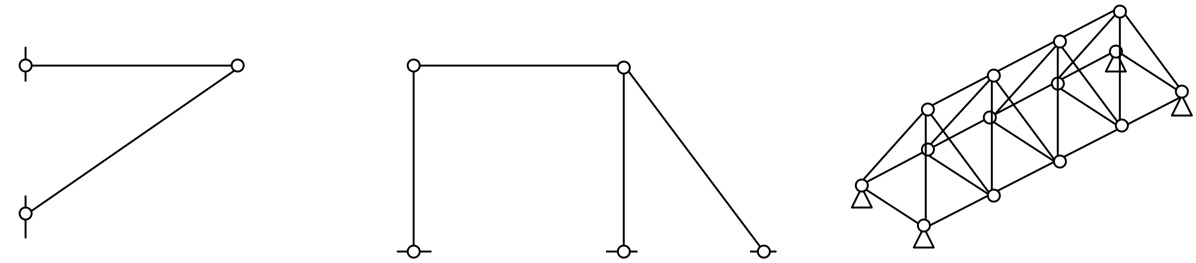
# CAP.4

## Equilibrio di strutture

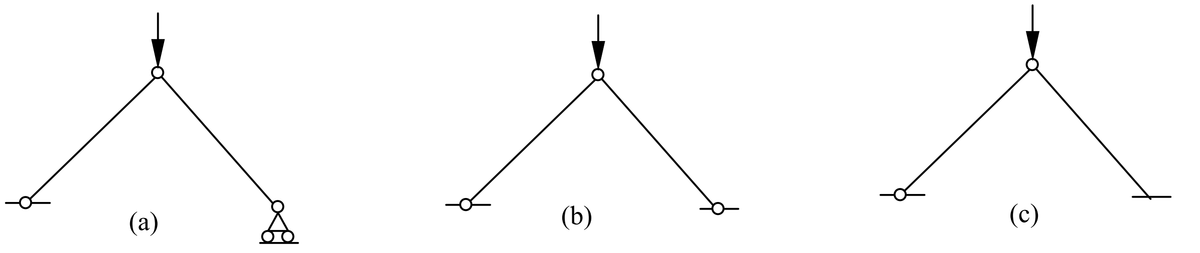
E' stato finora considerato l'equilibrio di corpi rigidi singoli soggetti a forze e momenti esterni. Si tratta ora di esaminare il caso di strutture, cioè di insiemi di più corpi rigidi collegati fra loro. In questo caso può essere richiesto di determinare non soltanto le forze esterne agenti sulla struttura ma anche le forze (interne) che si scambiano i vari componenti. E' importante a questo proposito ricordare la terza legge di Newton (principio di azione-reazione) che dice che ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria o nello specifico che le forze di azione e reazione fra corpi in contatto hanno lo stesso modulo, la stessa linea di azione e verso opposto.



*Esempi di strutture*

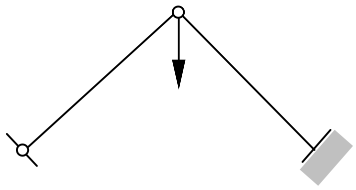
Le strutture presentano pertanto vincoli esterni che trasmettono i carichi della struttura al telaio e vincoli interni che consentono la trasmissione di carichi tra elementi stessi della struttura. L'esame del problema dal punto di vista statico comporta l'individuazione completa delle reazioni vincolari esterne ed interne e termina nella determinazione delle forze che agiscono sui singoli corpi rigidi costituenti la struttura.
Le reazioni vincolari interne, ad esempio scambiate tra due corpi A e B vincolati reciprocamente, se viste come azioni esercitate sulla struttura globale sono riconducibili a coppie di braccio nullo per il principio di azione e reazione.
In generale pertanto il numero di incognite (reazioni vincolari) è dato dal numero di vincoli (interni ed esterni) e dalla loro molteplicità. Per ognuno dei corpi rigidi costituenti la struttura è possibile (nel caso piano) scrivere tre condizioni di equilibrio indipendenti. Altre equazioni possono essere scritte considerando l'equilibrio dell'intera struttura o di parti di essa (anche comprendenti più corpi rigidi). Appare evidente che nelle equazioni di equilibrio globale della struttura le reazioni vincolari interne non compaiono.
In generale le equazioni di equilibrio che possiamo scrivere non sono tutte indipendenti e alcune di esse sono linearmente dipendenti dalle altre. La determinazione delle reazioni vincolari, e quindi la soluzione del problema statico, è ricondotta quindi alla soluzione di un sistema di equazioni lineari in cui le componenti delle reazioni sono le incognite. E' interessante a questo punto discutere il sistema ottenuto (come già fatto del resto per l'equilibrio del corpo singolo) richiamando le nozioni di algebra lineare note dai corsi di matematica.
E' noto infatti che possono darsi principalmente tre casi:

a) il sistema è **impossibile** (numero di equazioni indipendenti superiore al numero di incognite), significa fisicamente che vi sono meno vincoli di quanti necessari per l'equilibrio: **il problema è labile**.
b) il sistema è **determinato** ed ammette un'unica soluzione (numero di incognite pari al numero di equazioni indipendenti), dal punto di vista statico il corpo è vincolato in modo necessario e sufficiente per l'equilibrio: **il problema è isostatico**.
c) il sistema è **indeterminato** (numero di equazioni indipendenti inferiore al numero delle incognite), significa fisicamente che vi sono più vincoli di quanti necessari per l'equilibrio: **il problema è iperstatico**.

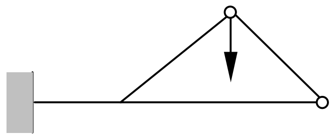



Esempio di problema (a)labile, (b) iso e (c) iperstatico

I problemi labili non hanno un grande significato in statica in quanto sono relativi a situazioni in cui la struttura, o parti di essa, possono muoversi sotto carico (sono meccanismi). Questi argomenti sono sviluppati nel corso do Meccanica.
I problemi isostatici sono quelli per cui l'analisi delle forze può essere condotta sulla base di sole considerazioni di equilibrio e rappresentano un insieme piuttosto vasto di situazioni reali.
Nei problemi iperstatici le sole condizioni di equilibrio indicano per le reazioni vincolari infinite soluzioni. Se indichiamo con m il numero di equazioni indipendenti e con n il numero di reazioni vincolari incognite (n>m), si avranno $\infty^{(m-n)}$ soluzioni o se vogliamo m reazioni vincolari potranno essere valutate solo assegnando arbitrariamente i valori alle rimanenti (n-m) reazioni. In questo caso le (n-m) incognite sono spesso chiamate reazioni iperstatiche e il problema si dice (n-m) volte iperstatico. Secondo che le reazioni iperstatiche siano tutte interne o tutte esterne il problema viene detto internamente o esternamente iperstatico.



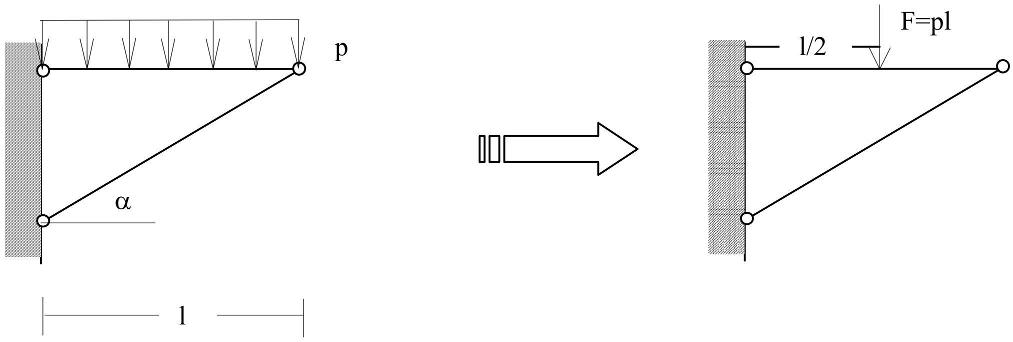
Struttura iperstatica esternamente



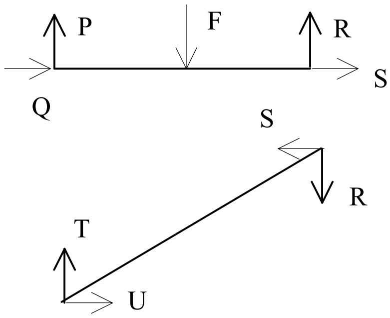
Struttura iperstatica internamente

Come avremo modo di vedere, non è possibile determinare completamente le reazioni vincolari nei problemi iperstatici se si mantiene l'ipotesi di rigidezza degli elementi che compongono la struttura. In altri termini si può dire che nei problemi iperstatici le reazioni vincolari dipendono dal modo con cui gli elementi che compongono la struttura si 'deformano' sotto l'azione dei carichi.
Seguono esempi di soluzione di problemi isostatici piani.

**Es.1**
Verificare l'isostaticità della struttura rappresentata in figura.




Ai fini del calcolo dell'equilibrio del corpo rigido, un carico distribuito può essere sostituito con una forza pari alla risultante e applicata nel baricentro della distribuzione, cioè con pari momento risultante.
Si tracciano innanzi tutto i diagrammi del corpo libero per ciascun elemento, applicando il principio di azione-reazione per le forze che si scambiano i due elementi




Si nota che si hanno 6 incognite e che si possono scrivere in tutto 6 equazioni di equilibrio (3 per ogni corpo).

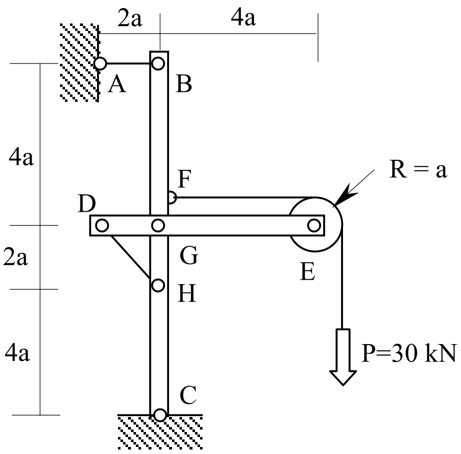
$$
\begin{cases}
\quad Q \qquad\qquad + S \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \\
P \qquad + R \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - F = 0 \\
\qquad Rl \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - Fl/2 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad - S \qquad\qquad U \qquad\qquad = 0 \\
\qquad - R \qquad\qquad\qquad + T \qquad\qquad\qquad = 0 \\
\qquad - Rl \quad + Sltg\alpha \qquad\qquad\qquad\qquad = 0
\end{cases}
\qquad
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & l & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -l & ltg\alpha & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \\ S \\ T \\ U \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ F \\ Fl/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

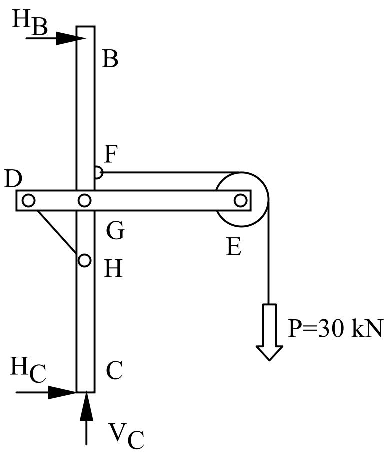
Se $\alpha \neq 0$, il rango della matrice dei coefficienti è 6, cioè pari al numero delle incognite ed è quindi soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente per l'isostaticità e quindi esistenza e unicità della soluzione.

**Es.2**

La trave orizzontale DE sorregge alla sua estremità una puleggia (priva di attrito) che devia la direzione di una fune di 90°.

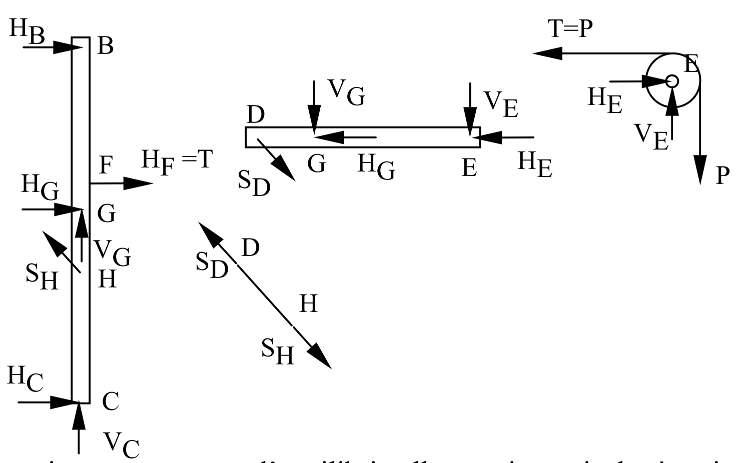
La trave DE è connessa attraverso la cerniera G alla trave verticale continua BC. Schema e quote sono riportate in figura (a=25 cm). Determinare le reazioni vincolari esterne e le forze che si scambiano i vari elementi della struttura.




Per determinare le reazioni vincolari esterne si traccia il diagramma del corpo libero dell'intera struttura, sostituendo ai vincoli le corrispondenti reazioni incognite. In particolare si noti che l'elemento AB altro non è che un pendolo orizzontale e quindi può esercitare sulla struttura solo una forza orizzontale. Dato che le incognite sono 3 sono sufficienti le equazioni di equilibrio globale per determinarle.

$$
\begin{cases}
H_B \qquad + H_C \qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \\
\qquad\qquad\qquad V_C \qquad - P \quad = 0 \\
- H_B \cdot 10a \qquad\qquad\qquad - P \cdot 5a \quad = 0
\end{cases}
\qquad
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
-10a & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} H_B \\ H_C \\ V_C \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ P \\ P \cdot 5a \end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix} H_B \\ H_C \\ V_C \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -P/2 \\ P/2 \\ P \end{pmatrix}
$$




Per determinare le azioni che i vari elementi si scambiano occorre smembrare la struttura e tracciare i relativi diagrammi del corpo libero, rispettando il principio di azione-reazione.

Si noti che per l'equilibrio del cavo, la sua tensione sarà pari al carico esterno che verrà trasmesso all'attacco in F sulla colonna.

L'elemento DH, essendo un'asta incernierata alle estremità e non caricata internamente, per l'equilibrio alla rotazione, risulterà caricata solo assialmente.

A questo punto si può passare alla determinazione delle forze, imponendo l'equilibrio dei singoli elementi. Partendo dalla carrucola, dall'equilibrio orizzontale e verticale risulta:

$$\begin{cases} H_E = P \\ V_E = P \end{cases}$$

Imponendo l'equilibrio della trave orizzontale si ha:

$$\begin{cases} S_H\sqrt{2}/2 \quad -H_G \qquad\qquad = P \\ -S_H\sqrt{2}/2 \qquad\qquad -V_G = P \\ S_H\sqrt{2}a \qquad\qquad\qquad\quad = P4a \end{cases} \qquad \begin{cases} S_H = P2\sqrt{2} \\ H_G = P \\ V_G = -3P \end{cases}$$

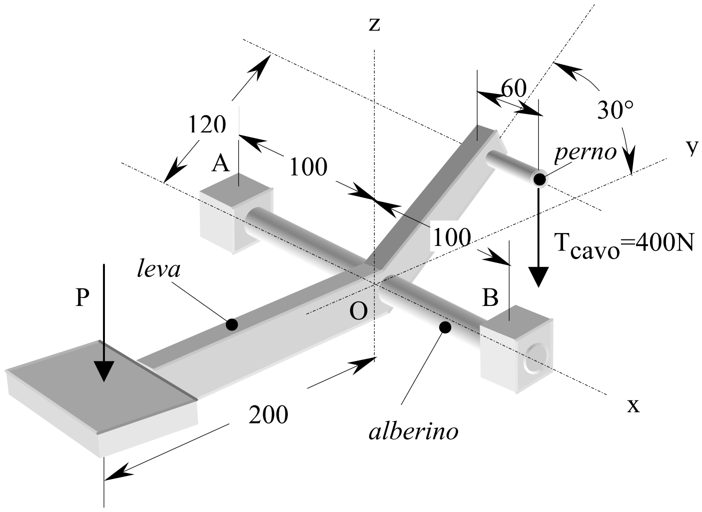
Tutte le incognite sono così determinate.

**Cenni ai problemi di statica nello spazio**

La metodologia sviluppata per i problemi piani può essere direttamente estesa ai problemi spaziali, ricordando che il numero di gradi di libertà per un corpo rigido nello spazio è il doppio di quello nel piano. Segue un esempio di una semplice struttura statica spaziale.

**Es.3**

In figura è schematizzato un pedale di un azionamento a cavo. Il cavo è agganciato ad un perno a sbalzo sulla leva. Si suppone che perno e alberino siano incastrati nella leva del pedale, mentre i due cuscinetti A e B siano assimilabili uno ad una cerniera sferica, l'altro ad una cerniera piana. Si chiede di determinare la forza P da esercitare sul pedale per produrre una tensione nel cavo di 400N, le reazioni ai cuscinetti e forze e momenti che si scambiano pedale e alberino all'incastro.



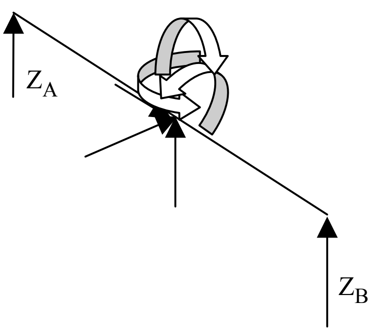

La forza P da esercitare è facilmente determinata imponendo l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse x dell'intero gruppo pedale, soggetto alle forze P, T e alle reazioni vincolari esterne in A e B. Tenendo presente che reazioni dei cuscinetti consistono in due forze incognite con braccio nullo rispetto all'asse x si ha:

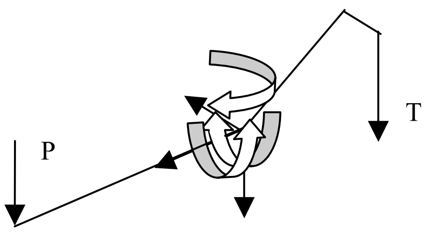
$$M_{Ox} = P \cdot 200 - T \cdot 120 \cdot \cos(30°) = 0 \qquad\qquad P = 207.8\text{N}$$

Le componenti cartesiane delle reazioni dei cuscinetti (3 per A, 2 per B) possono essere determinate tramite le restanti equazioni di equilibrio. Assumendole dirette nel verso positivo degli assi, si ha

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B = 0 \\ Z_A + Z_B - P - T = 0 \\ M_{Oy} = Z_A \cdot 100 - Z_B \cdot 100 + T \cdot 60 = 0 \\ M_{Oz} = -Y_A \cdot 100 + Y_B \cdot 100 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A = 0 \\ Z_A = 183.9N \\ Y_B = 0 \\ Z_B = 423.9N \end{cases}$$

Per determinare le reazioni all'incastro in O (azioni interne al gruppo pedale), si può alternativamente considerare l'equilibrio dell'alberino o della leva. Si traccia il diagramma del corpo libero dell'alberino, soggetto alle reazioni dei cuscinetti (note) e alle reazioni all'incastro (incognite).




Si vede facilmente che le reazioni d'incastro si riducono ad una componente verticale e ad una coppia attorno a y.

$$\begin{cases} \overline{Z}_O = -Z_A - Z_B = -607.8N \\ \overline{M}_{Oy} = -Z_A \cdot 100mm + Z_B \cdot 100mm = 24Nm \end{cases}$$