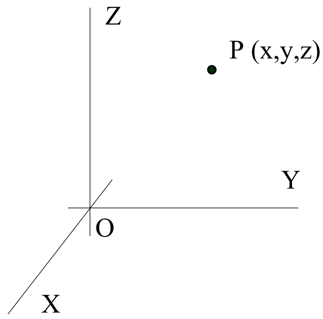
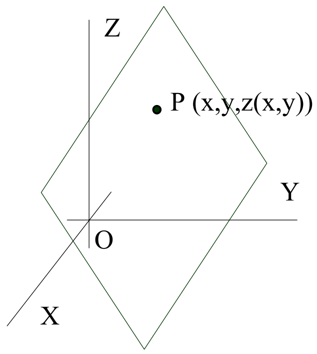
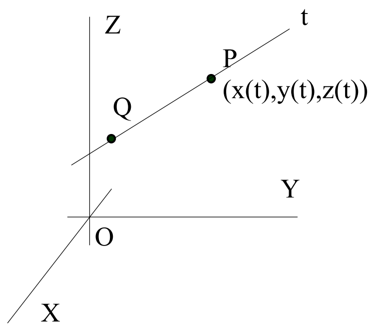
CAP.3

Gradi di libertà e vincoli

Finora ci siamo occupati di stabilire le condizioni per cui punti materiali e corpi rigidi considerati liberi nello spazio siano in equilibrio. Nella pratica però situazioni di questo genere sono piuttosto rare in quanto molto più spesso si trovano problemi in cui i corpi non sono completamente liberi di muoversi nello spazio ma risultano in qualche modo "vincolati". Per definire in modo preciso il concetto di vincolo è opportuno definire il concetto di grado di libertà. Se consideriamo un punto materiale P nello spazio, sappiamo che la sua posizione è definita, in modo univoco, da 3 grandezze scalari (le sue coordinate). Si dice per questo che il punto nello spazio ha 3 gradi di libertà in quanto, qualunque sistema di riferimento si consideri, anche non cartesiano, la sua posizione è definita da tre coordinate indipendenti.







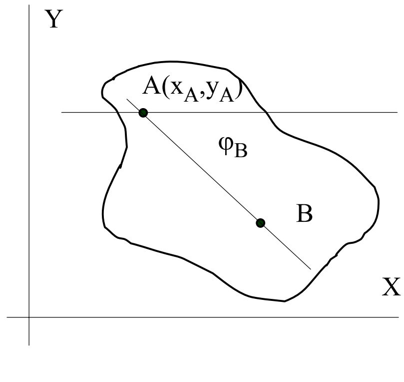
Se il punto materiale è vincolato a stare su di una superficie (ad es. un piano), i gradi di libertà sono 2. In questo caso la condizione di appartenenza alla superficie può essere interpretata come una costrizione dei gradi di libertà del punto ed è esprimibile analiticamente da un'equazione che lega le coordinate del punto, ad es. l'equazione del piano:

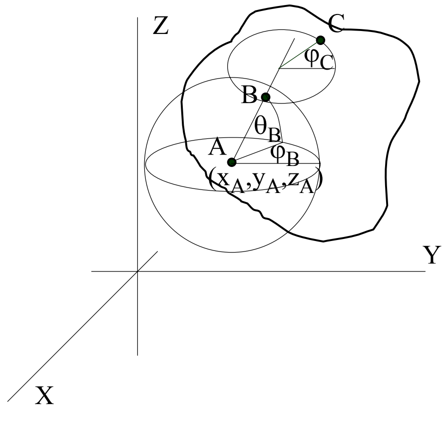
$$ax + by + cz + d = 0$$

Se il punto è vincolato a stare su di curva, ad es. una retta,

$$\begin{cases} x = n_1 t + q_1 \\ y = n_2 t + q_2 \\ z = n_3 t + q_3 \end{cases}$$

dove n_1, n_2, n_3 sono i coseni direttori della retta e (q_1, q_2, q_3) le coordinate di un punto della retta stessa, l'ascissa curvilinea t, che individua la posizione del punto, corrisponde all'unico grado di libertà.
I vincoli sono quindi condizioni (spesso esprimibili con equazioni) che limitano i gradi di libertà dei punti.
Passando da un punto materiale ad un sistema di n punti materiali, i gradi di libertà risultano in generale pari a 3n. Se però si tratta di un sistema rigido si ha una notevole riduzione degli effettivi gradi di libertà a causa delle relazioni esistenti tra le coordinate dei vari punti, la cui distanza relativa è costante. Più semplicemente per una valutazione dei gradi di libertà è opportuno considerare il sistema nella sua globalità. Si consideri prima il problema nel piano. Per individuare la posizione del corpo rigido nel piano, basta considerare due punti arbitrari distinti A e B.

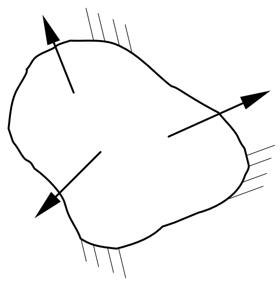




Conoscendo le loro coordinate è possibile determinare le coordinate di qualsiasi altro punto del corpo. Fissando A, cioè fissando le sue coordinate (x_A, y_A), il punto B è vincolato a muoversi su una circonferenza attorno ad A. Quindi fissando inoltre la posizione angolare di B, φ_B, si finisce per definire completamente la posizione del corpo. Perciò si dice che il corpo rigido nel piano ha 3 gradi di libertà. Ripetendo lo stesso ragionamento nello spazio bisogna considerare almeno 3 punti (A,B,C), non allineati, per complessivamente 6 gradi di libertà. Fissando il punto A di coordinate (x_A, y_A, z_A), il punto B può muoversi su di una sfera di centro A e raggio AB. Fissando le sue coordinate sferiche (φ_B, ϑ_B), il punto C risulta potersi muovere su una circonferenza attorno ad una retta passante per A e B. Fissando infine la sua coordinata angolare φ_C, la posizione del corpo risulta completamente determinata.

Se il corpo non è completamente vincolato si dice **labile** ed il suo moto sotto l'azione delle forze agenti è oggetto del corso di Meccanica. Se i vincoli sono necessari e sufficienti a fissare i gradi di libertà si dice che il corpo è **isostatico**. Se invece sono esuberanti, il corpo si dice **iperstatico**. Questi due ultimi casi saranno oggetto di particolare trattazione nell'ambito di questo corso.

Caratterizzazione statica dei vincoli. Caso piano.



I vincoli agiscono però non solo come limitazione cinematica ma anche come agenti statici, cioè capaci di esercitare forze sul corpo. Supponiamo infatti di avere un corpo isostatico ed esercitiamo su di esso delle forze arbitrarie. Dato che il corpo rimane nella sua posizione di quiete, l'insieme delle forze è equilibrato, cioè le azioni esercitate dai vincoli (reazioni vincolari) controbilanciano esattamente le forze applicate. L'insieme dei vincoli esterni viene comunemente indicato con il termine telaio, inteso come quell'elemento esterno rigido e di resistenza infinita, capace di esercitare forze comunque intense, uguali e contrarie a quelle esercitate dal corpo sui vincoli. Da notare infine che il sistema di forze esterne ed il sistema di azioni sul telaio sono staticamente equivalenti. Pertanto i vincoli possono essere interpretati come degli elementi attraverso i quali le forze applicate al corpo si trasmettono al telaio.

Si vedano in Tab.1 i più comuni vincoli piani.

I problemi di statica consistono essenzialmente nel determinare, date le forze agenti sul corpo, le reazioni vincolari. Il procedimento di soluzione consiste in:

1) sostituzione dei vincoli con le rispettive reazioni vincolari, fissando arbitrariamente il verso (diagramma del corpo libero)
2) imposizione delle condizioni di equilibrio (equazioni cardinali)
3) soluzione del sistema di equazioni

Nel **caso piano** le equazioni di equilibrio, per ogni corpo, si tradurranno in

$R_x = 0$ (equilibrio alla traslazione lungo x)

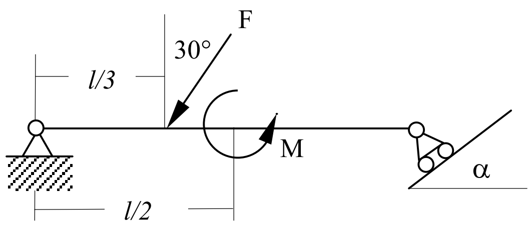
$R_y = 0$ (equilibrio alla traslazione lungo y)

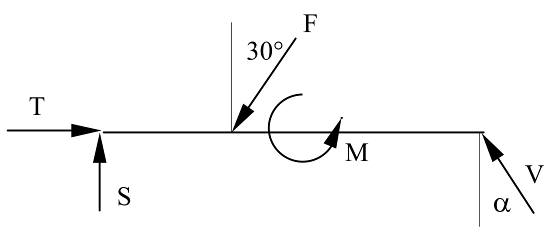
$M_z = 0$ (equilibrio alla rotazione attorno a z)

Da notare che essendo la risultante delle forze nulla, il momento risultante risulta indipendente dal polo.

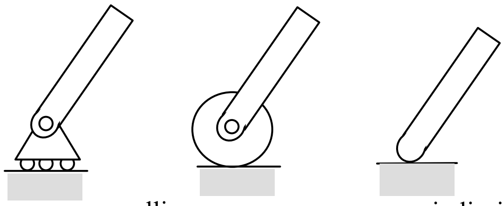
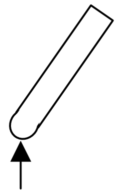
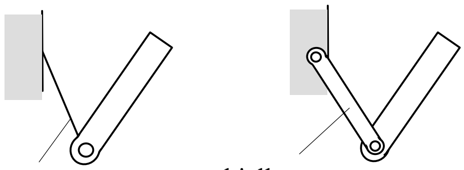
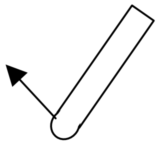
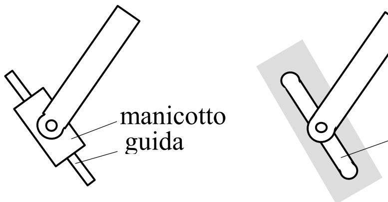
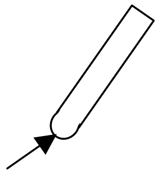
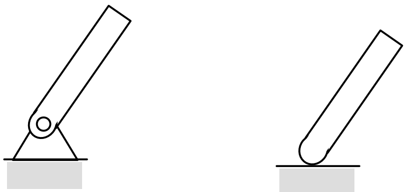
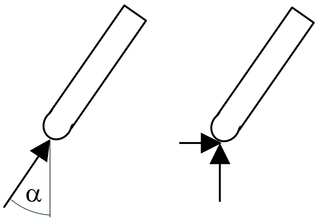
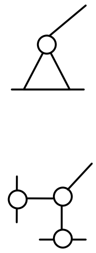
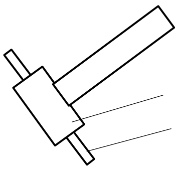
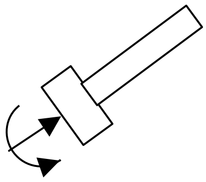
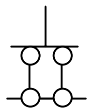
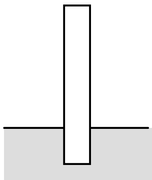
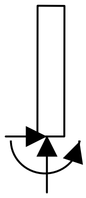
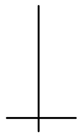
Esempio

Data la trave incernierata ad un estremo ed appoggiata all'altro e caricata come mostrato in figura, si procede innanzi tutto alla sostituzione dei vincoli con le corrispondenti reazioni incognite, cioè al disegno del cosiddetto *diagramma del corpo libero*.





Si noti che le incognite sono 3. Dopo di che si impongono le 3 equazioni di equilibrio:

VINCOLO	REAZIONE	NUMERO INCOGNITE	SIMBOLO
 rulli appoggio liscio	 Forza di direzione nota	1	
 cavo bielletta	 Forza di direzione nota		
 manicotto guida asola	 Forza di direzione nota		
 cerniera appoggio ruvido	 Forza di direzione incognita	2	
 manicotto guida	 Forza di direzione nota e momento	2	
 incastro	 Forza e momento	3	

Tab.1 Vincoli nel piano

$$
\begin{array}{lcccccl}
 & T & S & V & & & \\
R_x = & T & & -V\,\mathrm{sen}\,\alpha & & -F\dfrac{1}{2} & =0 \\
R_y = & & S & +V\cos\alpha & & -F\dfrac{\sqrt{3}}{2} & =0 \\
M_z = & & & Vl\cos\alpha & +M & -F\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{l}{3} & =0
\end{array}
$$

cioè in forma matriciale:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ 0 & 1 & \cos\alpha \\ 0 & 0 & l\cos\alpha \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} T \\ S \\ V \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} \dfrac{F}{2} \\ F\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -M+F\dfrac{\sqrt{3}l}{6} \end{pmatrix}
$$

Detta A la matrice dei coefficienti e B la matrice composta da coefficienti e termini noti, si verificano diverse situazioni, a seconda della caratteristica o rango delle matrici A e B, cioè dell'ordine massimo delle matrici quadrate estraibili con determinante non nullo. Il **teorema di Capelli** dice che *condizione necessaria e sufficiente per avere una soluzione è che il rango di A sia uguale al rango di B*.

Se $\det A = l\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha \neq 0 \rightarrow R_A = 3 = R_B \rightarrow 1$ soluzione $\rightarrow$ sistema ISOSTATICO

Se $\cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha = \pi/2$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} T \\ S \\ V \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} \dfrac{F}{2} \\ F\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -M+F\dfrac{\sqrt{3}l}{6} \end{pmatrix}
$$

Quindi $R_A = 2$ mentre $-M+F\dfrac{\sqrt{3}l}{6} \neq 0 \rightarrow R_B = 3 \rightarrow$ sistema impossibile $\rightarrow$ IPOSTATICO, LABILE

Se invece $-M+F\dfrac{\sqrt{3}l}{6} = 0 \rightarrow R_A = R_B = 2 <$ numero incognite $\rightarrow \infty^1$ soluzioni $\rightarrow$ sistema IPERSTATICO

Quindi in generale, date le equazioni di equilibrio nelle incognite reazioni vincolari, in forma matriciale:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \mathbf{B} = [\mathbf{A}|\mathbf{b}]$$

si hanno sistemi **isostatic**i: $R_A = R_B =$ numero incognite $\rightarrow$ una soluzione

sistemi **labili**: $R_A < R_B \rightarrow$ mancano vincoli

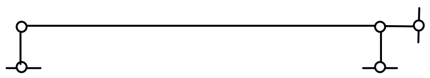
sistemi **iperstatici**: $R_A = R_B <$ numero incognite $\rightarrow$ infinite soluzioni

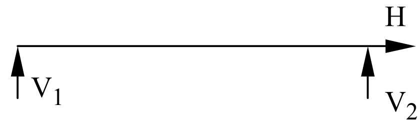
Se poi per un sistema isostatico R_A è pari al numero di gradi di libertà si dice che il sistema è intrinsecamente isostatico, cioè ha una soluzione indipendentemente dal carico.

Un esempio di sistema isostatico ma *non* intrinsecamente isostatico è il seguente:

Si può facilmente verificare che il sistema ha una soluzione, ottenibile imponendo l'equilibrio alla traslazione verticale e alla rotazione. $R_A = R_B = 2 <$ numero di gradi di libertà (3). L'equilibrio dipende però dalla condizione di carico. Infatti se alla trave è applicato un carico orizzontale, questo non può essere equilibrato dalle reazioni vincolari che non hanno componenti orizzontali. In tal caso il sistema sarebbe labile.

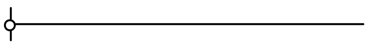
Un esempio di sistema intrinsecamente isostatico è invece il seguente:



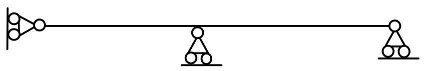


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ M_z \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix}$$

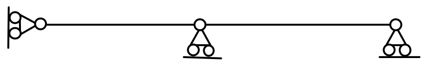
La caratteristica della matrice A è 3, indipendentemente dal carico.
Seguono altri esempi, di cui si lascia allo studente lo studio dettagliato.



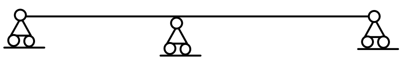
Sistema labile se trave soggetta a forza verticale o a momento, isostatico se solo a forza orizzontale



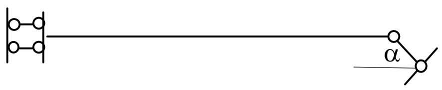
Sistema intrinsecamente isostatico



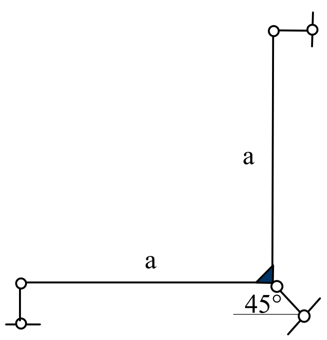
Questo caso differisce dal precedente perché è interrotta la continuità della trave. Il sistema è labile per carichi verticali o momenti applicati alla primo tratto di trave, isostatico altrimenti.



Sistema labile per carichi orizzontali, iperstatico altrimenti.



Sistema intrinsecamente isostatico per $\alpha \neq k\pi$, labile per $\alpha = k\pi$ e carichi verticali applicati, iperstatico per $\alpha = k\pi$ e carichi verticali nulli.



Sistema isostatico se momento risultante applicato nullo, labile altrimenti, in quanto non è impedita la rotazione attorno al punto di convergenza delle rette d'azione delle reazioni vincolari. Per renderlo intrinsecamente isostatico basterebbe inclinare il vincolo diversamente da 45° o diversificare le lunghezze dei due bracci.

In particolare si nota che il fatto che il numero di reazioni globali sia maggiore o uguale al numero di gradi di libertà non implica necessariamente che il sistema sia iper- o iso-statico. Importante è la disposizione dei vincoli. In generale si può dire che un corpo non è vincolato correttamente se le rette d'azione delle reazioni vincolari sono parallele o concorrenti in un punto. L'equilibrio allora dipende dal carico esterno.

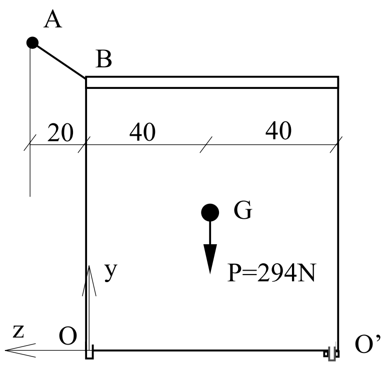
Cenni ai problemi di statica nello spazio

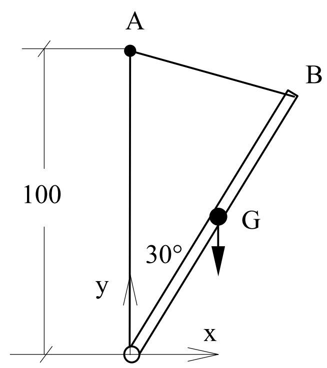
La metodologia sviluppata per i problemi piani può essere direttamente estesa ai problemi spaziali. Dal punto di vista pratico, nell'impostazione e soluzione di problemi spaziali sorgono in genere maggiori difficoltà legate alla più difficile rappresentazione grafica dello schema e al fatto che il numero di gradi di libertà per un corpo rigido nello spazio è il doppio di quello nel piano. Tutti i problemi reali sono di fatto tridimensionali ma spesso la loro approssimazione piana può fornire indicazioni sufficienti per gli scopi pratici. In alcuni casi invece non è lecito prescindere dalla tridimensionalità e, in tal caso si deve ricorrere a tutte le condizioni di equilibrio che, in termini scalari sono per un generico corpo rigido 6: 3 equazioni per le componenti della risultante delle forze ($R_X=R_y=R_Z=0$) e 3 equazioni per le componenti del momento risultante ($M_X=M_y=M_Z=0$).

La casistica di vincoli nello spazio è ovviamente più ampia di quelli nel piano, in Tab.2 ne vengono riportati i più importanti per le applicazioni.

Esempio

È dato un portellone di massa pari a 30kg, di dimensioni 80cmx100cm, vincolato in basso da una cerniera piana in O e da una cerniera sferica in O', e sostenuto nello spigolo B da un cavo agganciato in A. Determinare, nella posizione rappresentata, le reazioni vincolari, compresa la tensione del cavo.





Le incognite sono 6:

- le componenti X1 e Y1 della reazione della cerniera piana
- le componenti X2, Y2, Z2 della reazione della cerniera sferica
- la tensione del cavo T.

6 sono anche i gradi di libertà del portellone nello spazio che risultano pertanto vincolati. 6 sono quindi le equazioni di equilibrio che possono essere scritte.

Prima di tutto occorre esprimere la tensione del cavo nelle sue componenti cartesiane,ossia tramite il modulo (incognito) e i suoi coseni direttori (quelli del segmento $\overrightarrow{AB}$).

$$\vec{T} = T \cdot \vec{n} \qquad \begin{cases} T_x = T \cdot n_x \\ T_y = T \cdot n_y \\ T_z = T \cdot n_z \end{cases}$$

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right|} \qquad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 1.000 \\ 0.200 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0.500 \\ 0.866 \\ 0.000 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} -0.901 \\ 0.241 \\ 0.360 \end{pmatrix}$$

Le equazioni di equilibrio alla traslazione risultano:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - 0.901T = 0 \\ Y_1 + Y_2 + 0.241T = 294 \\ \quad Z_2 + 0.36T = 0 \end{cases}$$

Le equazioni di equilibrio alla rotazione possono essere scritte in forma vettoriale oppure direttamente in termini di componenti cartesiane.
Nel primo caso si ha:

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OO'} \wedge \overrightarrow{R_2} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{T} = \vec{0}$$

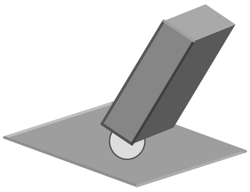
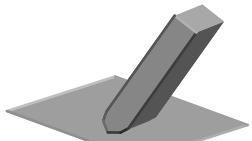
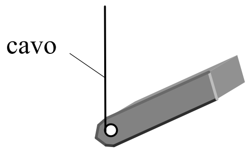
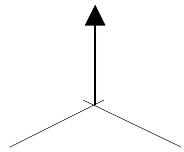
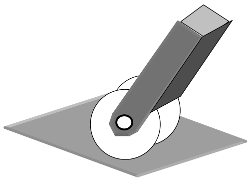
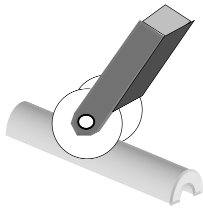
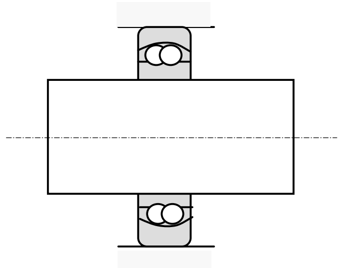
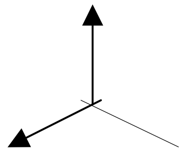
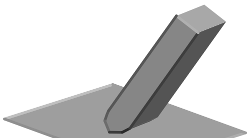
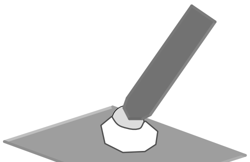
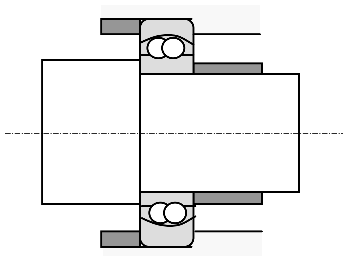
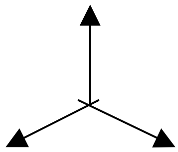
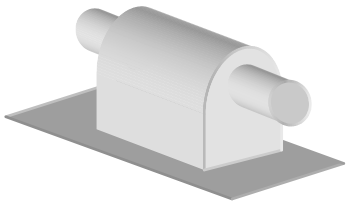
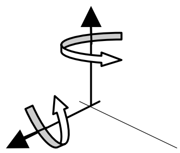
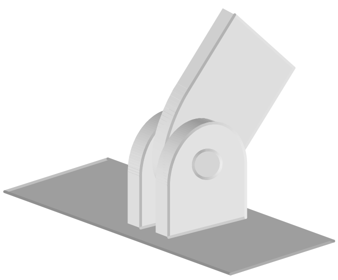
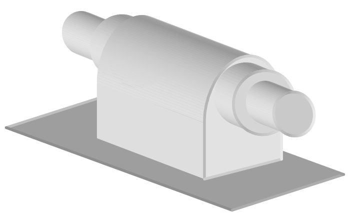
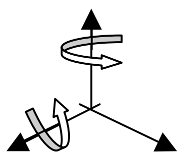
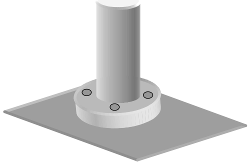
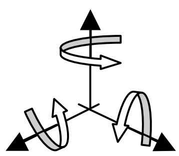
$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0.250 & 0.433 & -0.400 \\ 0 & -294 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -0.800 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0.500 & 0.866 & 0 \\ -0.901 & 0.241 & 0.360 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che sviluppata dà le 3 equazioni scalari relative alle componenti cartesiane del momento risultante.

$$\begin{cases} M_{Ox} = -117.6 + Y_2 + 0.312T = 0 \\ M_{Oy} = -0.8X_2 - 0.18T = 0 \\ M_{Oz} = -73.5 + 0.901T = 0 \end{cases}$$

A questo punto si può risolvere il sistema complessivo di equazioni (per sostituzione):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.901 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0.241 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.360 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.312 \\ 0 & 0 & -0.800 & 0 & 0 & -0.180 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.901 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 294 \\ 0 \\ 117.6 \\ 0 \\ 73.5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91.9 \\ 182.2 \\ -18.4 \\ 92.1 \\ -29.4 \\ 81.6 \end{pmatrix}$$

VINCOLO	REAZIONE	NUM. INCOGN.
 sfera  appoggio liscio 		1
 rullo su sup. ruvida  rullo su rotaia  cuscinetto orientabile libero assialmente		2
 appoggio ruvido  cerniera sferica  cuscinetto orientabile bloccato assialmente		3
 cerniera spaziale scorrevole (bronzina)		4
  cerniera spaziale fissa (forcella con perno, bronzina con cuscinetto di spinta)		5
 incastro		6

Tab.2 Vincoli nello spazio