

## CAP.5

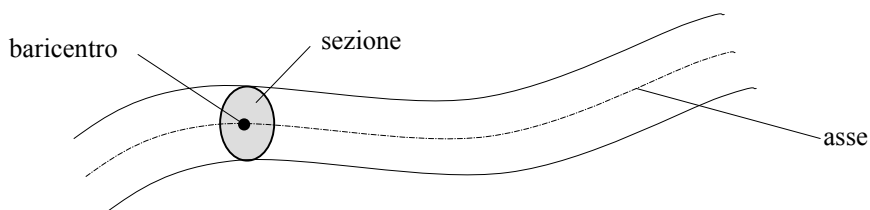
### Caratteristiche di sollecitazione

#### Principali elementi strutturali

Come già visto trattando il concetto di punto materiale, la soluzione di problemi tecnici comporta necessariamente la definizione di un modello semplificato della realtà che possa rappresentare però in modo sufficientemente accurato e semplice i fenomeni che si devono prevedere. In molti casi l'efficacia del modello adottato non è facilmente valutabile a priori e solo la conferma sperimentale delle sue previsioni ne costituisce l'effettiva garanzia di applicabilità.

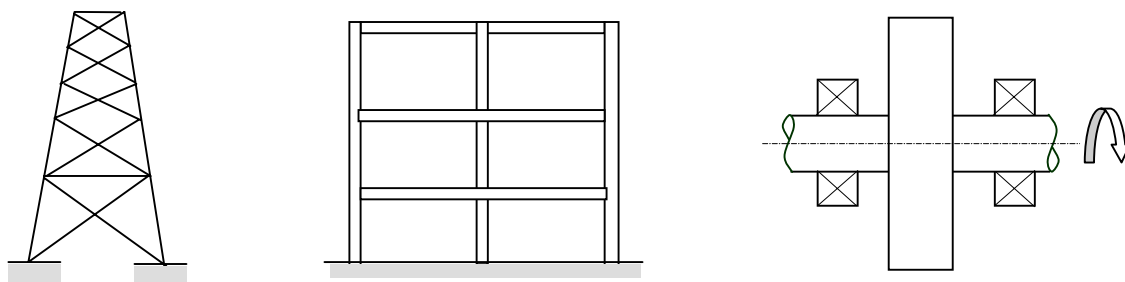
Nell'analisi del comportamento delle strutture è necessario definire modelli che consentano di rappresentare in modo semplice anche le caratteristiche geometriche (forma) dei corpi. In linea di principio ogni corpo può essere considerato un solido tridimensionale ma spesso descrivere completamente tutti i suoi dettagli geometrici risulta eccessivamente complesso e non produttivo. Per questo motivo si definiscono delle tipologie strutturali (o modelli di forme strutturali) alle quali si cerca di ricondurre i corpi reali per semplicità di calcolo.

Oltre al concetto di punto materiale che, essendo privo di dimensioni, poco si presta a rappresentare le caratteristiche geometriche di un oggetto reale, *l'elemento strutturale più semplice è la trave*. L'elemento **trave** è un solido con una dimensione, la lunghezza, predominante rispetto alle altre e quindi può essere, con buona approssimazione essere considerato un corpo monodimensionale. Si può pensare di ottenere geometricamente una trave traslando una superficie piana (sezione della trave) lungo una linea (asse della trave) che punto per punto è normale al piano della sezione.

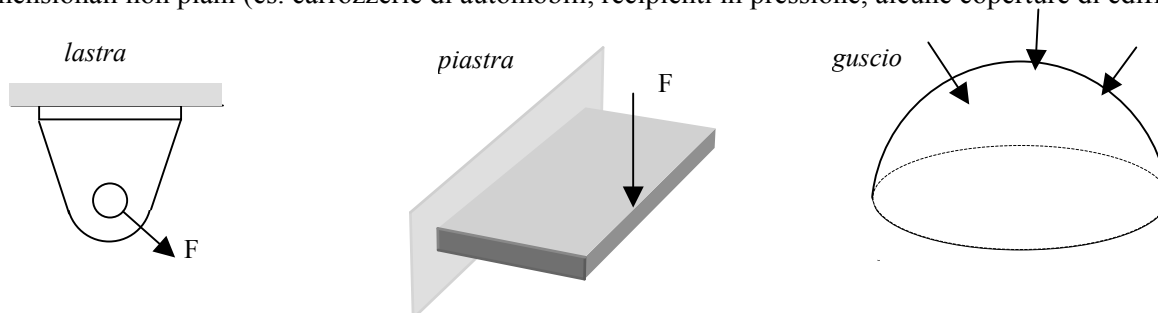


Si avranno travi rettilinee, curvilinee, piane, spaziali, secondo la forma dell'asse. Si potranno poi avere travi a sezione costante o variabile.

Sono esempi di travi gli elementi che costituiscono un traliccio, gli elementi della struttura in acciaio di un edificio, gli alberi di trasmissione del moto, etc. Nella realtà poi sono considerati travi anche elementi che altrimenti non verrebbero calcolati.



Gli elementi cosiddetti bidimensionali, a differenza della trave hanno due dimensioni predominanti rispetto allo spessore. Si chiamano **lastre** o **piastre** se sono elementi piani. Nel primo caso sono caricate nel loro stesso piano, nel secondo anche da forze fuori dal piano (es. solai). Si chiamano **gusci** gli elementi bidimensionali non piani (es. carrozzerie di automobili, recipienti in pressione, alcune coperture di edifici).

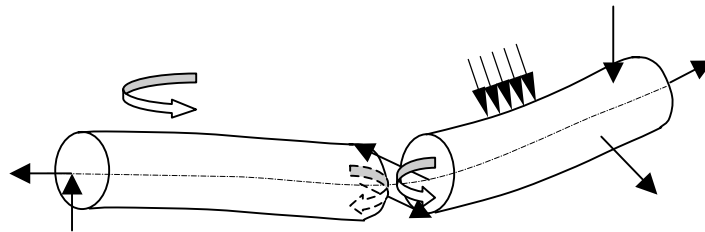


Infine ci sono gli **elementi tridimensionali** che non hanno dimensioni predominanti e che quindi non sono riconducibili agli elementi precedenti (es. pistone, testa del motore, etc.).

### Caratteristiche di sollecitazione per le travi

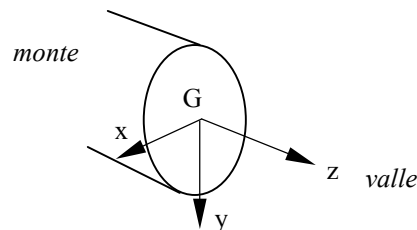
Consideriamo una struttura isostatica, composta di travi variamente collegate tra loro e al telaio, caricate da un sistema di forze. Supponiamo di aver valutato le reazioni vincolari esterne ed interne. Isoliamo una singola trave con tutte le forze agenti su di essa che costituiranno un sistema equilibrato. Ci si domanda che sollecitazioni vengono trasmesse dalle fibre del materiale che costituisce la trave permettendo alle forze agenti di scaricarsi sui vincoli e che giustificano l'impiego della trave come elemento strutturale.

Per rispondere a questa domanda facciamo un taglio ideale perpendicolare all'asse della trave, individuando in tal modo una generica sezione. Ciò facendo cioè eliminiamo un vincolo di incastro interno alla trave e, per mantenere i due spezzoni di trave in equilibrio, lo sostituiamo con le reazioni corrispondenti. Naturalmente per il principio di azione reazione sui due spezzoni tali reazioni saranno uguali in modulo e direzione ma in verso opposto. E' evidente che nella trave integra è il materiale stesso della sezione ad esercitare delle forze equivalenti staticamente ai carichi agenti sulla trave.



E' opportuno scegliere un **sistema di riferimento locale** con le seguenti caratteristiche:

- 1) l'origine coincidente con il baricentro della sezione G
- 2) l'asse z tangente all'asse della trave (coincidente con quest'ultimo se rettilineo)
- 3) l'asse y sul piano della sezione diretto verso il basso e l'asse x conseguente alla regola della mano destra.



Si calcolano le componenti della risultante e del momento risultante del sistema di forze a valle della sezione e rispetto al punto G. Tali grandezze si chiamano **caratteristiche di sollecitazione**, rappresentano quantitativamente l'intensità delle azioni trasmesse attraverso la generica sezione e sono strettamente connesse con il livello di sollecitazione del materiale.

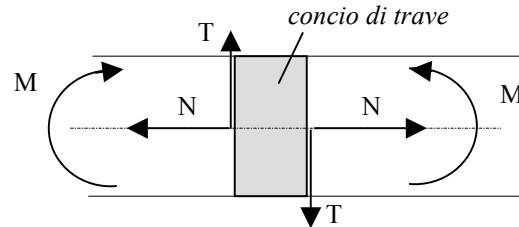
In particolare la componente della risultante secondo z è detta *forza normale* ed è indicata con la lettera **N**, le componenti secondo x e y sono dette *forze di taglio* e indicate con **T<sub>x</sub>** e **T<sub>y</sub>**, la componente del momento secondo z è detta *momento torcente* ed indicata con **M<sub>z</sub>** e infine le due componenti del momento secondo x e y sono detti *momenti flettenti* ed indicati con **M<sub>x</sub>** e **M<sub>y</sub>**.

Se cambiate di segno possono essere interpretate come una *reazione interna d'incastro*. Se invece del sistema di forze a valle della sezione, si considera il sistema di forze a monte della sezione, per l'equilibrio dell'intera trave, si ottengono componenti della risultante e del momento risultante uguali in valore assoluto ma opposti in segno a quelli precedentemente calcolati. Quindi le caratteristiche di sollecitazione possono essere indifferentemente calcolate considerando i carichi esterni agenti sulla porzione di trave a valle o a monte della sezione come torna più comodo, con l'accorgimento di cambiare il segno delle componenti calcolate a monte, dato che convenzionalmente si adottano i segni delle grandezze calcolate a valle.

Per quanto riguarda la *convenzione dei segni* delle caratteristiche di sollecitazione quindi si considerano *positive le forze a valle della sezione dirette come gli assi x,y,z e positivi i momenti con verso antiorario rispetto agli assi*.

Nel piano il problema è più semplice perché le caratteristiche di sollecitazione si riducono a tre: lo sforzo assiale, un momento flettente (relativo all'asse perpendicolare al piano della struttura), e uno sforzo di taglio.

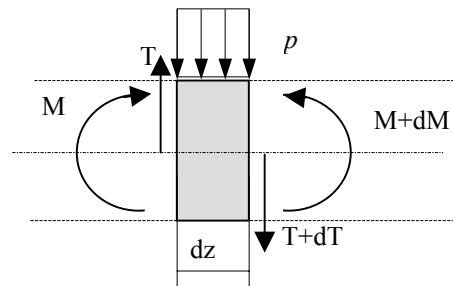
Inoltre esiste una convenzione che permette di fissare il segno delle caratteristiche di sollecitazione (*regola del concio*). Si considera una porzione di trave tra due sezioni molto vicine (concio di trave). L'asse  $z$  è orientato da sinistra verso destra. Nella figura riportata è rappresentato il concio e sono indicate le componenti della risultante e il momento risultante delle forze che la trave a destra esercita sulla sezione e le corrispondenti che la trave a sinistra esercita sulla sezione, ovviamente di verso opposto per l'equilibrio del concio. Sono considerati positivi i versi indicati in figura.



Le caratteristiche di sollecitazione generalmente cambiano da sezione a sezione lungo l'asse della trave ed è possibile associare ad ogni sezione un valore per ognuna delle caratteristiche di sollecitazione. Tali valori possono quindi essere rappresentati graficamente utilizzando come asse delle ascisse l'asse della trave stessa, ottenendo i cosiddetti **diagrammi delle caratteristiche** che permettono di individuare le sezioni più sollecitate della trave. Nella rappresentazione del diagramma dei momenti flettenti è usuale seguire una convenzione in base alla quale il grafico viene riportato dalla parte della trave caratterizzata dalle *fibres tese*, (cioè dalla parte dell'estradosso della curva che l'asse della trave tende a descrivere per effetto del momento flettente). Facendo riferimento al concio di trave, le fibres tese sono in basso se il momento è positivo, in alto se negativo.

### Relazione tra il momento flettente e lo sforzo di taglio

Si consideri un elemento di trave lungo  $dz$ , in equilibrio sotto l'azione di forze di taglio e momenti flettenti.



Considerando l'equilibrio a momento si ottiene:

$$-M - pdz \frac{dz}{2} - (T + dT)dz + (M + dM) = 0$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore si ricava:

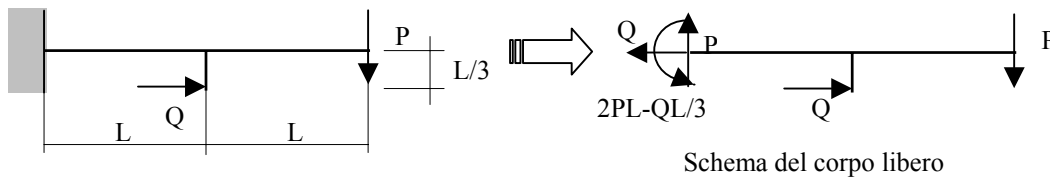
$$T = \frac{dM}{dz}$$

cioè il taglio è la derivata del momento. Ciò significa che:

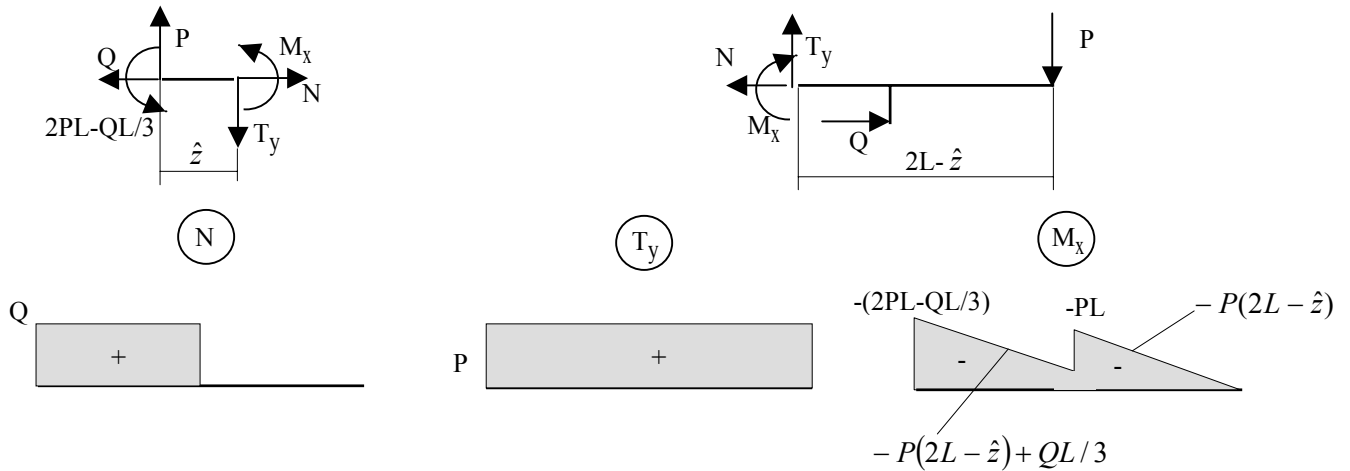
- se il momento flettente è costante, il taglio è nullo;
- se il momento flettente ha un andamento lineare, il taglio è costante;
- a una discontinuità nella pendenza del momento flettente corrisponde una discontinuità (salto) nel diagramma del taglio.

Quindi il diagramma del taglio è deducibile da quello del momento con un'operazione di derivazione, mentre il momento è ricavabile dal taglio con un'operazione di integrazione *a meno di una costante*. Perciò, discontinuità nel diagramma del momento flettente dovute a coppie concentrate non sono deducibili dal diagramma del taglio.

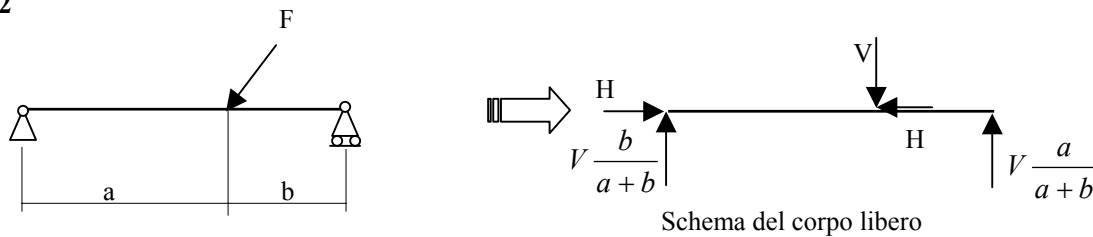
**Es.1**



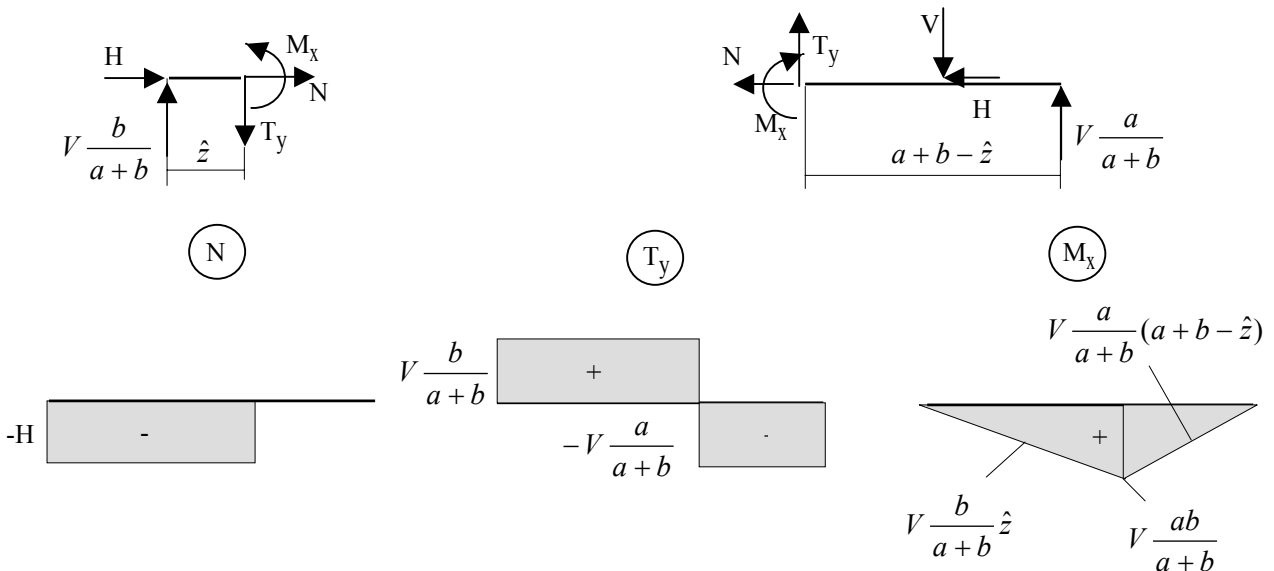
Data la trave incastrata rappresentata sopra, caricata dalle forze esterne P e Q, si procede a disegnare lo schema del corpo libero calcolando facilmente le reazioni vincolari. Considerando il sistema di riferimento convenzionale o adottando la regola del concio per i segni, si tracciano i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione lungo l'asse della trave.



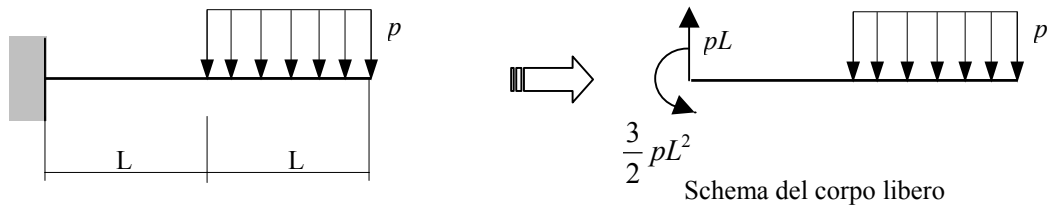
**Es.2**



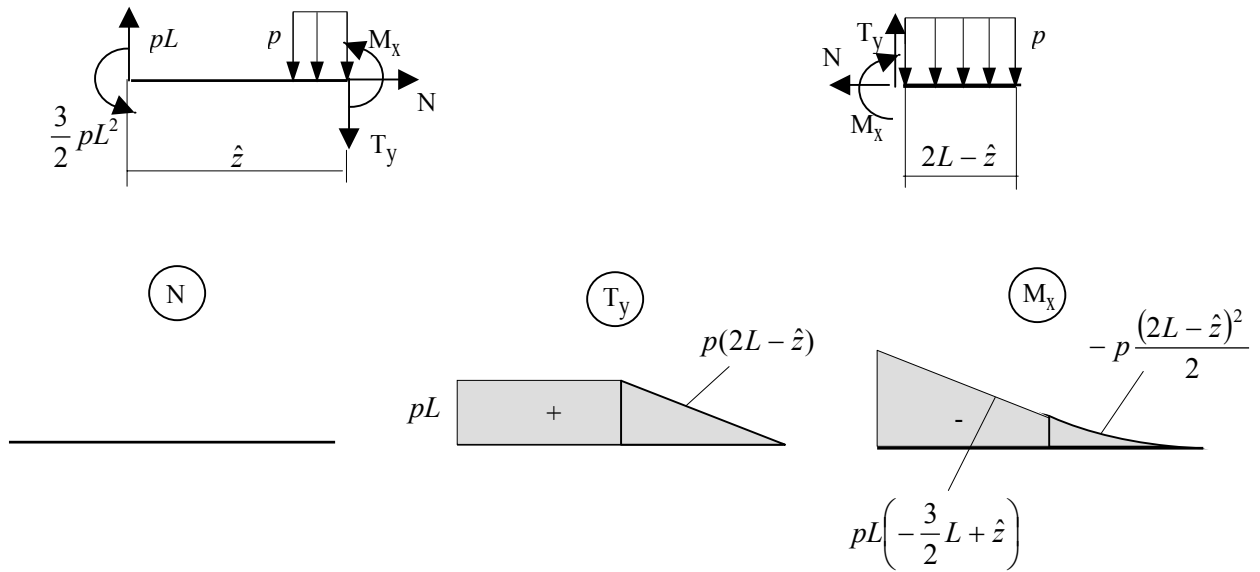
Data la trave incernierata e appoggiata rappresentata sopra, caricata dalla forza esterne F (di componenti H e V), si procede a disegnare lo schema del corpo libero calcolando facilmente le reazioni vincolari. Considerando il sistema di riferimento convenzionale o adottando la regola del concio per i segni, si tracciano i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione lungo l'asse della trave.



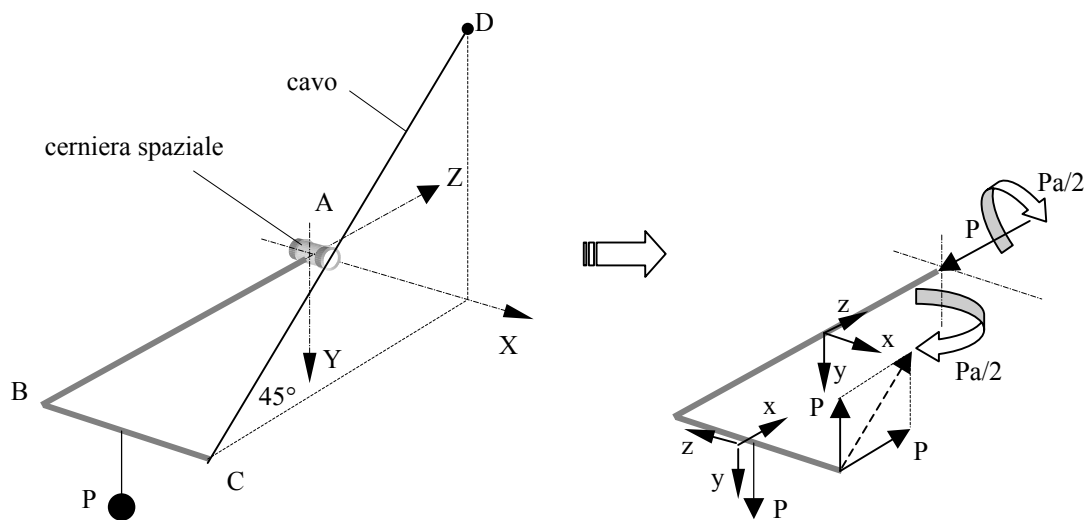
**Es.3**



Data la trave incastrata rappresentata sopra, soggetta al carico distribuito  $p$ , si procede a disegnare lo schema del corpo libero calcolando facilmente le reazioni vincolari. Considerando il sistema di riferimento convenzionale o adottando la regola del concio per i segni, si tracciano i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione lungo l'asse della trave.

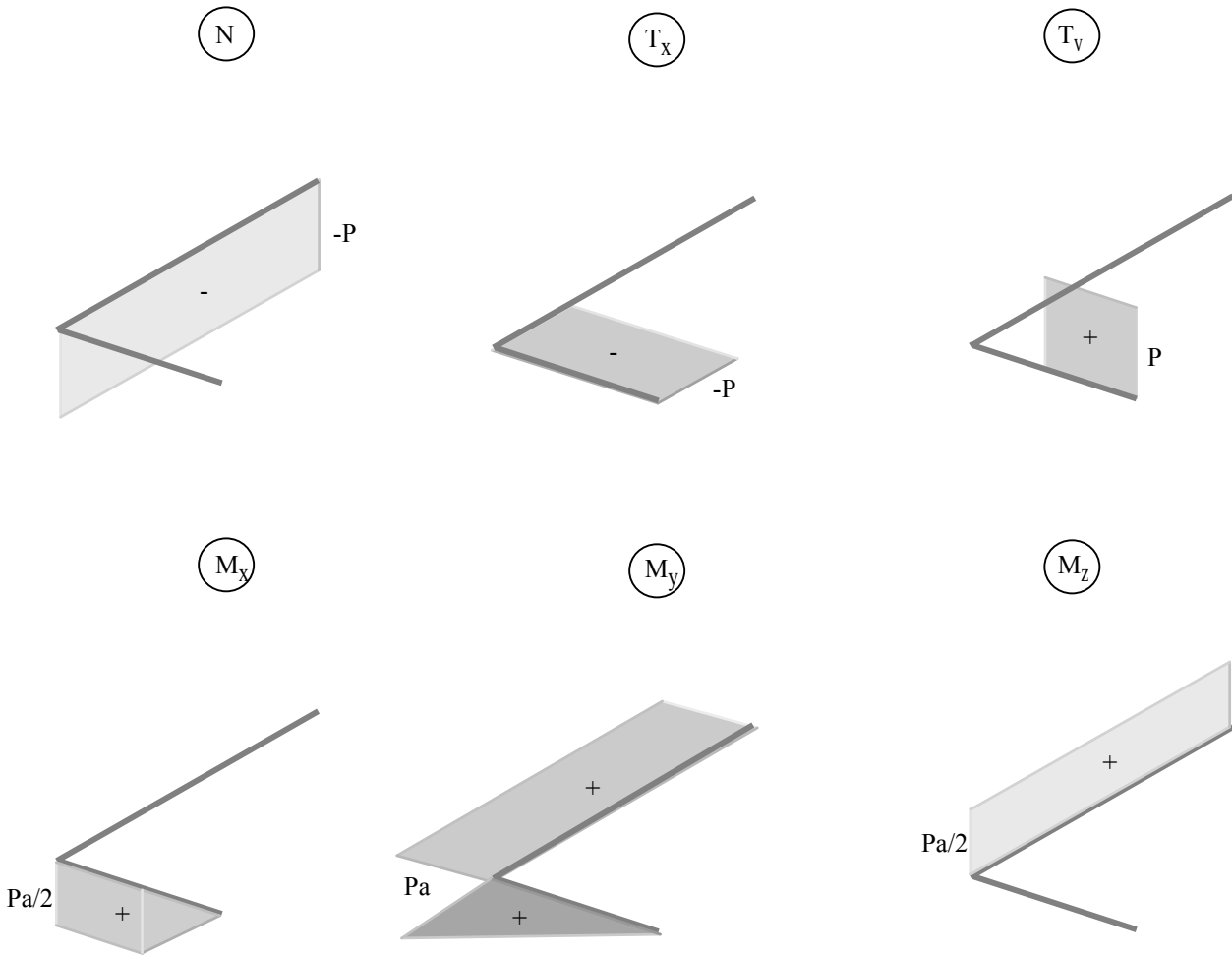


**Es.4**



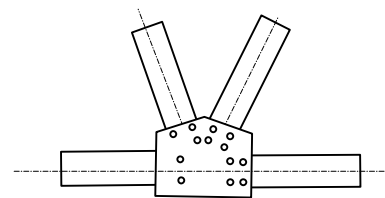
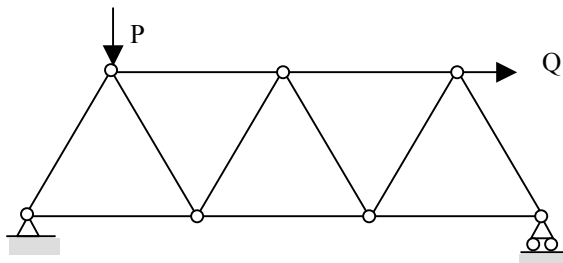
La trave ABC è vincolata alla parete in A con una cerniera spaziale mentre è vincolata alla rotazione dal cavo CD. Un peso  $P$  è applicato nella mezziera del tratto BC. AB e BC misurano rispettivamente  $2a$  e  $a$ . Si richiedono i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione della trave. Adottato un sistema di riferimento

globale (es. XYZ), si traccia innanzi tutto lo schema del corpo libero per la trave e si determinano le reazioni vincolari con le equazioni di equilibrio (si lascia allo studente l'esercizio di verificare i risultati riportati). Considerando il sistema di riferimento locale indicato (notare che segue l'asse della trave) per stabilire i segni delle caratteristiche di sollecitazione, si tracciano i diagrammi.

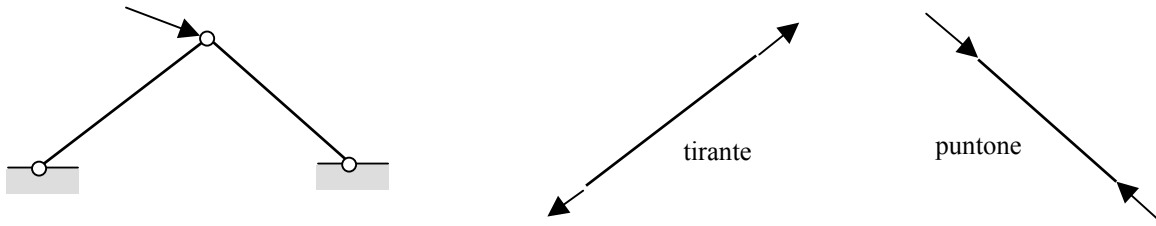


**Strutture reticolari**

Le strutture reticolari sono un insieme di travi incernierate e caricate solo agli estremi (nodi). Si considerano cerniere anche quelle giunzioni saldate o rivettate i cui assi concorrono in un punto (l'effetto dei momenti è in questo caso trascurabile).



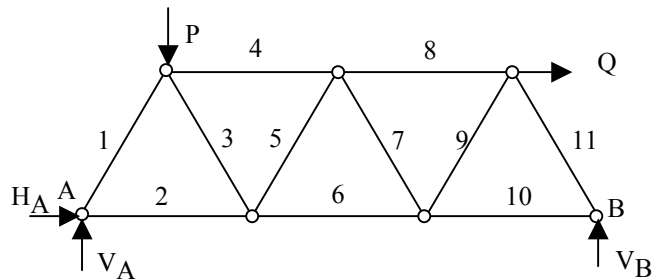
Si prenda ora in esame l'equilibrio di una singola trave incernierata e caricata solo nei nodi. Attraverso le cerniere (che non trasmettono momenti) la trave sarà caricata da due forze. Imponendo l'equilibrio alla traslazione tali forze saranno uguali e contrarie, mentre dall'equilibrio alla rotazione esse dovranno costituire una coppia a braccio nullo, cioè avranno la stessa retta d'azione, coincidente con l'asse della trave. Si può dire quindi che la trave trasmette una forza diretta come il proprio asse ed è quindi soggetta a forza normale. Comunemente la trave in queste condizioni prende il nome di **asta** e in particolare di **puntone** se soggetta a forza normale di compressione, **tirante** se di trazione. Tutto ciò vale se la trave è rettilinea.



### Calcolo semplificato di travi reticolari

Partendo dalla considerazione che si conosce la direzione delle forze agenti sulle aste si possono adottare due metodi per risolvere l'equilibrio della struttura: 1) *il metodo dei nodi* che si basa sull'equilibrio della cerniera, 2) *il metodo delle sezioni* o di Ritter che si basa sull'equilibrio della struttura a sinistra o a destra della sezione.

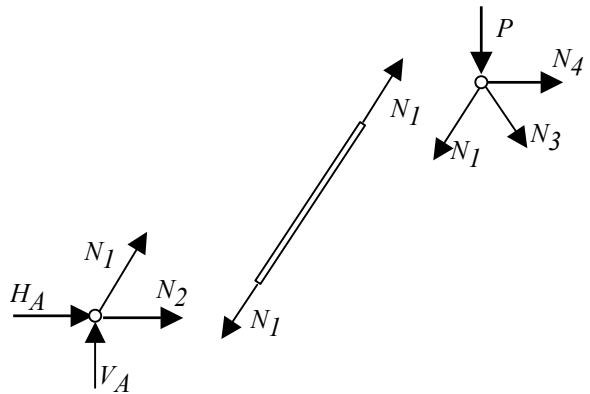
Considerando strutture isostatiche, che possono quindi essere risolte con le equazioni cardinali, il numero delle incognite è pari al numero di forze trasmesse dalle aste, cioè al numero di aste,  $m$ , più le reazioni dei supporti esterni ( $=3$  se la struttura è rigida e nel piano,  $6$  nello spazio). D'altra parte se  $n$  è il numero dei nodi,  $2n$  sono le reazioni vincolari nel piano ( $3n$  nello spazio) e quindi  $2n$  le equazioni di equilibrio dei nodi ( $3n$  nello spazio). Un controllo dell'isostaticità della struttura può essere quindi fatta con la condizione necessaria ma non sufficiente che il numero delle incognite sia uguale al numero delle equazioni.



#### Metodo dei nodi

Nel piano:

- 1) si calcolano se possibile le reazioni vincolari esterne considerando l'equilibrio globale della struttura;
- 2) partendo da un nodo su cui agisce un carico esterno e con al massimo due aste incidenti (es. nodo A su cui agiscono le forze note  $H_A, V_A$ ), si impone **l'equilibrio del nodo** ( $R_x=0, R_y=0$ ); si assegna inizialmente un verso arbitrario alle forze agenti sul nodo, considerandolo positivo se uscente dal nodo (equivale ad avere l'asta in trazione);
- 3) si muovono le forze ottenute lungo la retta di applicazione, cambiandone il verso, fino ad altro nodo con al massimo due forze incognite (es. nodo su cui agiscono  $P$  e  $N_I$ , forze note) e si ritorna al punto 2).



La singola forza ottenuta, se di segno positivo indicherà che l'asta esercita una trazione sul nodo, o viceversa che il nodo esercita su di essa una forza di trazione (principio di azione-reazione) e quindi l'asta è tesa o funge da tirante. Al contrario se la forza risulterà di segno negativo, cioè opposta al verso inizialmente scelto, vorrà dire che l'asta tende a comprimere il nodo ed è essa stessa compressa, cioè funge da puntone.

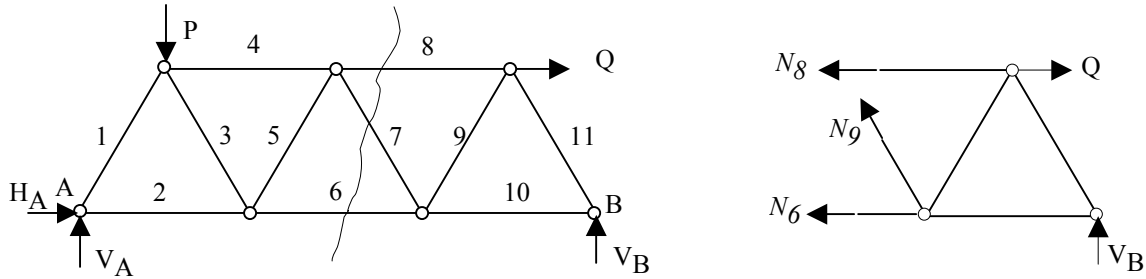
Nello spazio cambia soltanto il numero delle incognite che possono essere determinate dall'equilibrio di ogni nodo (da 2 a 3).

#### Metodo delle sezioni

E' un metodo più rapido in quanto sfrutta anche l'equazione di equilibrio alla rotazione oltre a quelle di equilibrio alla traslazione. Non c'è bisogno di procedere da nodo a nodo per determinare la singola forza incognita che può essere calcolata direttamente.

Nel piano:

- 1) si calcolano se possibile le reazioni vincolari esterne considerando l'equilibrio globale della struttura;
- 2) si sceglie opportunamente una sezione in modo da tagliare al massimo 3 aste, tra cui quella desiderata, e, considerando la struttura a destra o a sinistra della sezione e, assegnando inizialmente il verso positivo alle forze di trazione sulle aste sezionate, si impone **l'equilibrio alla traslazione e alla rotazione** della porzione di struttura considerata, tramite le tre equazioni cardinali; si determinano così le tre forze normali incognite sulle aste.



Nello spazio cambia soltanto il numero delle incognite che possono essere determinate dall'equilibrio per ogni sezione (da 3 a 6).