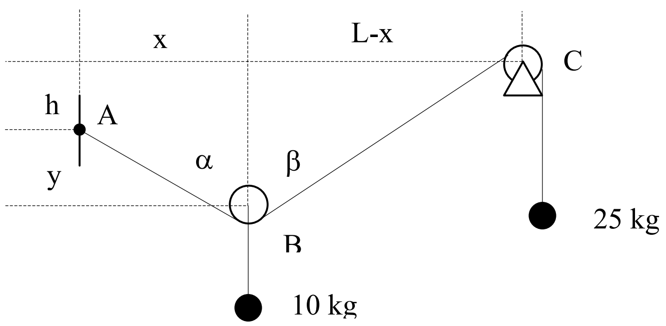
Ripetendo il calcolo si ottiene

$$F = 324.1 \qquad Q = -23.4$$

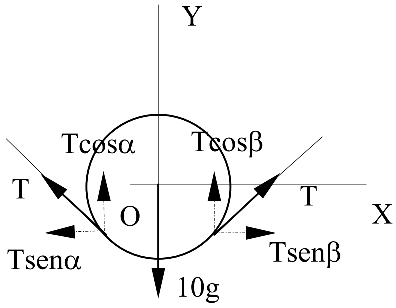
Si nota che il valore di Q ottenuto è inaccettabile perché negativo e la fune non può esercitare una forza di compressione. Quindi nelle condizioni indicate la struttura di sostegno non è in grado di mantenere l'equilibrio.

Es.2
Con lo schema di carrucole riportato in figura si vuole sorreggere un corpo avente massa di 10 kg tramite un contrappeso avente massa di 25 kg.
Data la posizione relativa di A e C (noti h e L), determinare la posizione della puleggia all'equilibrio (α e β, x e y) e la reazione del supporto sulla puleggia fissa.

In questo caso sono **assegnate le forze** e bisogna **determinare la configurazione di equilibrio**.
Partendo dal presupposto che si tratta di un punto materiale, si ragiona come sopra.



Si considera l'equilibrio della puleggia mobile, isolandola dal resto, e si esaminano le forze che agiscono su di essa: la forza peso e la trazione nei due rami di fune. Scelto un sistema di riferimento comodo, si scrivono le equazioni di equilibrio alla traslazione:



$$\begin{cases} -T sin\alpha + T sin\beta = 0 \\ T\cos\alpha + T\cos\beta - 10g = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ 2T\cos\alpha = 10g \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{10g}{50g} \qquad \alpha = \beta = 78.5°$$

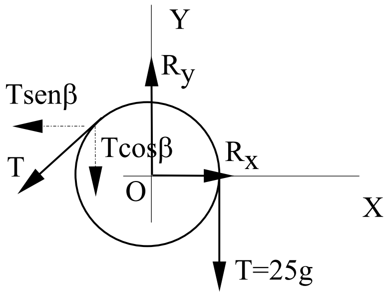
Quindi

$$\begin{cases} x = y\tan\alpha \\ L - x = (h + y)\tan\alpha \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = \dfrac{L - h\tan\alpha}{2} \\ y = \dfrac{L - h\tan\alpha}{2\tan\alpha} \end{cases}$$

Si considera ora l'equilibrio della puleggia fissa, isolandola dal resto e si esaminano le forze che agiscono su di essa: la trazione nei due rami di fune e la reazione del supporto (R_x, R_y). Scelto un sistema di riferimento comodo, si scrivono le equazioni di equilibrio alla traslazione:



$$\begin{cases} R_x = T sin\alpha = 240N \\ R_y = T\cos\alpha + T = 294N \end{cases}$$

Es.3

Si vuole sospendere al soffitto un lampadario utilizzando tre ganci esistenti disposti su una circonferenza di diametro 0.4 m con l'angolazione indicata. Le funi di sospensione sono lunghe 90 cm. Dopo aver determinato la posizione dell'attacco del lampadario, valutare la tensione nelle tre funi sapendo che la massa del lampadario è di 8 kg.

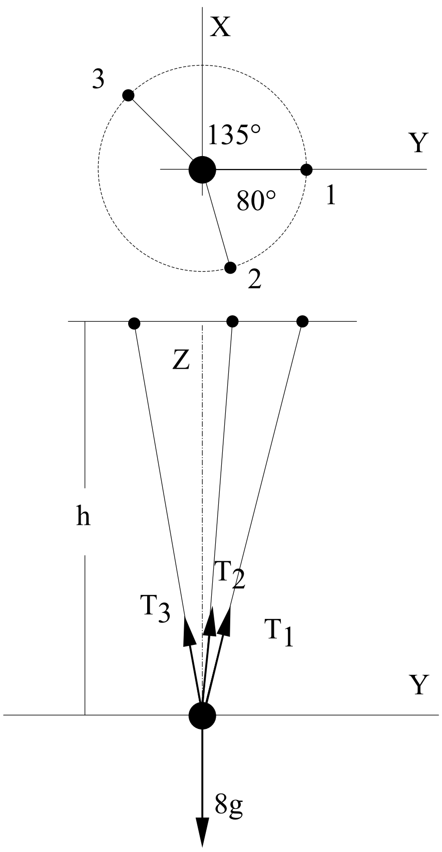
Si tratta di un problema di **statica nello spazio** per il quale è utile l'algebra vettoriale.
Il procedimento è analogo a quello dei problemi precedenti, salvo alcuni accorgimenti.

1) Si calcolano i coseni direttori delle direzioni dei fili secondo un sistema di riferimento comodo;
2) si scompongono le forze di tensione e si risolve il sistema di equazioni di equilibrio avendo come incognite i moduli delle tensioni T_1, T_2 e T_3.

Facendo riferimento alla figura riportata, per il calcolo dei coseni direttori, si determinano innanzi tutto le lunghezze dei cavi con il teorema di Pitagora.

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = 87.75\,\text{cm}$$

I coseni direttori risultano quindi:



$$t_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ r/l \\ h/l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.222 \\ 0.975 \end{pmatrix}$$

$$\hat{t}_2 = \begin{pmatrix} r\,\mathrm{sen}(80°)/l \\ r\cos(80°)/l \\ h/l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.219 \\ 0.039 \\ 0.975 \end{pmatrix}$$

$$\hat{t}_3 = \begin{pmatrix} r\,\mathrm{sen}(135°)/l \\ r\cos(135°)/l \\ h/l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.157 \\ -0.157 \\ 0.975 \end{pmatrix}$$

L'equazione di equilibrio del lampadario in forma vettoriale è:

$$T_1\hat{t}_1 + T_2\hat{t}_2 + T_3\hat{t}_3 = 8 \cdot 9.8\hat{k}$$

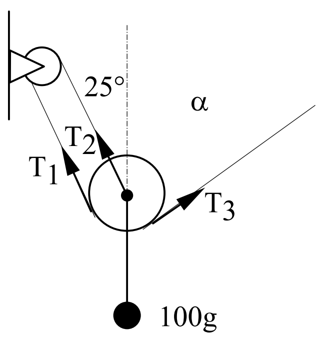
$$\begin{pmatrix} 0 & -0.219 & 0.157 \\ 0.222 & 0.039 & -0.157 \\ 0.975 & 0.975 & 0.975 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \cdot 9.8 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene il vettore delle incognite T_1, T_2 e T_3

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 20.4 \\ 25.1 \\ 35.0 \end{pmatrix}$$

Es.4

Il sistema di carrucole mostrato in figura serve a sostenere un oggetto di massa pari a 100 kg. Se si vuole che l'inclinazione dei cavi a sinistra rispetto alla verticale sia di 25°, valutare l'angolo α e l'intensità della forza che deve essere esercitata sul ramo di destra.



Si tratta di un problema **misto**. Per l'assenza d'attrito nelle carrucole $T_1=T_2=T_3=T$

Per l'equilibrio alla traslazione della carrucola mobile:

$$\begin{cases} 2T\cos(25°) + T\cos\alpha - 100g = 0 \\ -2T\,\mathrm{sen}(25°) + T\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{sen}\,\alpha = 2\,\mathrm{sen}(25°)$$

Quindi

$$\alpha = 58°$$
$$T = 418N$$

Da notare che si ha:

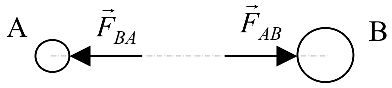
$$T = \frac{W}{2\cos\beta + \cos\alpha} \cong \frac{1}{2}W$$

Come si potrebbe ridurre tale tensione? Aumentando gli avvolgimenti e riducendo α.

Statica del corpo rigido

Il modello di punto materiale si dimostra talvolta inadeguato a descrivere il comportamento dei corpi ed è necessario introdurre modelli più complessi, come ad esempio il modello di corpo rigido (particolare insieme di punti materiali).
Nell'analisi statica dei sistemi di punti materiali si è soliti distinguere le forze in interne ed esterne. Le prime che tengono in conto dell'azione di punti su altri punti del sistema non esistono nel caso di punto materiale; nell'ambito del corpo rigido esse tengono uniti i punti materiali che compongono il corpo. Le seconde sono la causa del comportamento esterno del corpo e sono esercitate dal contatto di altri corpi o da azioni a distanza (forze gravitazionali o elettromagnetiche).

Differenza degli effetti statici tra forze interne ed esterne
Si consideri un semplice sistema di due punti materiali: per il principio di azione-reazione $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$



Tale sistema di forze ha risultante nulla e poiché le forze agiscono sulla medesima retta d'azione è anche nullo il momento risultante per qualunque polo Q. Le forze interne non alterano le caratteristiche statiche globali ($\vec{R}$ e $\vec{M}$) delle forze agenti su un sistema di punti materiali, ma questo non vuol dire che non compiano lavoro. Si consideri l'esempio di due punti materiali collegati da una molla (sistema non rigido). In questo caso, deformandosi la molla, la distanza relativa dei due punti può variare e quindi le forze interne possono compiere lavoro.
In un sistema rigido, per definizione, le mutue distanze tra coppie di punti sono costanti. Anche questo è un modello della realtà; in effetti non esistono corpi rigidi ma soltanto corpi per cui le variazioni di forma e deformazioni dovute dall'applicazione delle forze possono essere trascurate. Un sistema di punti con il vincolo di rigidezza è detto corpo rigido. Nell'ambito dei corpi rigidi le forze interne non compiono lavoro (spostamenti nulli).

Equilibrio del corpo rigido
L'evidenza sperimentale con i corpi rigidi dimostra che per avere equilibrio devono essere soddisfatte le seguenti equazioni cardinali (condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio):

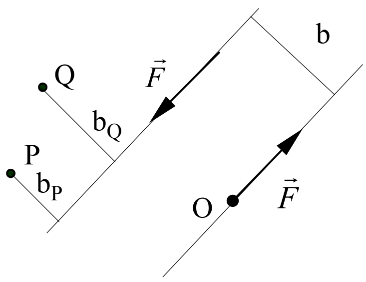
$$\vec{R} = 0 \qquad \vec{M}_Q = 0$$

cioè che sia nulla la risultante ed il momento risultante delle forze. Si potrebbe obiettare che il momento risultante è una grandezza che dipende dal polo la cui scelta è arbitraria. Si può però dimostrare che se:

$$\vec{R} = 0$$

$$\vec{M}_S = \vec{M}_Q + \overrightarrow{SQ} \wedge \vec{R} = 0$$

cioè se la risultante è nulla e il momento risultante è nullo rispetto ad un polo arbitrario, esso è nullo rispetto a qualunque polo. Più in generale si può affermare che **per un sistema a risultante nulla il momento risultante è indipendente dalla scelta del polo.**
Se si considerano due forze parallele che abbiano risultante nulla (coppia di forze), si verifica facilmente che il momento risultante ha direzione perpendicolare al piano individuato dalle rette di applicazione delle forze e intensità pari al prodotto del modulo di una di esse per la distanza tra le rette d'azione (braccio).



$$\vec{R} = 0 \qquad \vec{M} \neq 0$$

Infatti presi due poli arbitrari P e Q

$$\left|\vec{M}\right|_P = Fb_P - F(b_P + b) = F \cdot b$$

$$\left|\vec{M}\right|_Q = Fb_Q - F(b_Q + b) = F \cdot b$$

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_P$$

e quindi il momento risultante della coppia rispetto a qualsiasi polo coincide con quello calcolato rispetto ad un punto arbitrario O su una delle rette di applicazione:

$$\left|\vec{M}\right| = \vec{M}_O = F \cdot b$$

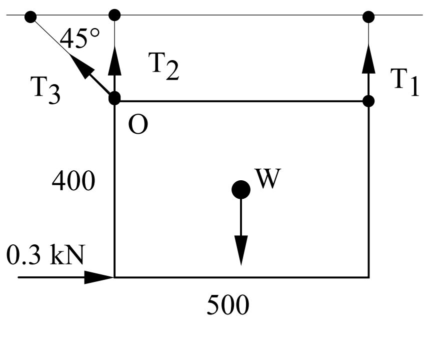
Se anche $\vec{M} = 0$, le rette d'azione coincidono, il sistema è equilibrato e viene detto coppia di braccio nullo.
Le forze interne sono, se considerate a due a due, coppie a braccio nullo.
Le proprietà di equilibrio per un corpo rigido sono quindi riconducibili alle due caratteristiche globali del sistema di forze agenti: risultante e momento risultante.
Si verifica infatti che due sistemi le cui forze risultanti e momenti risultanti soddisfino la seguente condizione:

$$\vec{R}_\Sigma = \vec{R}_{\Sigma'} \qquad\qquad \vec{M}_\Sigma = \vec{M}_{\Sigma'}$$

producono sul corpo rigido i medesimi effetti. Per questo tali sistemi si dicono **staticamente equivalenti**.
La possibilità di sostituire ad un sistema di forze un altro equivalente, senza alterare le condizioni di equilibrio del corpo stesso, è ampiamente impiegato per la soluzione dei problemi di statica.
Sulla base di queste considerazioni è possibile risolvere problemi del tipo:
assegnato un corpo rigido sollecitato mediante un generico insieme di forze Σ *determinare le caratteristiche di un sistema di forze da applicare su un suo punto qualunque P per avere l'equilibrio*.
Tale sistema di forze dovrà evidentemente avere come risultante l'opposto della risultante di Σ e come momento risultante l'opposto del momento risultante di Σ valutato rispetto al punto P.

Es.5

Una lamiera rettangolare di acciaio di spessore 80 mm, avente lati di 500 e 400 mm viene sostenuta da tre funi nel modo rappresentato in figura. Considerando una forza orizzontale pari a 0.3 kN agente sul lato inferiore, valutare la forza che le tre funi devono trasmettere per mantenere la lamiera in equilibrio.



Si calcola il peso della lamiera:

$$W = \rho \cdot V \cdot g = 7.8 kg/dm^3 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 0.8) dm^3 \cdot 9.8 m/s^2 = 1224 N$$

Si impone l'equilibrio alla traslazione ed alla rotazione (rispetto al polo O):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 500 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -300 \\ 1224 \\ 1224 \cdot 250 - 300 \cdot 400 \end{pmatrix}$$

$T_1 = 372 N$
$T_3 = 424 N$
$T_2 = 552 N$

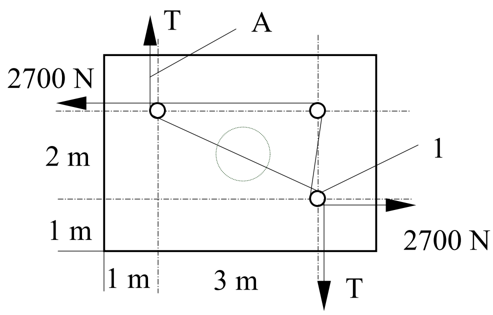
Nota: Che succede se si cambia verso alla forza esterna?

Es.6

L'elemento (rinvio) rappresentato in figura permette, tramite alcune pulegge che possono essere considerate senza attrito, di modificare la retta d'azione delle forze trasmesse dalle funi.

1) Valutare la forza che deve essere esercitata dalla fune A per mantenere l'elemento (considerato libero) in equilibrio nella configurazione adottata.

2) Valutare la forza esercitata dalle funi sul perno 1
3) Supponendo di aver fissato tale elemento ad una struttura di supporto (ad esempio tramite una saldatura) ed esercitando sulla fune A una forza doppia di quella che è stata precedentemente valutata, determinare l'azione globale che la saldatura dovrà esercitare sull'elemento.



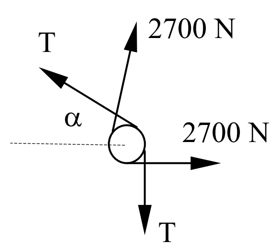
1) Si vede innanzi tutto che l'equilibrio alla traslazione è assicurato. Per quanto riguarda invece l'equilibrio alla rotazione dovrà essere:

$M_z = 2700N \cdot 2m - T \cdot 3m = 0$

e quindi

$T = 1800N$

2) Sul perno 1 insistono i due rami di entrambe le funi. Si trascurano le dimensioni della puleggia.



$$R_x = 2700N - T\cos\alpha = 2700N - 1800N\frac{3}{\sqrt{3^2+2^2}} = 1200N$$

$$R_y = 2700N - T(1 - \operatorname{sen}\alpha) = 2700N - 1800N\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3^2+2^2}}\right) = 1900N$$

$$\left|\vec{R}\right| = 2250N$$

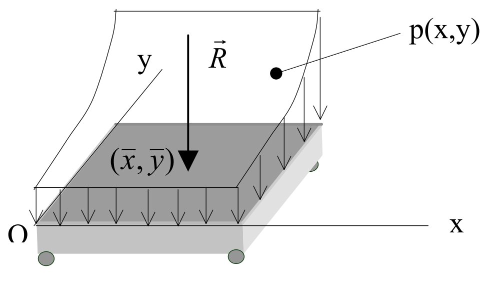
4) Nel caso di raddoppio della tensione sulla fune A, il momento risultante dall'azione delle due funi non è più nullo

$$M_z = 2700N \cdot 2m - 2T \cdot 3m = -5400Nm$$

e deve essere equilibrato dalla reazione della saldatura (circonferenza tratteggiata). Da notare che la reazione della saldatura, essendo una coppia pura, non dipende dalla sua collocazione.

Carichi distribuiti

Finora sono state considerate forze *concentrate* agenti su un corpo rigido, cioè forze agenti su aree di dimensioni trascurabili rispetto a quelle del corpo. Talvolta però il corpo può essere soggetto a carichi *distribuiti* (es. effetto del vento, di fluidi, del peso), definiti come una pressione e misurati in pascal (Pa=1N/m^2). Tali carichi possono essere ridotti ad un *sistema di forze staticamente equivalente*, costituito da una singola forza con retta d'azione opportuna.



Si consideri ad esempio una piastra appoggiata, caricata da una pressione p(x,y). Si può ridurre tale carico alla forza risultante data dall'integrale

$$R = \int_A p(x,y)\,dA$$

cioè al volume sottostante la superficie p(x,y).
Perché il sistema di forze sia equivalente a quello dato, la retta d'azione della risultante (perpendicolare alla superficie e passante per il punto $\bar{x}, \bar{y}$), deve essere tale da produrre lo stesso momento risultante del carico distribuito rispetto al polo scelto. Per esempio, rispetto ad O, si ha

$$\bar{x}R = \int_A xp(x,y)dA \qquad \bar{y}R = \int_A yp(x,y)dA$$

e quindi

$$\bar{x} = \frac{\int_A xp(x,y)dA}{\int_A p(x,y)dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A yp(x,y)dA}{\int_A p(x,y)dA}$$

che corrispondono alle *coordinate (x,y) del baricentro del volume sottostante la superficie p(x,y)*.
Si considerano i due casi più semplici e più comuni di carico distribuito agente su una superficie rettangolare: a) distribuzione uniforme, b) andamento triangolare secondo un asse.
In entrambi i casi, dato che il carico è uniforme secondo un asse, ci si può dapprima ridurre ad un carico equivalente distribuito su una lunghezza e agente sull'asse di simmetria, $w(x)=p_0a$, misurato in N/m. Dopodiché la forza equivalente è data, nel primo caso, dall'area del rettangolo definito da w(x) e cioè $R= p_0aL$ e la sua retta d’azione passa dalla mezzeria, nel secondo caso è data dall'area del triangolo definito da w(x) e cioè $R= p_0aL/2$ e la sua retta d’azione passa per il baricentro del triangolo, cioè a (1/3)L dalla base del triangolo.
Altre distribuzioni, come quella trapezoidale, possono essere considerate come combinazione delle precedenti.