



**CORSO DI
PROGETTAZIONE ASSISTITA DA COMPUTER
CLM ING. DEI VEICOLI**

**PARTE I
REVO 2019 (da slides Prof.L.Bertini 2014)**

DOCENTE: Paola FORTE (titolare)

CO DOCENTE: Ciro SANTUS (ANSYS Workbench)

Dip. di Ingegneria Civile e Industriale, 1° piano

Tel. : 050-2218046

E-mail : p.forte@ing.unipi.it

CONTENUTI DEL CORSO

LEZIONI

- Basi teoriche del Metodo agli Elementi Finiti (MEF)
- Applicazione del MEF a problemi strutturali in campo elastico lineare
- Analisi critica dei risultati di un modello ad EF
- Criteri di modellazione di strutture con il MEF

ESERCITAZIONI

- Uso del programma ANSYS (Ansys Parametric Design Language APDL e WORKBENCH)
- Esempi significativi di applicazione del MEF a problemi strutturali

RICEVIMENTO

- su appuntamento

INFORMAZIONI UTILI

TESTI E LINK

- Slides
- Madenci, Guven, «The Finite Element Method and Applications in Engineering using ANSYS», Springer
- <http://www.mece.ualberta.ca/tutorials/ansys/> → tutorial
- <http://www.ansys.com/Products/Academic/ANSYS-Student>
→ download free del software versione student: Ansys Workbench & Ansys Mechanical v.19.2 (limite su dimensione modello 32knodi/elementi)
N.B. Centro di calcolo verificare compatibilità versione

MODALITÀ DI ESAME

- esercitazioni di ANSYS APDL + 1 di WORKBENCH
→ report schematici
- 1 esercitazione personalizzata e approfondita (ANSYS APDL)
→ report di 10 p
- orale: teoria e discussione elaborati
- per chi non ha seguito prova pratica di utilizzo comandi ANSYS

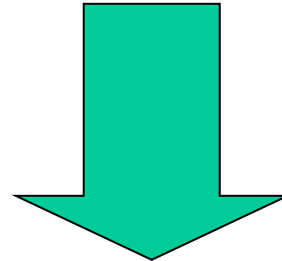
Elasticità

Elettromagnetismo

Fluidodinamica

Termodinamica

Etc...



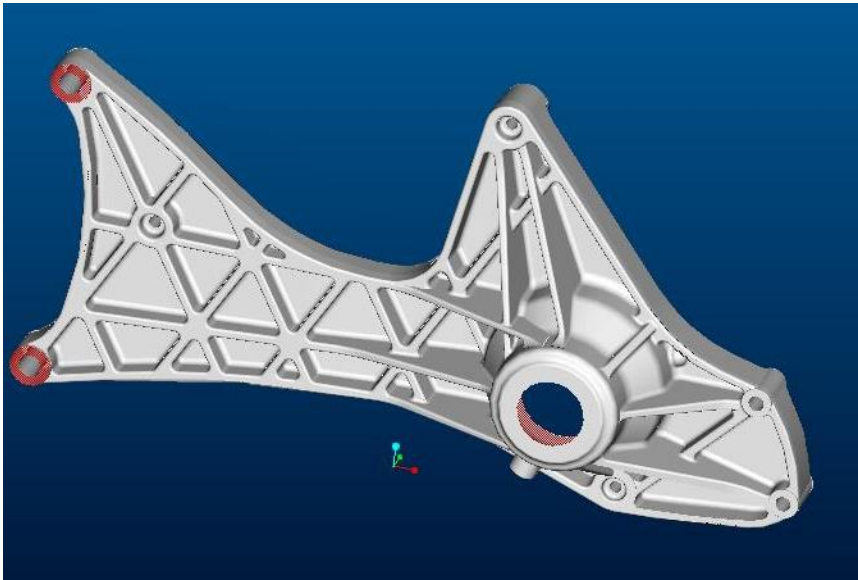
Sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali

Distribuzione di \mathbf{u} , \mathbf{B} , \mathbf{v} , T , etc.

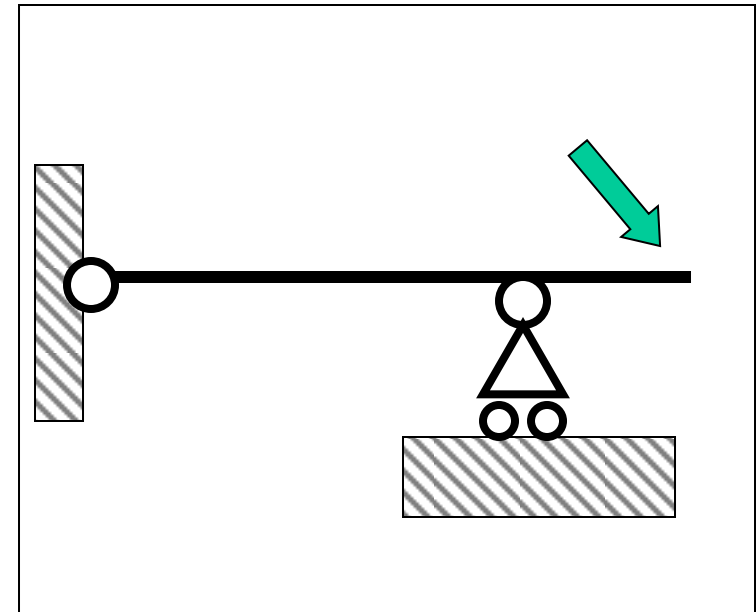
es. Eq. di Navier-Cauchy o dell'equilibrio elastico

$$\begin{cases} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{X}{G} = 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{Y}{G} = 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{Z}{G} = 0 \end{cases}$$

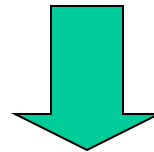
Soluzioni analitiche: solo in casi particolari, introducendo rilevanti semplificazioni (travi, piastre, gusci...)



staffa sospensione di scooter



modello trave



Sviluppo di tecniche di soluzione **approssimate**



Metodi di soluzione approssimata:

- Differenze finite
- Elementi Finiti
- Elementi al contorno
- Metodo delle celle
- ...

Il Metodo degli Elementi Finiti (MEF) è oggi di gran lunga il più diffuso, soprattutto a causa della sua estrema versatilità

Idea centrale del MEF (e delle altre tecniche approssimate):

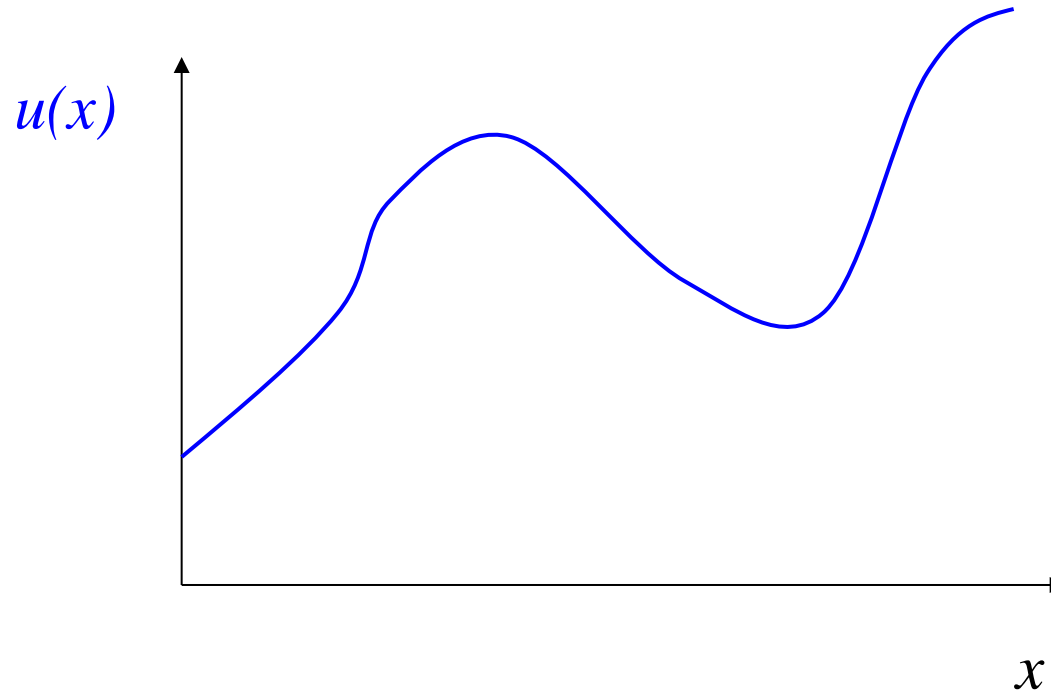
Problema originale: determinare le f.ni incognite
 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$

$$\begin{cases} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{X}{G} = 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{Y}{G} = 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{Z}{G} = 0 \end{cases}$$

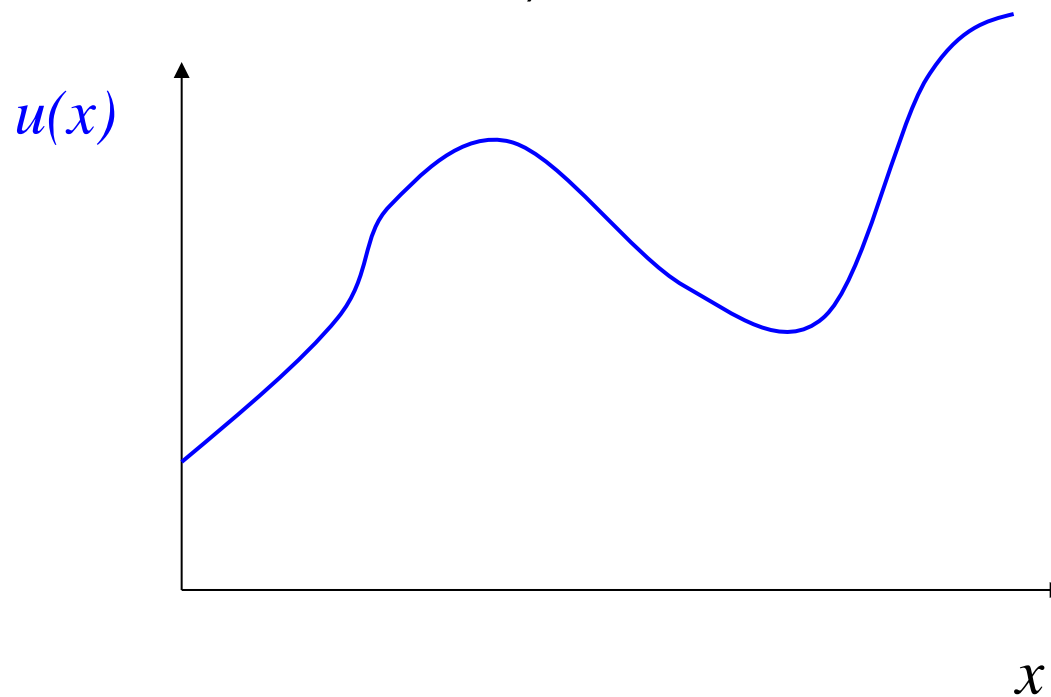
Problema sostitutivo: determinare delle funzioni sostitutive che approssimino u , v e w con un errore accettabile ai fini pratici e siano relativamente facili da calcolare



Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale)



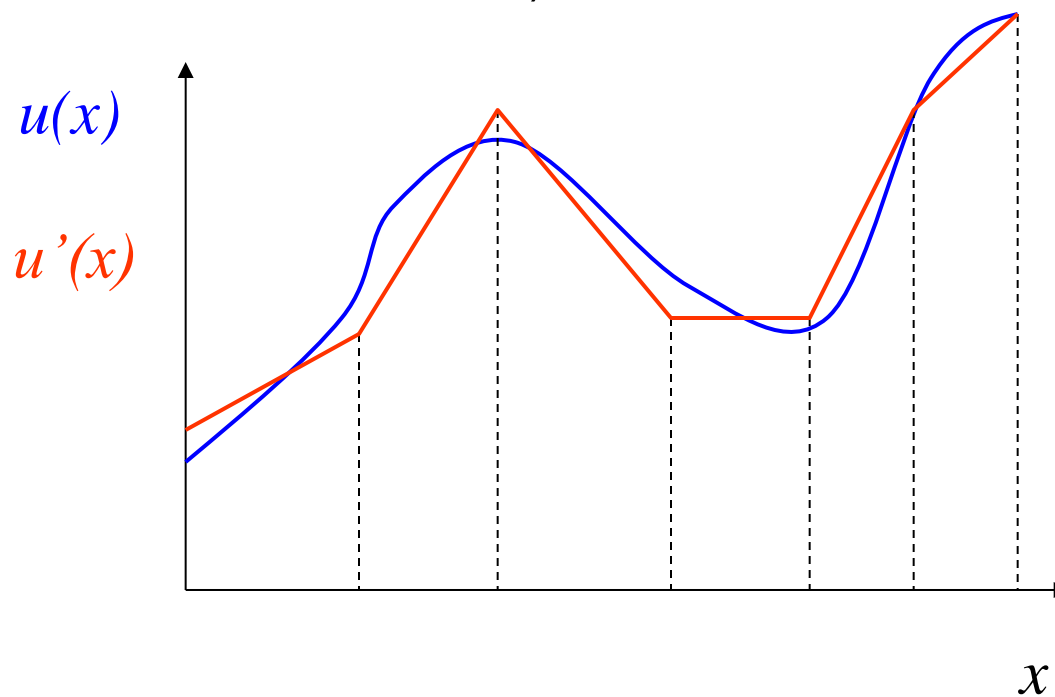
Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale- x)



F.ne sostitutiva $u'(x)$:

- espressione matematica semplice
- nota ovunque una volta noto il valore di un n° finito di parametri

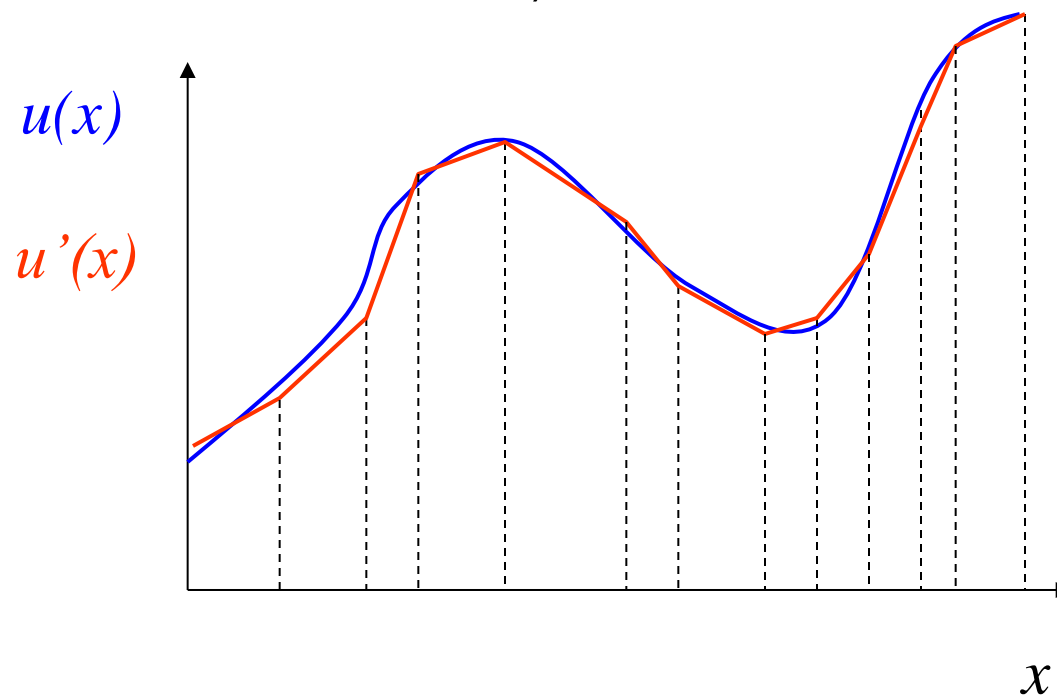
Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale- x)



F.ne sostitutiva $u'(x)$:

- espressione matematica semplice (es. spezzata)
- nota ovunque una volta noto il valore di un n° finito di parametri (es. valore agli estremi degli intervalli)

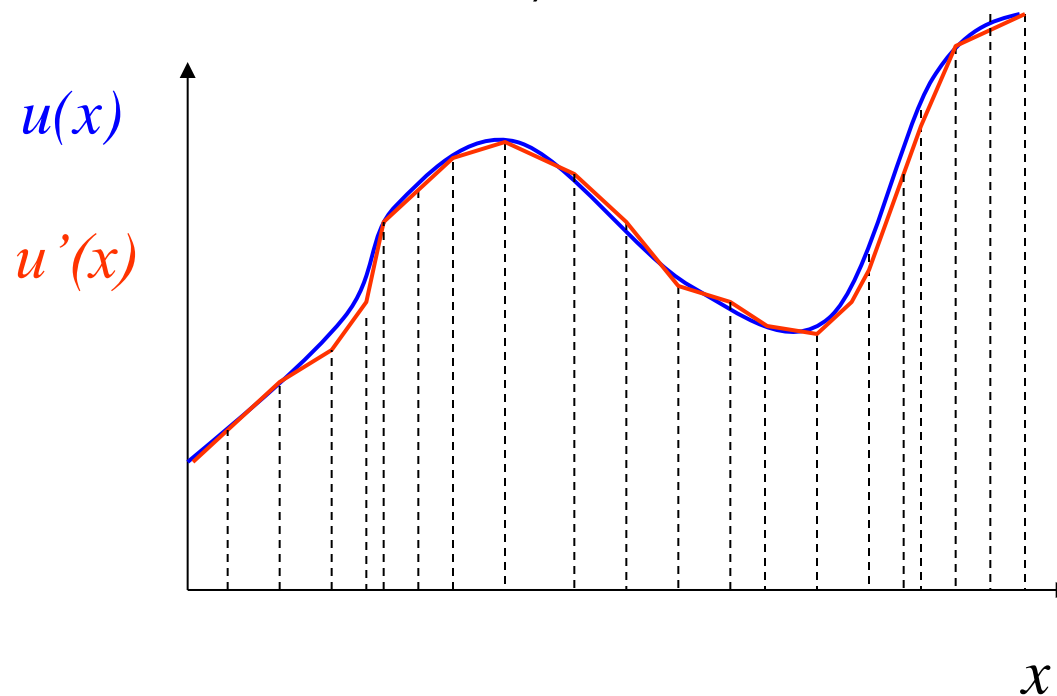
Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale- x)



F.ne sostitutiva $u'(x)$:

- espressione matematica semplice (es. spezzata)
- nota ovunque una volta noto il valore di un n° finito di parametri (es. valore agli estremi degli intervalli)

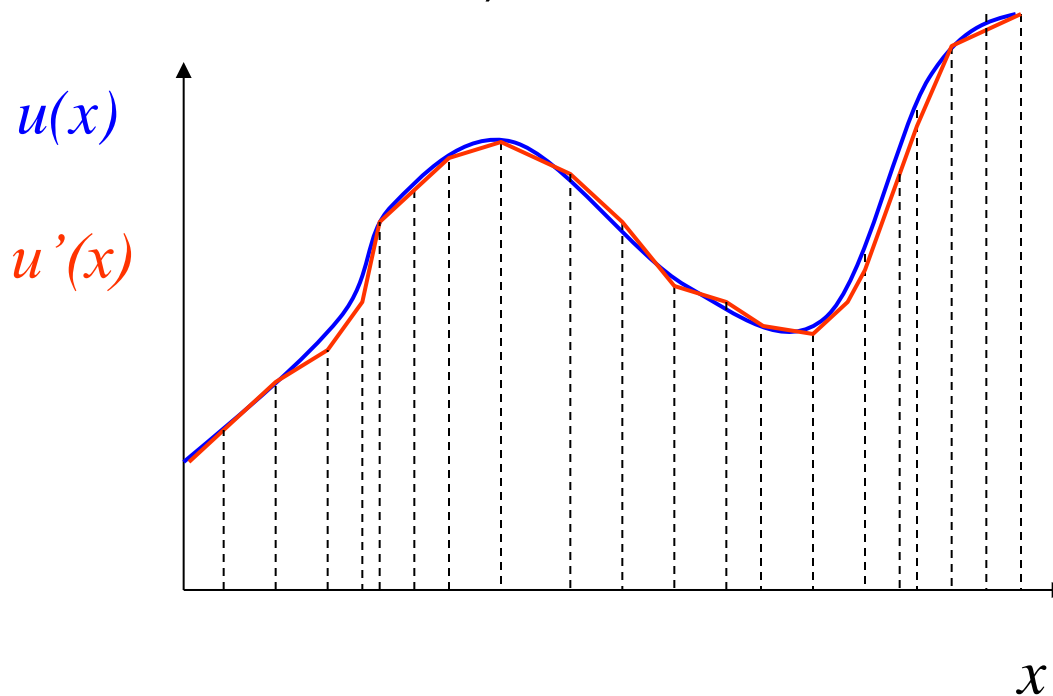
Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale-x)



F.ne sostitutiva $u'(x)$:

- espressione matematica semplice (es. spezzata)
- nota ovunque una volta noto il valore di un n° finito di parametri (es. valore agli estremi degli intervalli)

Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale)



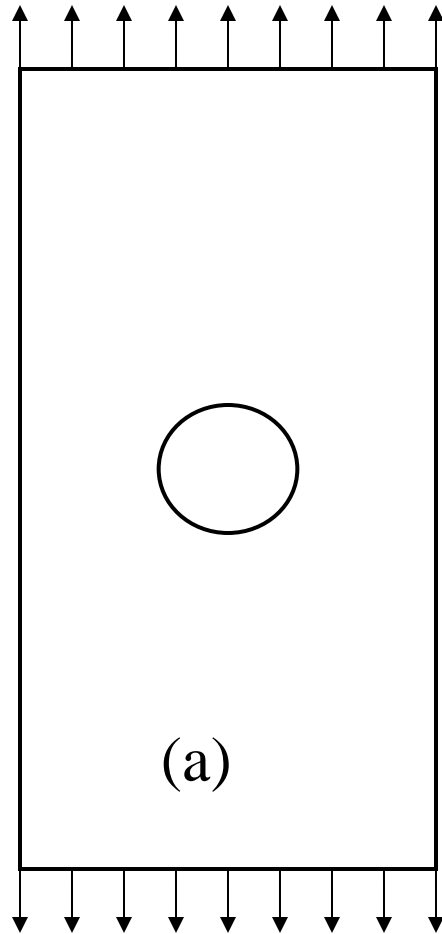
F.ne sostitutiva $u'(x)$:

- espressione matematica semplice (es. spezzata)
- nota ovunque una volta noto il valore di un n° finito di parametri (es. valore agli estremi degli intervalli)

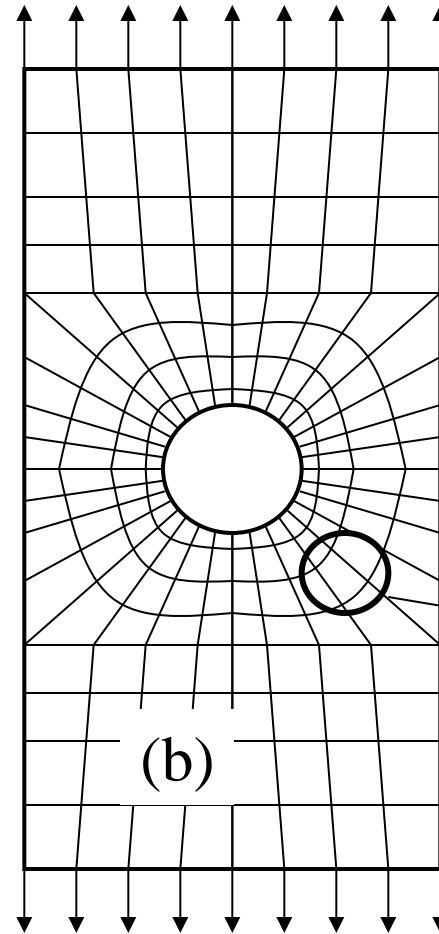
Oss.ni:

- necessario assicurare la **convergenza** ($u'(x) \rightarrow u(x)$)
- soluzione affetta da **errori**

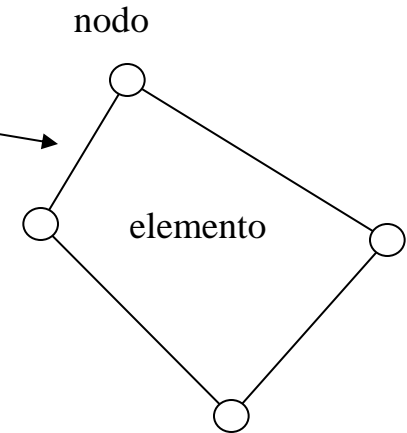
Discretizzazione di un solido per determinare $u(x,y)$



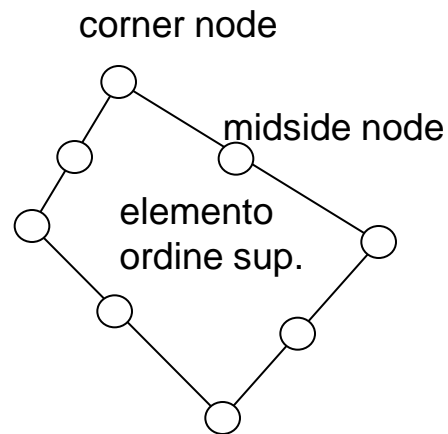
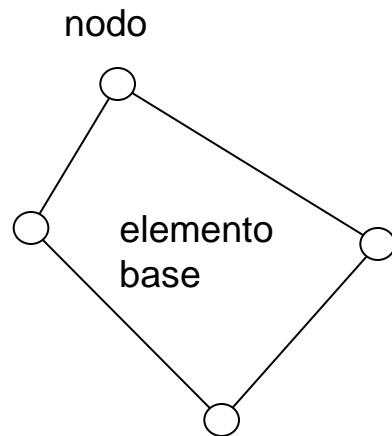
Struttura



Modello ("mesh")



Esempi di elementi piani con diverse disposizioni dei nodi



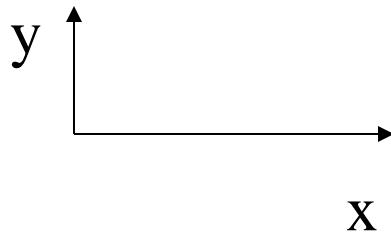
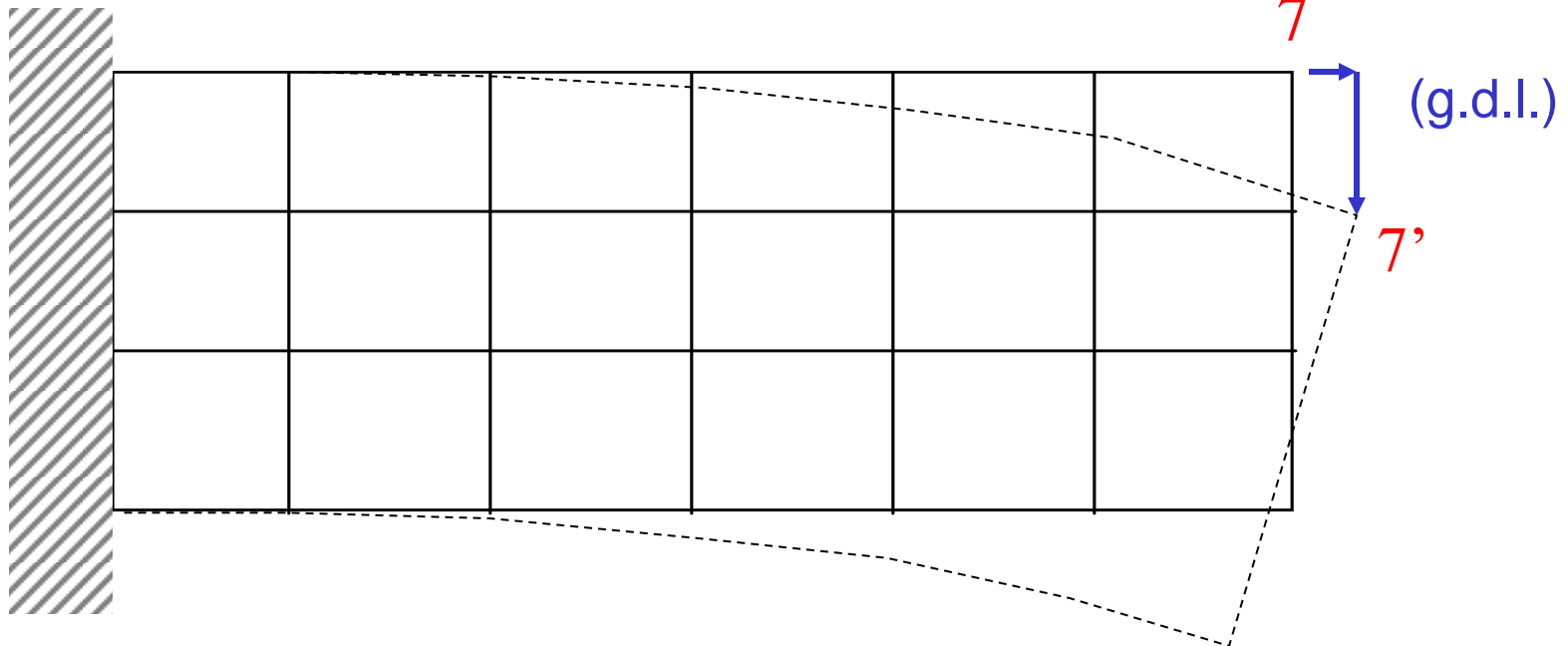
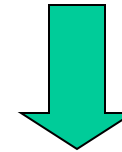
Nodi ed elementi identificati da un numero univoco

	1	2	3	4	5	6	7
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	
8		9	10	11	12	13	14
	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	
15		16	17	18	19	20	21
	<i>13</i>	<i>14</i>	<i>15</i>	<i>16</i>	<i>17</i>	<i>18</i>	
22		23	24	25	26	27	28

$i = n^{\circ}$ di nodo

$i = n^{\circ}$ di elemento

Gradi di libertà (g.d.l.)

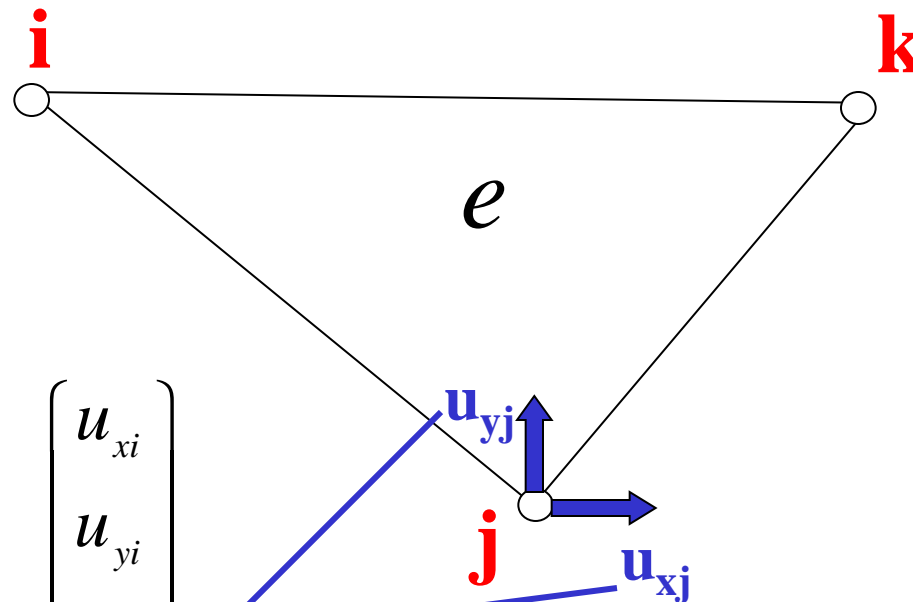


- N° g.d.l./nodo varia da 2 a 6 secondo:
- tipo di elemento
 - natura problema

$$N^{\circ} \text{ totale g.d.l.} = N^{\circ} \text{ g.d.l./nodo} * N^{\circ} \text{ nodi}$$

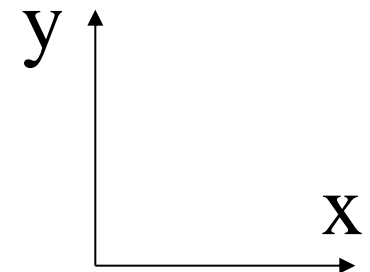
Studio del comportamento meccanico del singolo elemento

Elemento piano per problemi 2D



$$\begin{Bmatrix} U^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \\ u_5^e \\ u_6^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ u_{xk} \\ u_{yk} \end{Bmatrix}$$

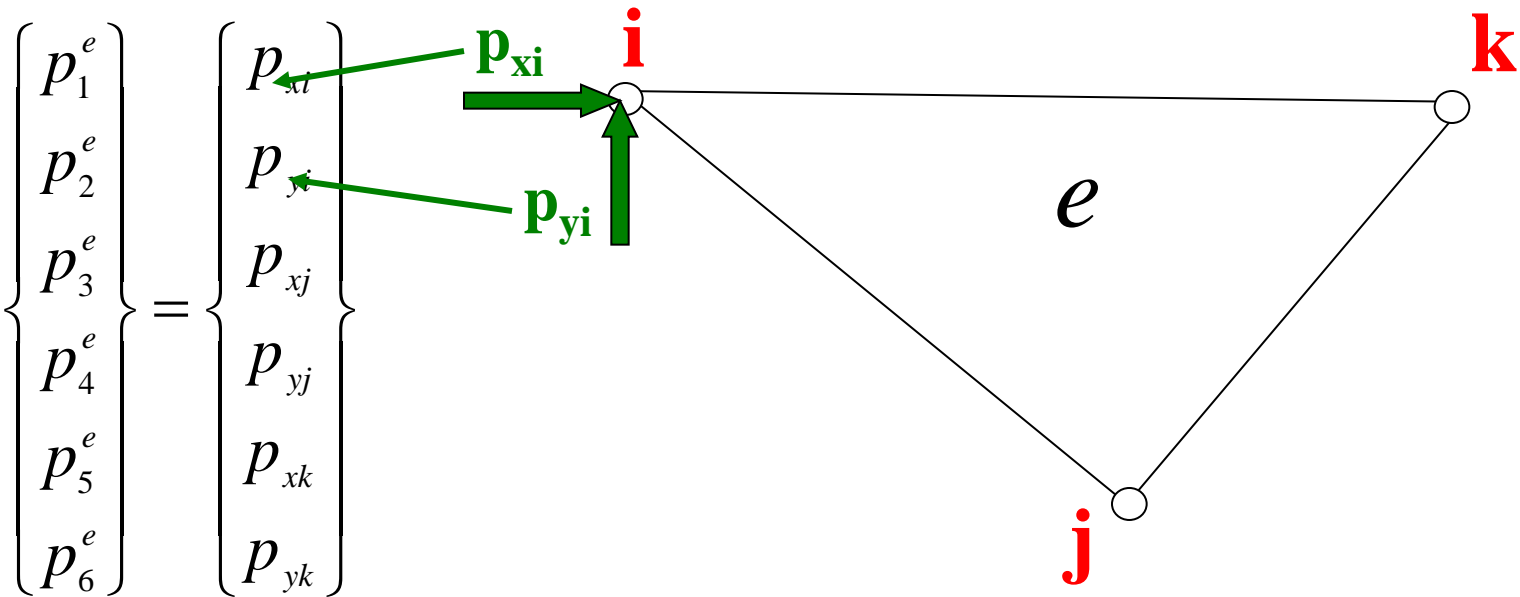
$\{U^e\}$ è il vettore spostamento composto dalle componenti relative ai 6 g.d.l. dell'elemento e



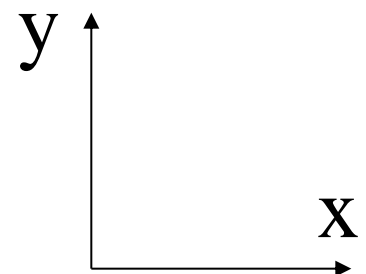
Studio del comportamento meccanico del singolo elemento

Elemento piano per problemi 2D

CdL Magistrale in Ingegneria dei Veicoli

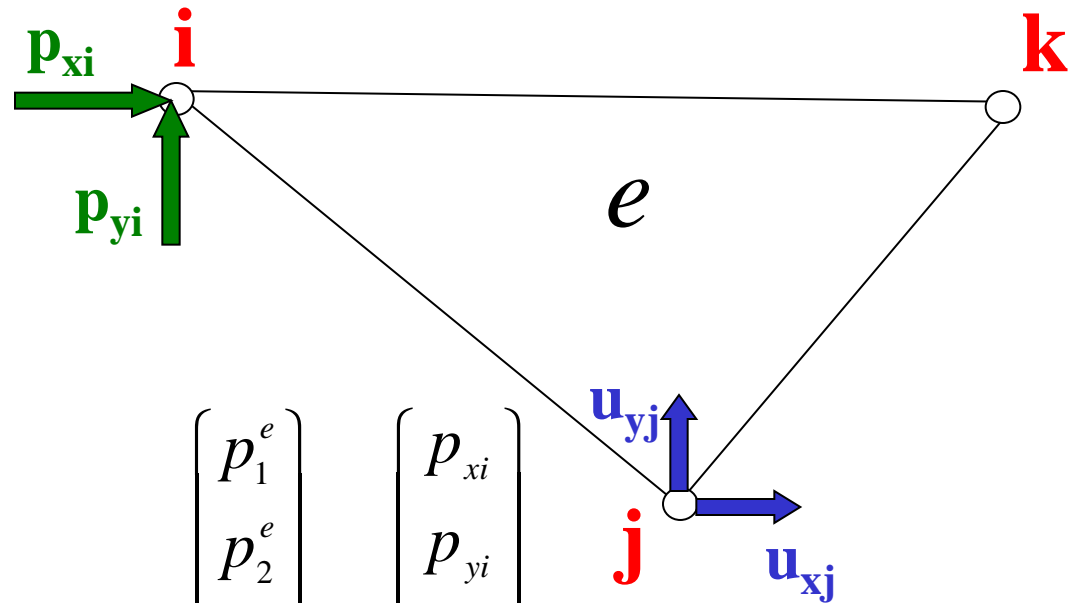


$\{P^e\}$ è il vettore contenente tutti i 6 carichi nodali



Studio del comportamento meccanico del singolo elemento

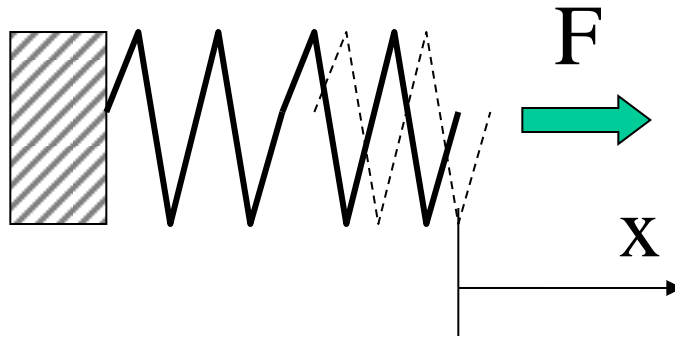
Elemento piano per problemi 2D



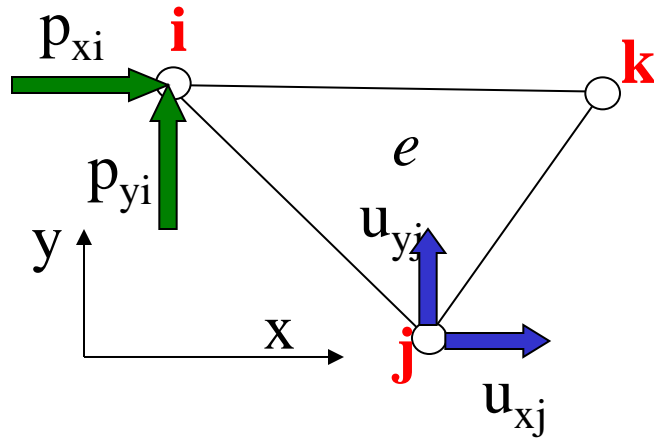
$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \\ u_5^e \\ u_6^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ u_{xk} \\ u_{yk} \end{Bmatrix} \quad \{P^e\} = \begin{Bmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \\ p_5^e \\ p_6^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{xi} \\ p_{yi} \\ p_{xj} \\ p_{yj} \\ p_{xk} \\ p_{yk} \end{Bmatrix}$$

$$\{U^e\} \xrightarrow{?} \{P^e\}$$

Elemento = molla "multidimensionale"



$$F = k x$$




$$\{P^e\} = [K^e] \cdot \{U^e\}$$

Studio condotto in campo lineare:

$$\left\{ P^e \right\} = \left[K^e \right] \cdot \left\{ U^e \right\}$$

6×1 6×6 6×1



Matrice di rigidità dell'elemento

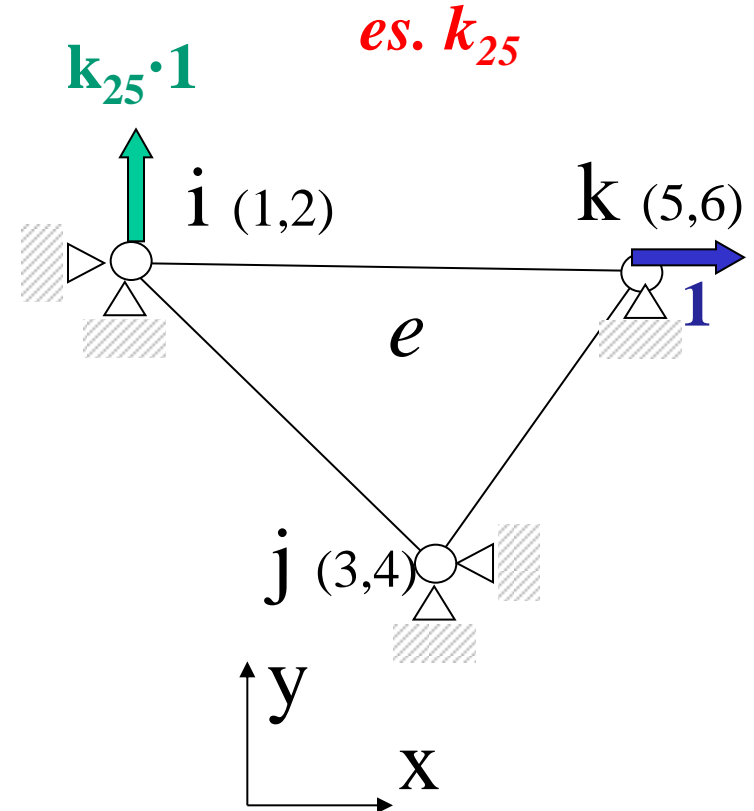


Significato fisico dei termini della matrice $[K^e]$

Il termine $k_{m,n}$ di $[K^e]$ è pari alla reazione vincolare presente secondo il grado di libertà "m" ($m=1,..6$), se si applica un sistema di spostamenti nodali in cui tutte le componenti sono nulle tranne la "n-esima" che assume valore pari ad 1 (METODO DEGLI SPOSTAMENTI)

$$p_m^e = \sum_{n=1}^6 k_{m,n}^e u_n^e$$

"peso" di u_n nel contribuire a p_m





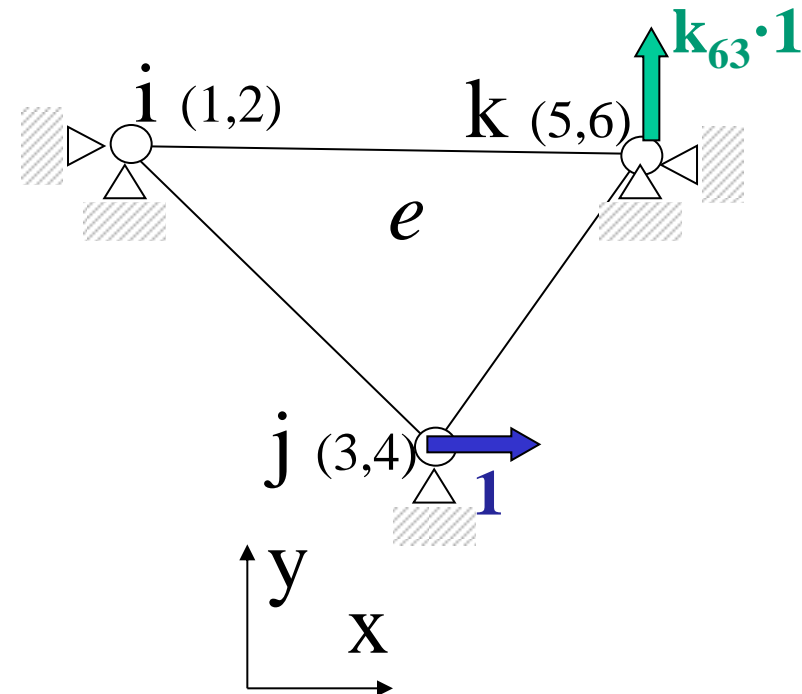
Significato fisico dei termini della matrice $[K^e]$

Il termine $k_{m,n}$ di $[K^e]$ è pari alla reazione vincolare presente secondo il grado di libertà “ m ” ($m=1,..6$), se si applica un sistema di spostamenti nodali in cui tutte le componenti sono nulle tranne la “ n -esima” che assume valore pari ad 1

es. k_{63}

$$p_m^e = \sum_{n=1}^6 k_{m,n}^e u_n^e$$

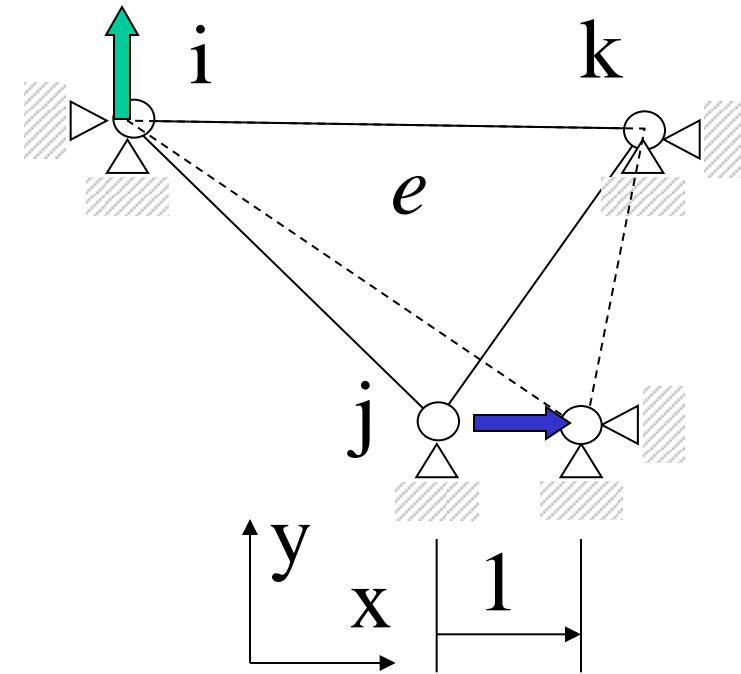
“peso” di u_n nel contribuire a p_m



es. si impone $u_3=1$

$$\begin{Bmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \\ p_5^e \\ p_6^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

The diagram shows a 6x6 stiffness matrix k and a 6x1 displacement vector u . A red oval highlights the second row of the matrix and the second element of the vector. A green oval highlights the third element of the vector, which is 1. A dashed green vertical line is drawn through the third column of the matrix. Green arrows point to the top and bottom of this dashed line.



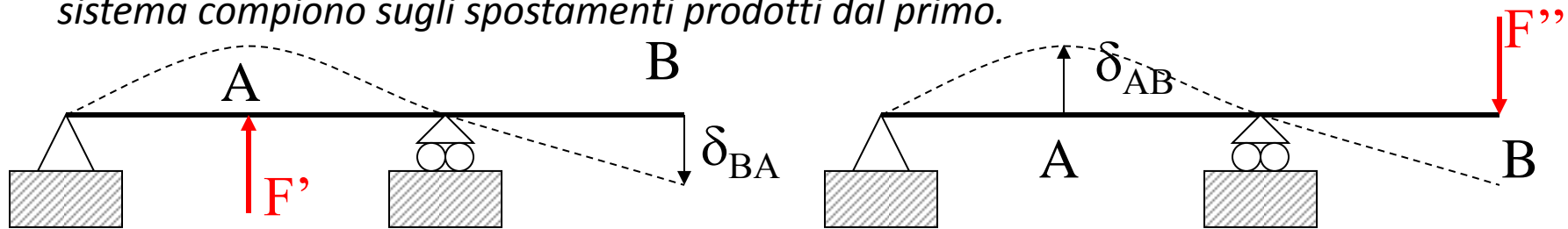
$$p_2^e = k_{21} \cdot 0 + k_{22} \cdot 0 + k_{23} \cdot 1 + \dots + k_{26} \cdot 0 = k_{23}$$

$$p_1^e = k_{13}; \quad p_3^e = k_{33}; \quad p_4^e = k_{43} \dots$$

analogamente per altri u_i

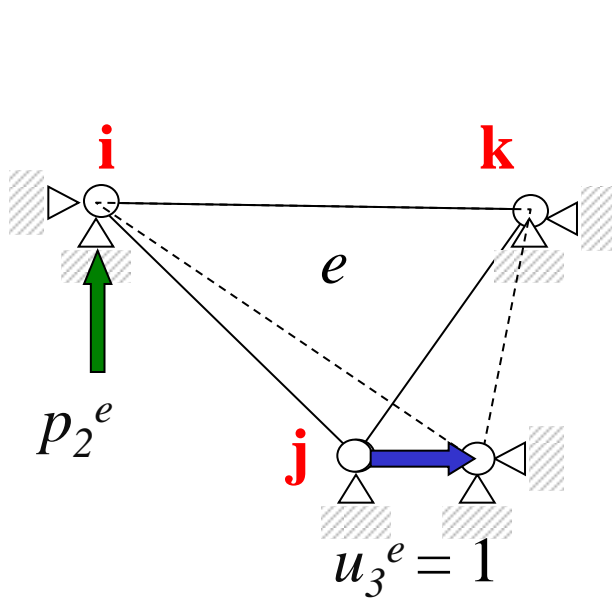
Teorema di reciprocità (Betti → Maxwell)

Dati 2 sistemi equilibrati di forze, il lavoro che le forze del primo sistema compiono sugli spostamenti causati dal secondo è uguale al lavoro che le forze del secondo sistema compiono sugli spostamenti prodotti dal primo.



$$F' \delta_{AB} = F'' \delta_{BA}$$

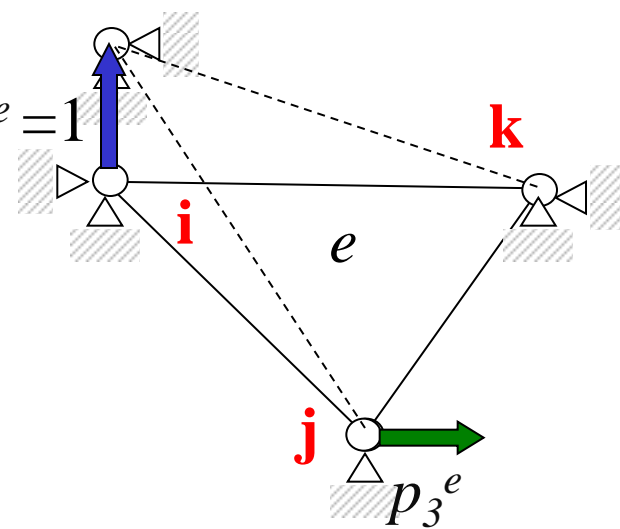
$$\text{se } F' = F'' \leftrightarrow \delta_{AB} = \delta_{BA}$$



$$p_2^e u_3^e = p_3^e u_2^e$$

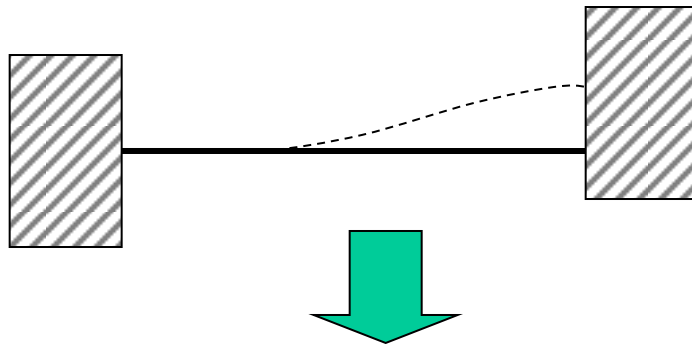
$$k_{23} = k_{32}$$

$[K^e]$ simmetrica



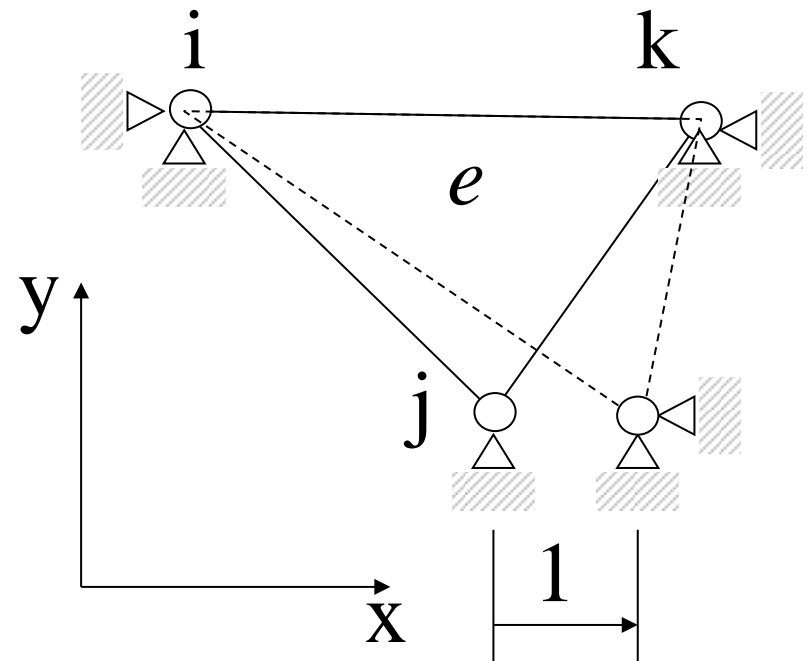
Valutazione di $[K^e]$

In casi semplici è possibile calcolare le reazioni vincolari in presenza di “cedimenti vincolari” dei nodi (Es. elementi asta, trave)



si ottengono immediatamente le

$$k_{m,n}^e$$



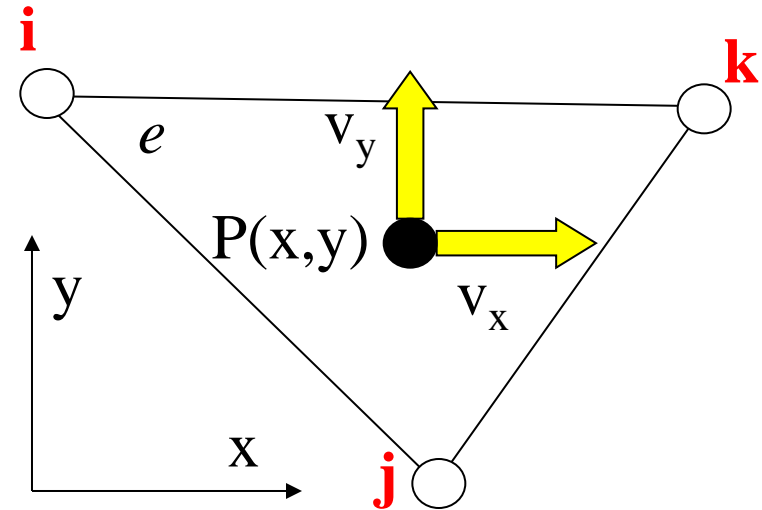
In generale, questa procedura non è praticabile per un elemento di forma generica

Spostamenti nei punti interni all'elemento

$$\{u(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{Bmatrix} = [N^e(x, y)] \cdot \{U^e\}$$

2×1 2×1 2×6 6×1

F.ni di forma ("shape functions")



$$u_x(x, y) = \sum_{l=1}^6 N_{1l}^e(x, y) \cdot u_l$$

$$u_y(x, y) = \sum_{l=1}^6 N_{2l}^e(x, y) \cdot u_l$$

Ogni f.ne di forma rappresenta il "peso" (dipendente dalla posizione di P) che ciascuna componente di spostamento nodale ha nel determinare lo spostamento di P

Pb: - che forma matematica dare alle $N^e(x, y)$?
 - come determinare le $N^e(x, y)$?

Matrice delle funzioni di forma

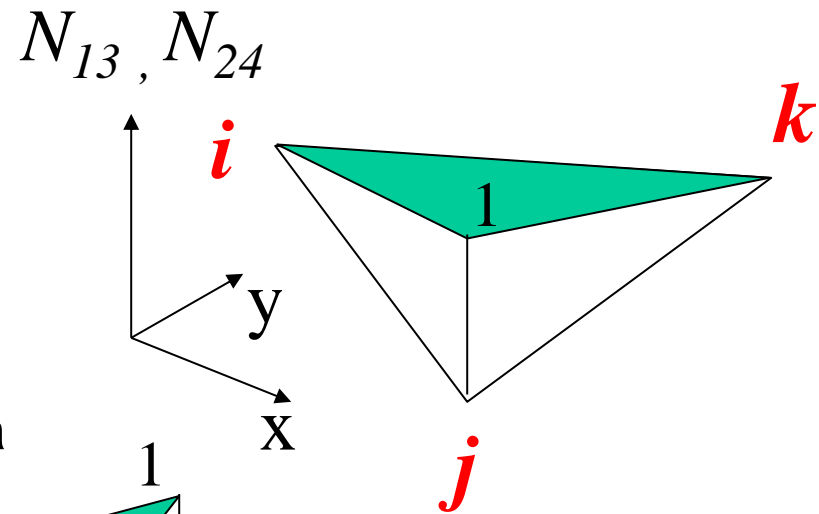
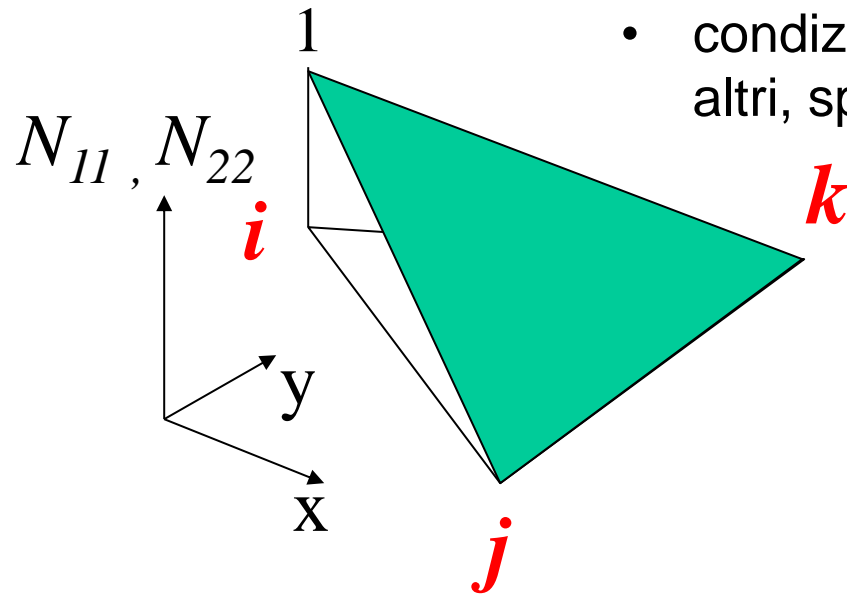
$$\underbrace{\{u(x, y)\}}_{2 \times 1} = \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{Bmatrix}}_{2 \times 1} = \underbrace{[N^e(x, y)]}_{2 \times 6} \cdot \underbrace{\{U^e\}}_{6 \times 1}$$

$$\begin{bmatrix} N_{11}(x, y) & 0 & N_{13}(x, y) & 0 & N_{15}(x, y) & 0 \\ 0 & N_{22}(x, y) = N_{11}(x, y) & 0 & N_{24}(x, y) = N_{13}(x, y) & 0 & N_{26}(x, y) = N_{15}(x, y) \end{bmatrix}$$

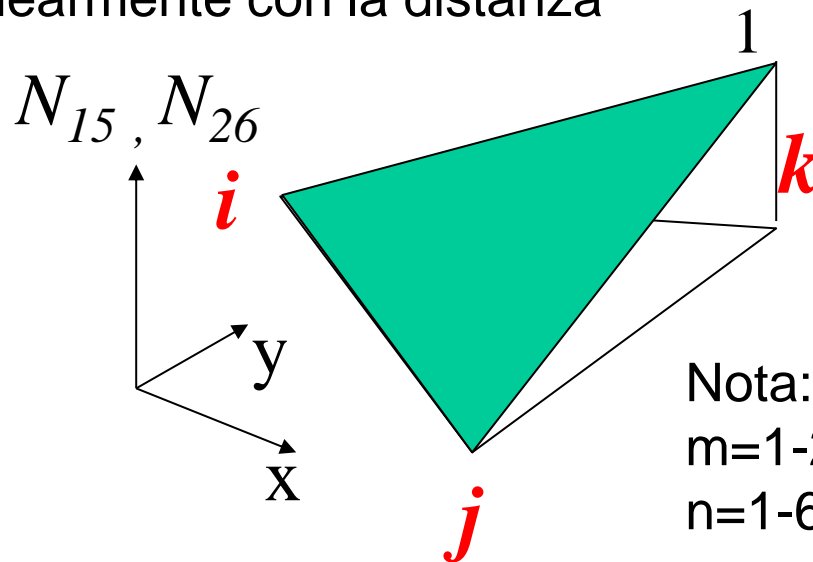
u_x e u_y scorrelati (piccole def.)

stesso andamento u_x e u_y

- es. funzioni di forma lineari
- condizioni: spost.nodo indipendente dagli altri, spost sui bordi dip. solo da nodi estremi



- il peso dello spostamento nodale decresce linearmente con la distanza dal nodo



Nota: N_{mn}
 $m=1-2 \rightarrow u_x, u_y$
 $n=1-6 \rightarrow u_x, u_y$ dei 3 nodi

$$N_{lm}^e(x, y) = A_{lm} + B_{lm} \cdot x + C_{lm} \cdot y$$

come determinare coefficienti funz. forma?

3 per ogni funz. → 3 condizioni ai nodi i, j, k

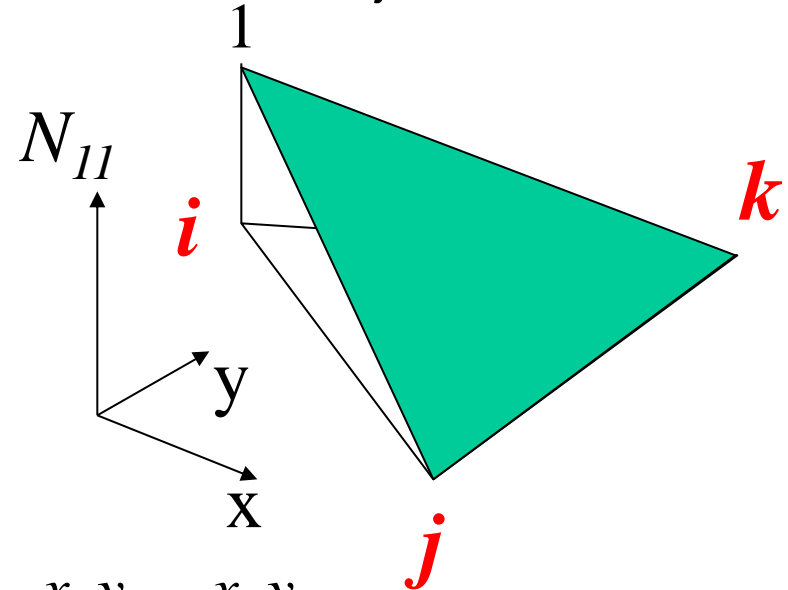
$$\begin{cases} N_{11}(x_i, y_i) = 1 \\ N_{11}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{11}(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$



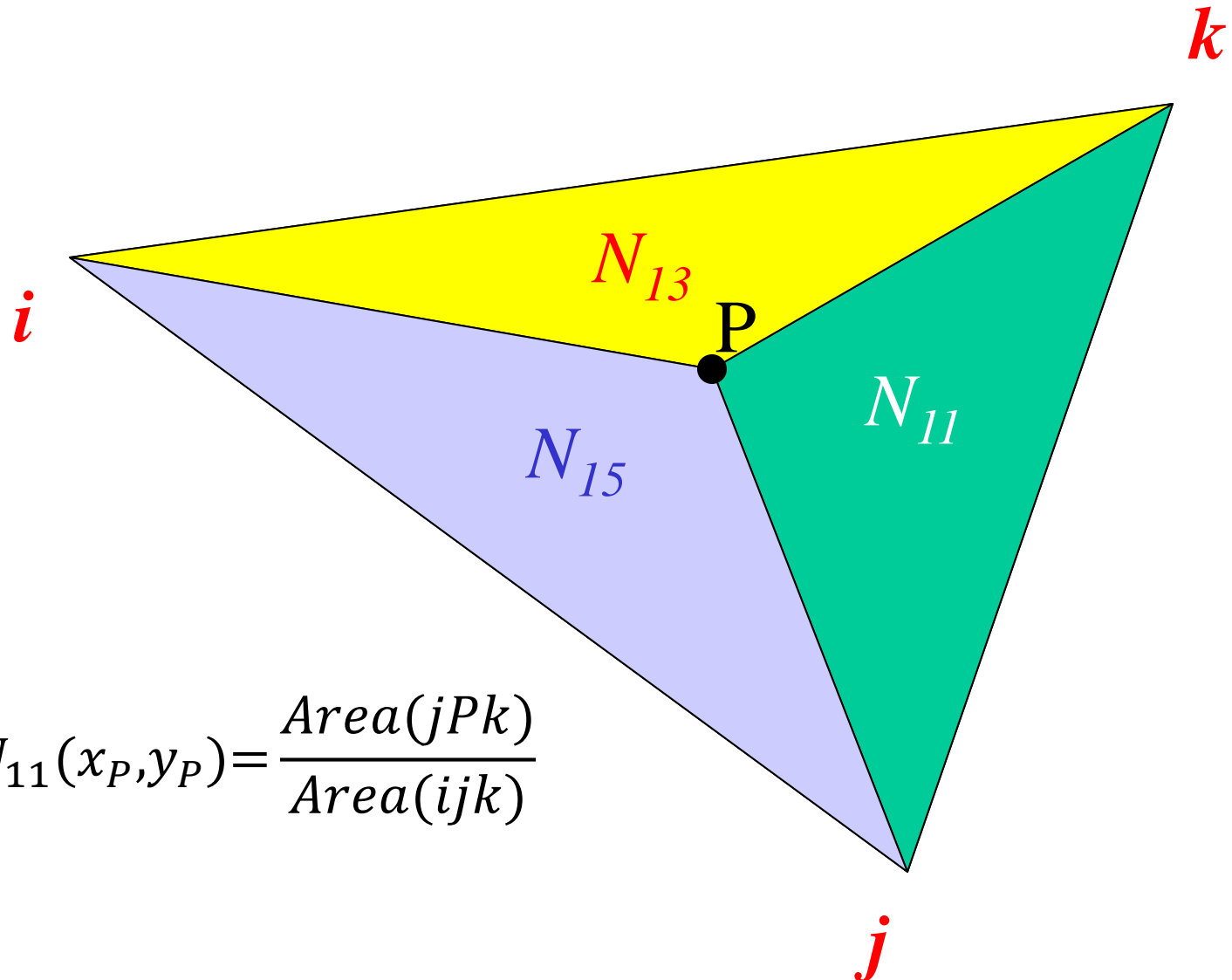
$$\begin{cases} A_{11} + B_{11}x_i + C_{11}y_i = 1 \\ A_{11} + B_{11}x_j + C_{11}y_j = 0 \\ A_{11} + B_{11}x_k + C_{11}y_k = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} A_{11} = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{\Delta} \\ B_{11} = \frac{y_j - y_k}{\Delta} \\ C_{11} = \frac{x_k - x_j}{\Delta} \end{cases} \quad \Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$



Interpretazione geometrica



$$N_{11}(x_P, y_P) = \frac{\text{Area}(jPk)}{\text{Area}(ijk)}$$

Calcolo delle deformazioni

Spostamenti

congruenza

Deformazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{array} \right\} = [L]\{u(x, y)\}$$



$$\{\varepsilon(x, y)\} = [L]\{u(x, y)\}$$

3x1

3x2

2x1

$$\{u(x, y)\} = [N(x, y)]\{U^e\}$$

2x1

2x6

6x1

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{U^e\} = [B]\{U^e\}$$

3x1

3x6 6x1

Contenuto matrice [B]

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & N_{24} & 0 & N_{26} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{13}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{15}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{22}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_{24}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_{26}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{11}}{\partial y} & \frac{\partial N_{22}}{\partial x} & \frac{\partial N_{13}}{\partial y} & \frac{\partial N_{24}}{\partial x} & \frac{\partial N_{15}}{\partial y} & \frac{\partial N_{26}}{\partial x} \end{bmatrix}$$



$$N_{11} = A_{11} + B_{11}x + C_{11}y$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x} = B_{11} = \frac{y_j - y_k}{\Delta}$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial y} = C_{11} = \frac{x_k - x_j}{\Delta}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} & 0 & C_{26} \\ C_{11} & B_{22} & C_{13} & B_{24} & C_{15} & B_{26} \end{bmatrix}$$

N.B.: La matrice [B] in questo caso contiene solo costanti, dato che le f.ni di forma sono lineari. Nel caso di f.ni di forma di ordine superiore al primo la matrice [B] conterrebbe funzioni in (x,y)

Relazioni costitutive

Esempio 1: stato piano di tensione, materiale elastico, lineare, omogeneo, isotropo

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \\ \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} \\ \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

Relazioni costitutive

Esempio 2: stato piano di deformazione, materiale elastico, lineare, omogeneo, isotropo

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

Valutazione di $[K^e]$

Principio dei Lavori Virtuali

Dato un sistema di forze e tensioni equilibrato e un sistema di spostamenti e deformazioni congruente, il lavoro che le forze esterne del primo sistema compiono sugli spostamenti del secondo è uguale al lavoro che le tensioni interne del primo sistema compiono sulle deformazioni del secondo.

$$L_{est} = L_{int}$$

*Carichi nodali veri ·
spost.nodali virtuali*

*Tensioni vere
·deformazioni virtuali*

Valutazione di $[K^e]$

Principio dei Lavori Virtuali

$$L_{est} = L_{int}$$

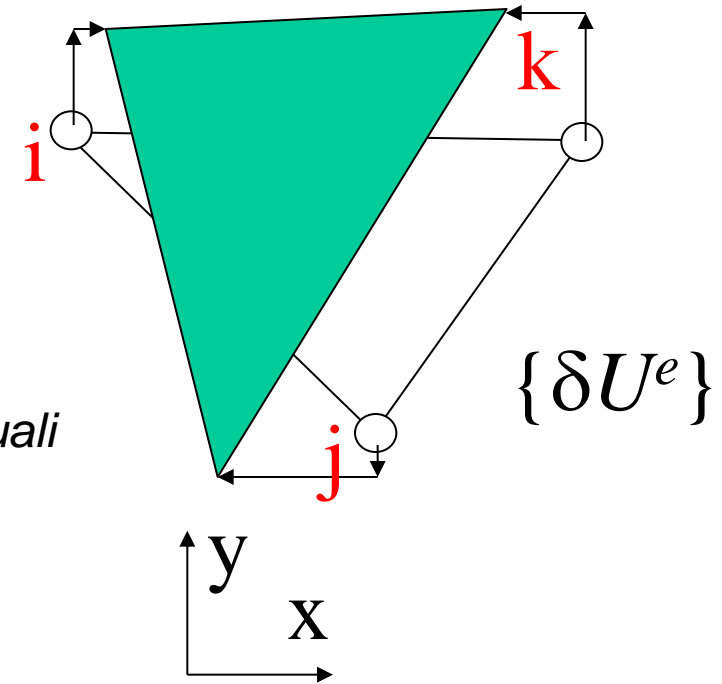
Carichi nodali veri · spost.nodali virtuali

Tensioni vere · deformazioni virtuali

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\}$$

Spost. virtuali

Carichi effettivi

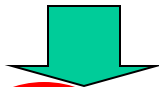




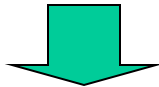
$$L_{\text{int}} = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

$$\{\delta\varepsilon\} = [B]\{\delta U^e\}$$

$$\{\delta\varepsilon\}^T = \{\delta U^e\}^T [B]^T$$

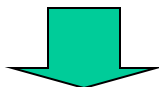


$$L_{\text{int}} = \int_V \{\delta U^e\}^T [B]^T \{\sigma\} dV = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV$$



$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$L_{\text{int}} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D]\{\varepsilon\} dV$$



$$\{\varepsilon\} = [B]\{U^e\}$$

$$L_{\text{int}} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D][B]\{U^e\} dV = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D][B] dV \{U^e\}$$

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\}$$

$$L_{int} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D][B] dV \{U^e\}$$

$$\{\delta U^e\}^T \{P^e\} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D][B] dV \{U^e\}$$

affinché l'uguaglianza sia valida per qualunque spostamento virtuale deve valere

$$\{P^e\} = \int_V [B]^T [D][B] dV \{U^e\}$$

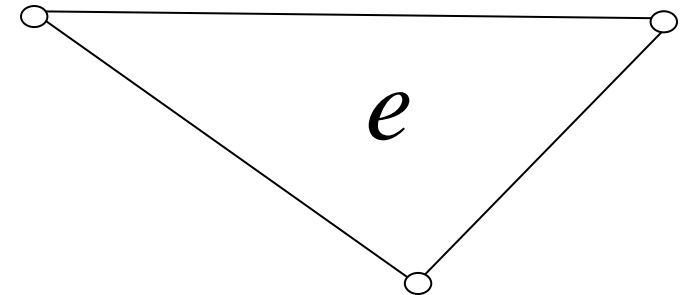
$$\{P^e\} = [K^e] \{U^e\}$$

Applicazione

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D][B] dV$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} & 0 & C_{26} \\ C_{11} & B_{22} & C_{13} & B_{24} & C_{15} & B_{26} \end{bmatrix}$$

con f.forma lineari
dipende solo da
coordinate nodi



$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

In questo caso (f.forma lineari) si può isolare il volume e calcolare [K]

$$[K^e] = [B]^T [D][B] \int_V dV = [B]^T [D][B]V$$

Osservazione: unità di misura

$$\begin{array}{c}
 \text{N m}^{-1} \rightarrow [K^e] = [B]^T [D] [B] V \leftarrow \text{m}^3 \\
 \begin{array}{ccc}
 \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\
 \text{m}^{-1} & \text{N m}^{-2} & \text{m}^{-1}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\frac{1}{m} \frac{N}{m^2} \frac{1}{m} m^3 = \frac{N}{m}$$

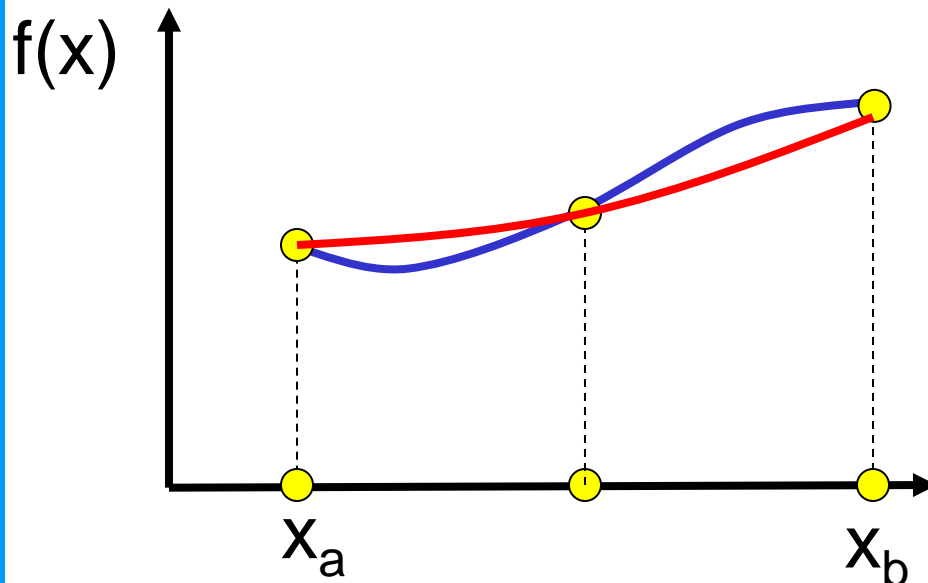
Calcolo della matrice $[K^e]$

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

caso generale in cui le f.ni di forma non siano necessariamente lineari

Integrale calcolato numericamente (Metodo di Gauss)

Metodi classici di integrazione (approccio polinomiale):



- 1) Si scelgono “a priori” n punti, x_i , nell’intervallo di integrazione
- 2) Si calcolano i valori di $f(x_i)$
- 3) Si approssima $f(x)$ nell’intervallo di integrazione con il polinomio di grado $n-1$ passante per i punti scelti
- 4) Si integra il polinomio in forma chiusa

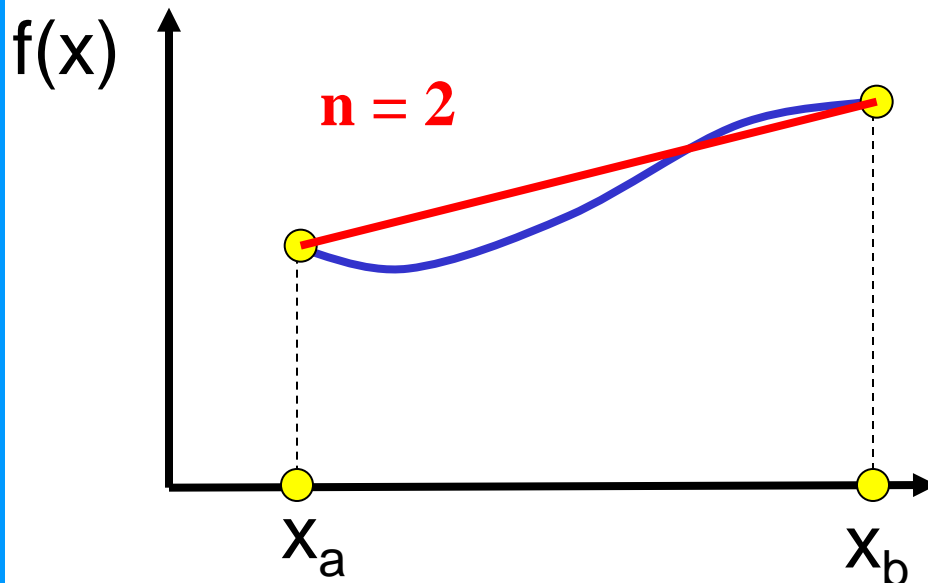
Calcolo della matrice $[K^e]$

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

caso generale in cui le f.ni di forma siano non necessariamente lineari

Integrale calcolato numericamente (Metodo di Gauss)

Metodi classici di integrazione (approccio polinomiale):): esempio 1D



- 1) Si scelgono “a priori” n punti, x_i , nell’intervallo di integrazione
- 2) Si calcolano i valori di $f(x_i)$
- 3) Si approssima $f(x)$ nell’intervallo di integrazione con il polinomio di grado $n-1$ passante per i punti scelti
- 4) Si integra il polinomio in forma chiusa

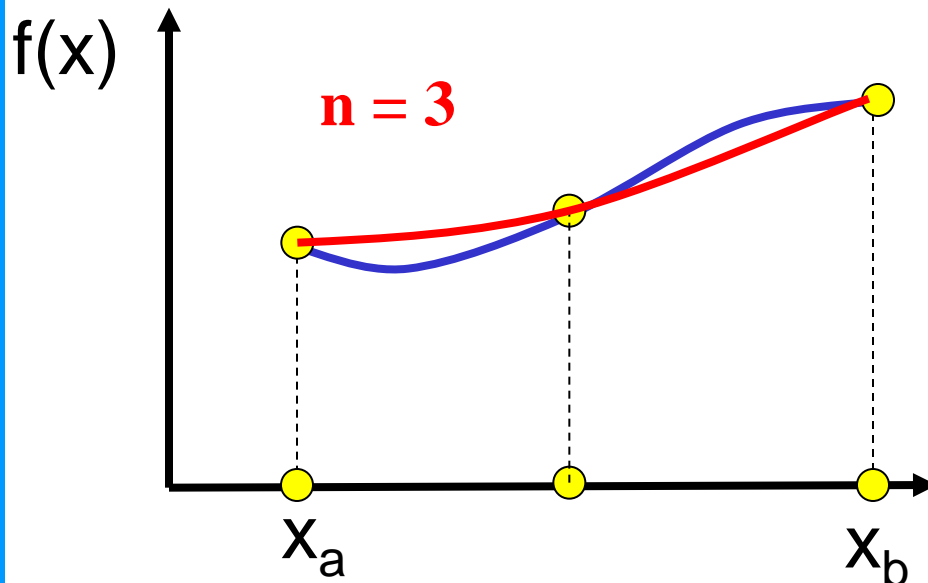
Calcolo della matrice $[K^e]$

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

caso generale in cui le f.ni di forma siano non necessariamente lineari

Integrale calcolato numericamente (Metodo di Gauss)

Metodi classici di integrazione (approccio polinomiale): esempio 1D



- 1) Si scelgono “a priori” n punti, x_i nell’intervallo di integrazione
- 2) Si calcolano i valori di $f(x_i)$
- 3) Si approssima $f(x)$ nell’intervallo di integrazione con il polinomio di grado $n-1$ passante per i punti scelti
- 4) Si integra il polinomio in forma chiusa

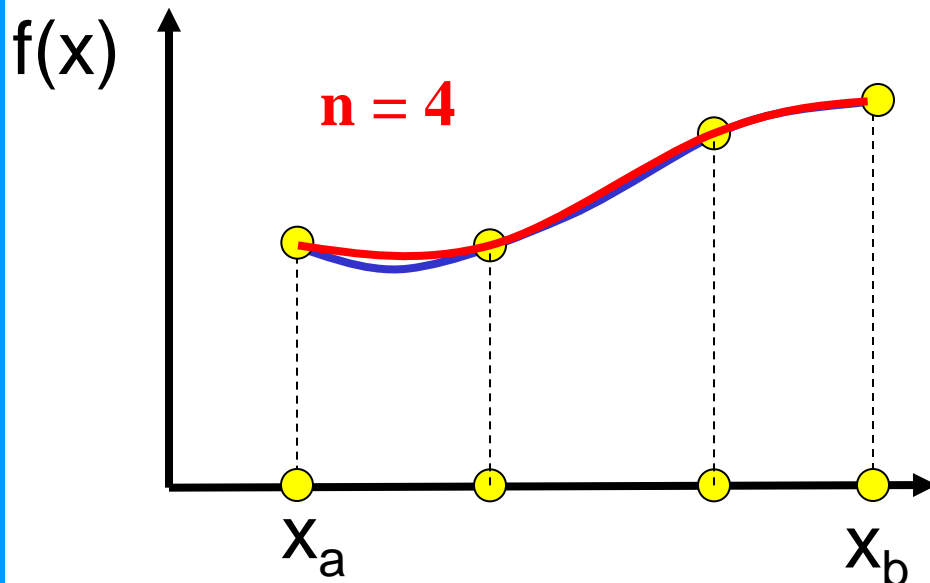
Calcolo della matrice $[K^e]$

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

caso generale in cui le f.ni di forma siano non lineari e $[B]$ non costante

Integrale calcolato numericamente (Metodo di Gauss)

Metodi classici di integrazione (approccio polinomiale): esempio 1D

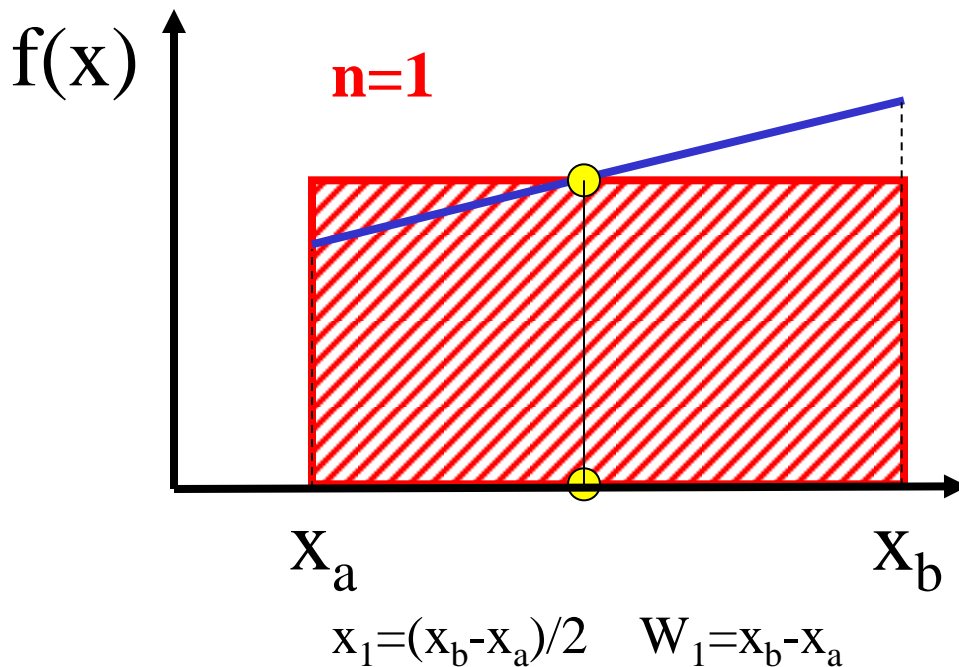


- 1) Si scelgono “a priori” n punti, x_i nell’intervallo di integrazione
- 2) Si calcolano i valori di $f(x_i)$
- 3) Si approssima $f(x)$ nell’intervallo di integrazione con il polinomio di grado $n-1$ passante per i punti scelti
- 4) Si integra il polinomio in forma chiusa

Integrazione secondo Gauss: esempio 1D

Integrale da calcolare $\rightarrow \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n W_i f(x_i) \leftarrow$ Valore della f.ne nel punto x_i

\uparrow
Peso



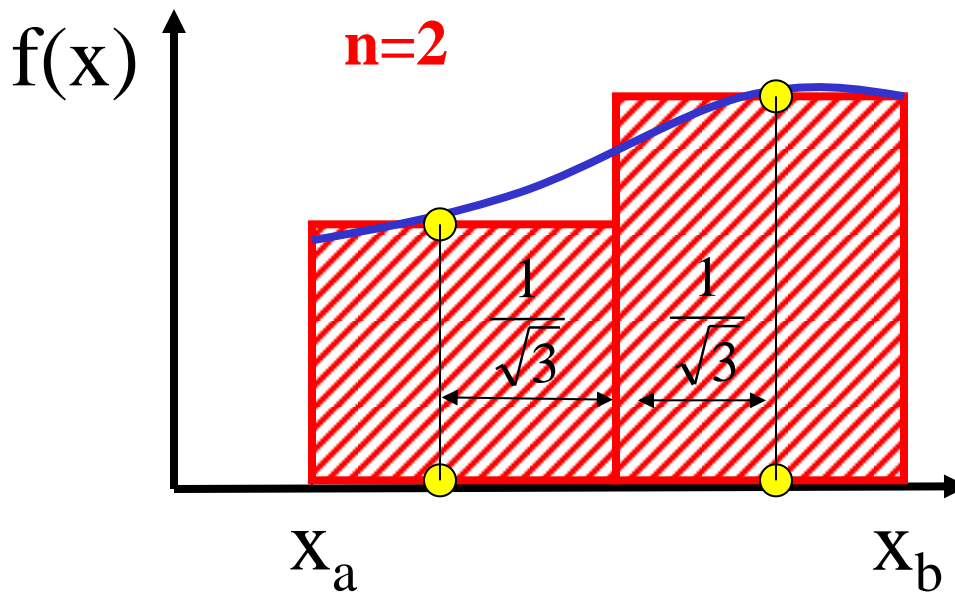
- 1) Si fissa n
- 2) Si scelgono gli x_i ed i W_i in modo da valutare in modo esatto l'integrale di un polinomio di grado $2n-1$ sull'intervallo dato

I punti x_i sono detti "punti di Gauss" (tabellati insieme a W_i)

Integrazione secondo Gauss: esempio 1D

Integrale da calcolare $\rightarrow \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n W_i f(x_i) \leftarrow$ Valore della f.ne nel punto x_i

↑
Peso



- 1) Si fissa n
- 2) Si scelgono gli x_i ed i W_i in modo da valutare in modo esatto l'integrale di un polinomio di grado $2n-1$ sull'intervallo dato

I punti x_i sono detti "punti di Gauss" (tabellati insieme a W_i)

$$x_{2,1} = (x_b + x_a)/2 \pm (x_b - x_a)/2\sqrt{3} \quad W_{2,1} = (x_b - x_a)/2$$

Vantaggi dell'integrazione secondo Gauss:

- fissato n , consente il calcolo esatto dell'integrale di una f.ne approssimante di grado $2n-1$ anziché di grado $n-1$ dei metodi classici (es. $n=1$ f.ne lineare vs. costante, $n=2$ f.ne cubica vs. lineare)
- dato il grado n della f.ne approssimante che si vuole poter integrare esattamente, richiede il calcolo della f.ne stessa in $(n+1)/2$ punti, anziché in $n+1$ punti (es. f.ne lineare 1 vs 2, f.ne cubica 2 vs 4)

Le posizioni dei punti di Gauss e dei pesi per integrali in 1, 2 e 3 dimensioni sono note per molti domini di integrazione.



ANALISI INTERA STRUTTURA

Congruenza



[B]

Costitutive



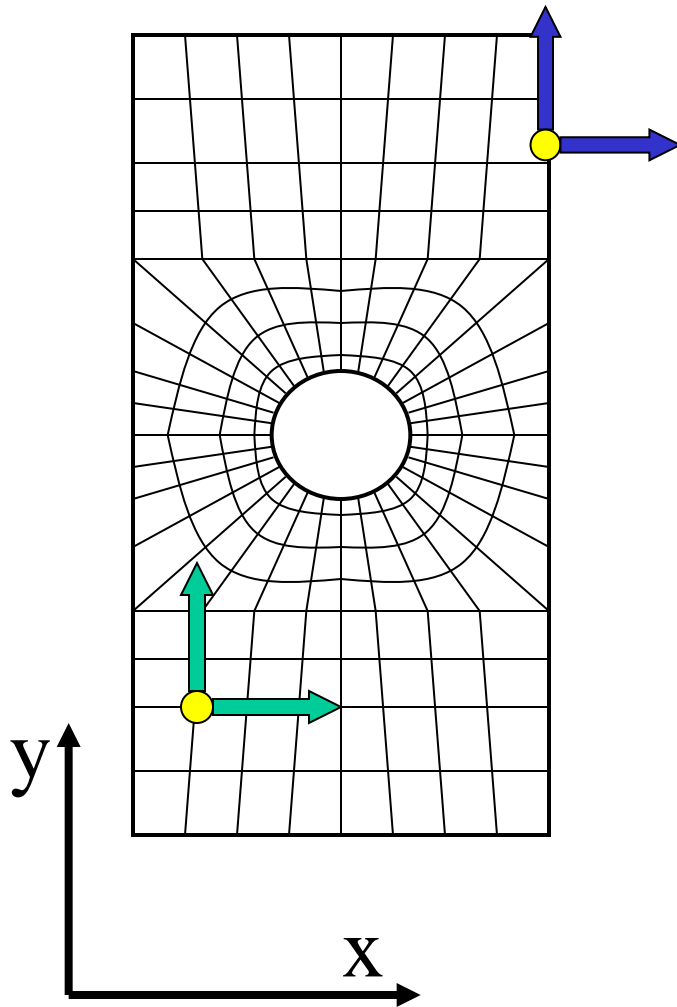
[D]

Equilibrio



Garantito per il singolo elemento (PLV) (non ancora per la struttura)

VETTORI DEGLI SPOSTAMENTI E DEI CARICHI ESTERNI PER L'INTERA STRUTTURA

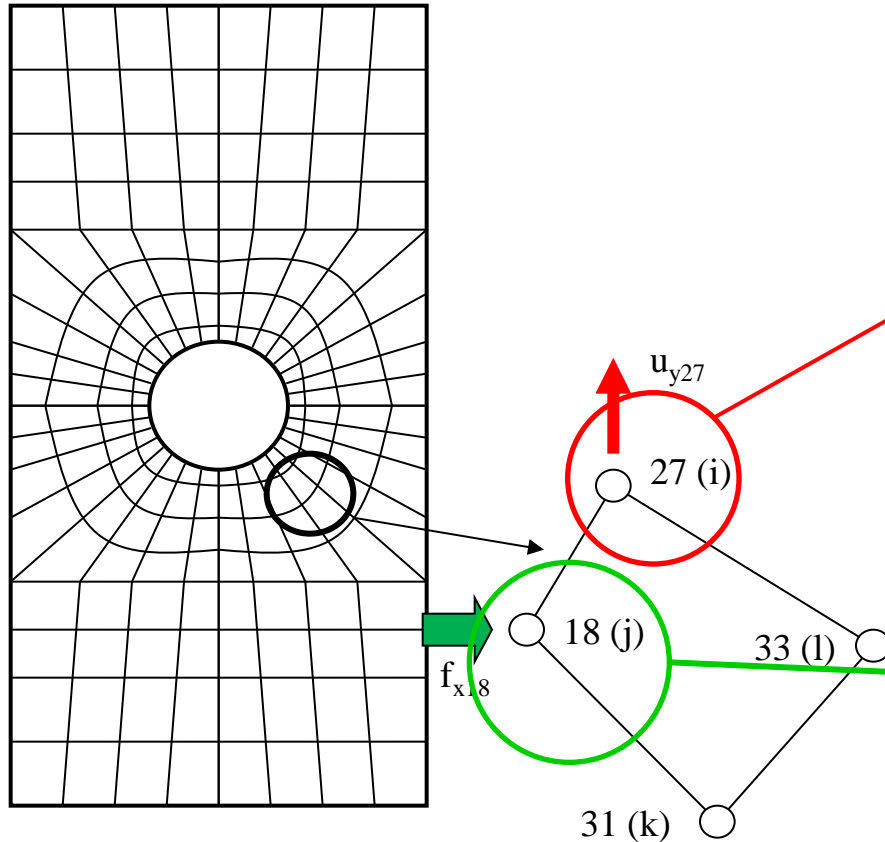


$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ - \\ - \\ - \\ u_{yn_N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ - \\ - \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ - \\ - \\ - \\ f_{yn_N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ - \\ - \\ - \\ f_{n_{GDL}} \end{Bmatrix}$$

*vettore forze
nodali esterne*

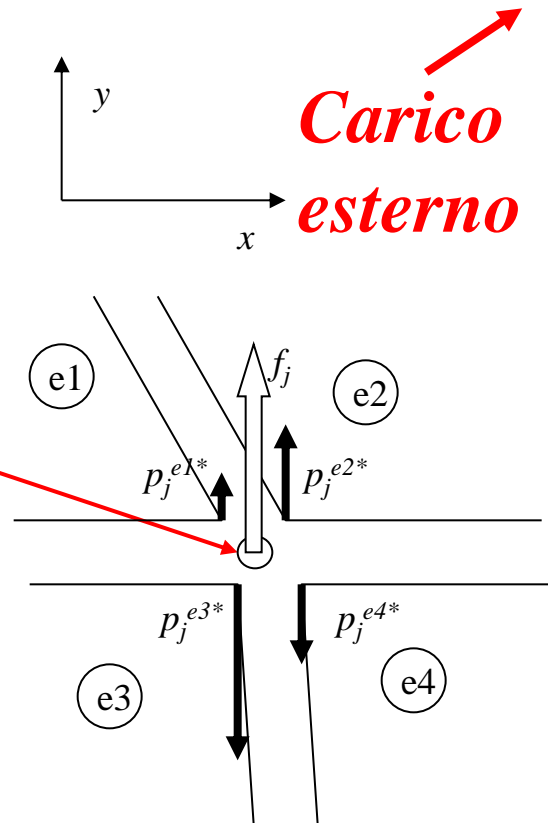
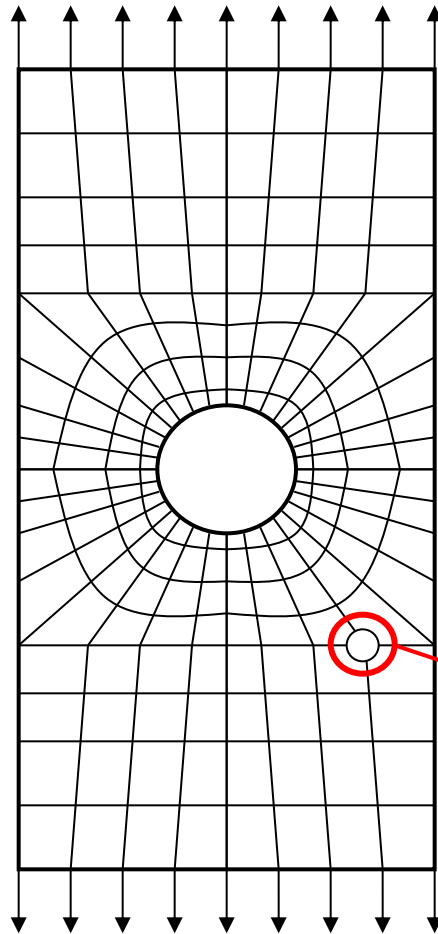
VETTORI DEGLI SPOSTAMENTI E DEI CARICHI APPLICATI PER L'INTERA STRUTTURA



$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ - \\ u_{54} = u_{y27} \\ - \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ f_{35} = f_{x18} \\ - \\ - \\ f_{n_{GDL}} \end{Bmatrix}$$

Equazione di equilibrio al nodo



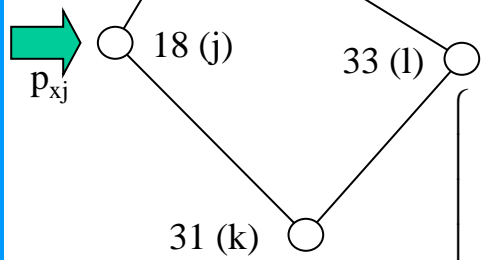
Carico esterno

$$f_j - \sum_{e^*=1}^{n_e^*} p_j^{e^*} = 0$$

Carico applicato nel nodo j all'elemento e (espanso)*

$$f_j = \sum_{e^*=1}^{n_e^*} p_j^{e^*}$$

Si considerano tutti e soli gli elementi che *convergono* nel nodo considerato



$$\{P^e\} = [K^e] \{U^e\} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ p_{xj} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ p_3^e \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1}^e & k_{1,2}^e & k_{1,3}^e & k_{1,4}^e & \dots & k_{1,8}^e \\ k_{2,1}^e & k_{2,2}^e & k_{2,3}^e & k_{2,4}^e & \dots & k_{2,8}^e \\ k_{3,1}^e & k_{3,2}^e & k_{3,3}^e & k_{3,4}^e & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ u_{yi}^e \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix}$$

Matrice di rigidità del singolo elemento quadrilatero

8x1 8x1 8x8 8x1

$$\{P^{e*}\} = [K^{e*}] \{U\} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & k_{35,54}^{e*} (= k_{3,2}^e) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_{54} (= u_{yi}^e) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix}$$

Matrice di rigidità "ESPANSA" per il singolo elemento

$n_{gdl} \times 1$ (di cui 8 \neq 0) $n_{gdl} \times n_{gdl}$ (di cui 64 \neq 0) $n_{gdl} \times 1$

$$\{P^{e*}\} = [K^{e*}]\{U\} \quad \text{per ogni elemento}$$

Le equazioni di equilibrio su tutti i nodi si ottengono semplicemente sommando gli N vettori di forza nodale (interna) espansi (N numero di elementi)

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{n_N} P^{e*} \quad \text{Vettore forze nodali "ESPANSO"}$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{n_N} [K^{e*}]\{U\}$$

Si definisce **matrice della struttura** la somma delle matrici espanse di ciascun elemento (assemblaggio)

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_N} [K^{e*}]$$

più in dettaglio:

$$f_j = \sum_{e^*=1}^{n_e^*} P_j^{e^*} =$$

reazioni al nodo j dovuti a u dei nodi i degli elementi connessi al nodo del gdl j

$$= \sum_{e^*=1}^{n_e^*} \left(\sum_{i=1}^{n_{gdl}} k_{ji}^{e^*} u_i \right) =$$

$$= \dots + \left(k_{ji}^{1^*} + k_{ji}^{2^*} + \dots + k_{ji}^{n_E^*} \right) u_i + \dots =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_{gdl}} \left(\sum_{e^*=1}^{n_e^*} k_{ji}^{e^*} \right) u_i$$

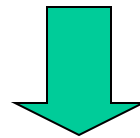
si sommano quindi le rigidezze degli elementi che hanno nodi, meglio gdl, a comune

Equazione d'equilibrio

*Matrice di rigidezza
della struttura*

$$\begin{matrix} \nearrow \\ n_{GDL} \times 1 \end{matrix} \{F\} = \begin{matrix} \nearrow \\ n_{GDL} \times n_{GDL} \end{matrix} [K] \begin{matrix} \nwarrow \\ n_{GDL} \times 1 \end{matrix} \{U\}$$

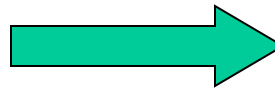
Soluzione



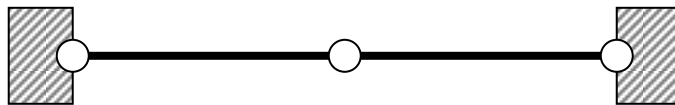
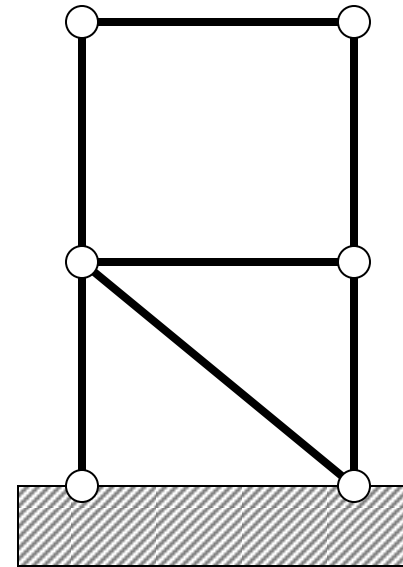
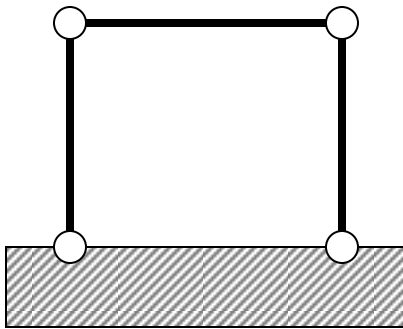
$$\{U\} = [K]^{-1} \{F\}$$

c.n.s. : $\det[K] \neq 0$

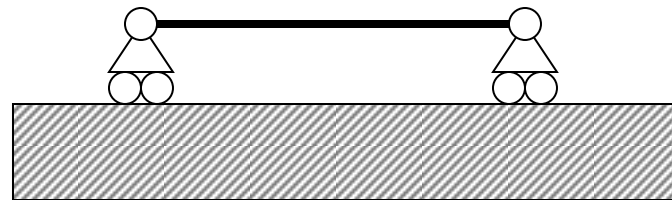
$$\det[\mathbf{K}] = 0$$



Struttura labile



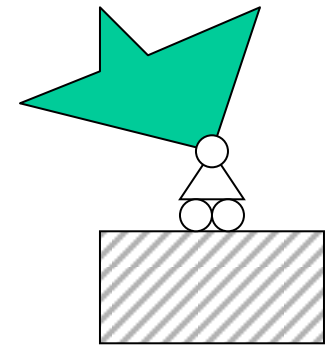
es. strutture labili



VINCOLI

Per rendere una struttura non labile occorre introdurre vincoli.

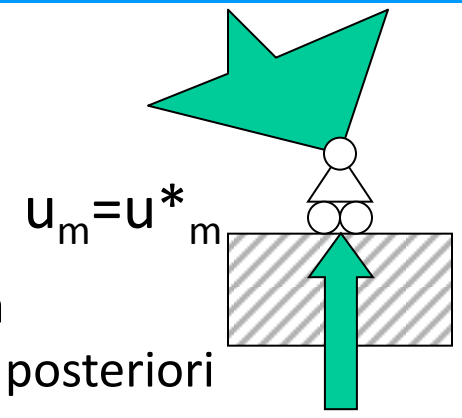
Vincolare = assegnare “a priori” il valore di una delle componenti di spostamento (g.d.l.)



$$u_m = u_m^*$$

$$\begin{matrix}
 \left. \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ - \\ f_m \\ - \\ f_{n_{GDL}} \end{matrix} \right\} \\
 \uparrow \\
 n_{GDL} \bullet 1
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 \left[\begin{matrix}
 k_{11} & k_{12} & - & - & k_{1m} & - & k_{1n_{GDL}} \\
 k_{21} & k_{22} & - & - & k_{2m} & - & k_{2n_{GDL}} \\
 - & - & - & - & - & - & - \\
 - & - & - & - & - & - & - \\
 k_{m1} & k_{m2} & - & - & k_{m,m} & - & k_{mn_{GDL}} \\
 - & - & - & - & - & - & - \\
 k_{n_{GDL}1} & k_{n_{GDL}2} & - & - & k_{n_{GDL}m} & - & k_{n_{GDL}n_{GDL}}
 \end{matrix} \right]
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \left. \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ - \\ - \\ u_m \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{matrix} \right\} \\
 \uparrow \\
 n_{GDL} \bullet 1
 \end{matrix}$$

\uparrow $n_{GDL} \bullet n_{GDL}$



f_m incognita
ricavabile a posteriori

$$\begin{matrix}
 \left\{ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ - \\ f_m \\ - \\ f_{n_{GDL}} \end{matrix} \right\} \\
 \uparrow \\
 n_{GDL} \cdot 1
 \end{matrix}
 \cdot
 \begin{matrix}
 \left\{ \begin{matrix} k_{1m} \\ k_{2m} \\ - \\ - \\ k_{m,m} \\ - \\ k_{n_{GDL}m} \end{matrix} \right\} \\
 - u_m^*
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 \left[\begin{matrix}
 k_{11} & k_{12} & - & k_{1m-1} & k_{1m+1} & - & k_{1n_{GDL}} \\
 k_{21} & k_{22} & - & k_{2m-1} & k_{2m+1} & - & k_{2n_{GDL}} \\
 - & - & - & - & - & - & - \\
 - & - & - & - & - & - & - \\
 k_{m1} & k_{m2} & - & k_{m,m-1} & k_{m,m+1} & - & k_{mn_{GDL}} \\
 - & - & - & - & - & - & - \\
 k_{n_{GDL}1} & k_{n_{GDL}2} & - & k_{n_{GDL}m-1} & k_{n_{GDL}m+1} & - & k_{n_{GDL}n_{GDL}}
 \end{matrix} \right]
 \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ - \\ - \\ u_{m-1} \\ u_{m+1} \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{matrix} \right\} \\
 \uparrow \\
 n_{GDL} \cdot (n_{GDL} - 1)
 \end{matrix}
 \cdot
 \begin{matrix}
 \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ - \\ - \\ u_{m-1} \\ u_{m+1} \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{matrix} \right\} \\
 \uparrow \\
 (n_{GDL} - 1) \cdot 1
 \end{matrix}$$



Introduzione di 1 vincolo = riduzione di 1 del numero di incognite ed equazioni

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ - \\ f_{m-1} \\ f_{m+1} \\ - \\ f_{n_{GDL}} \end{array} \right\} - u_m \left\{ \begin{array}{c} k_{1m} \\ k_{2m} \\ - \\ k_{m-1,m} \\ k_{m+1,m} \\ - \\ k_{n_{GDL}m} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccccc} k_{11} & k_{12} & - & k_{1m-1} & k_{1m+1} & - & k_{1n_{GDL}} \\ k_{21} & k_{22} & - & k_{2m-1} & k_{2m+1} & - & k_{2n_{GDL}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{m-1,1} & k_{m-1,1} & - & k_{m-1,m-1} & k_{m-1,m+1} & - & k_{m-1,n_{GDL}} \\ k_{m+1,1} & k_{m+1,2} & - & k_{m+1,m-1} & k_{m+1,m+1} & - & k_{m+1,n_{GDL}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{n_{GDL}1} & k_{n_{GDL}2} & - & k_{n_{GDL}m-1} & k_{n_{GDL}m+1} & - & k_{n_{GDL}n_{GDL}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ - \\ u_{m-1} \\ u_{m+1} \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

$(n_{GDL}-1) \bullet 1$
 $(n_{GDL}-1) \bullet (n_{GDL}-1)$
 $(n_{GDL}-1) \bullet 1$



Introducendo un opportuno insieme di vincoli per rendere isostatico il sistema, la matrice \mathbf{K}' (ridotta) diventa invertibile e si possono determinare gli spostamenti nodali (esclusi i vincoli già noti)

$$\{U'\} = [K']^{-1} \{F'\}$$

quindi spostamenti in tutti i punti della struttura tramite le funzioni di forma e quindi deformazioni e tensioni

$$\begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{Bmatrix} = [N^e(x, y)] \cdot \{U^e\} \rightarrow \boxed{\phantom{\{U^e\}}} \rightarrow \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

infine le reazioni vincolari incognite

$$f_m = \left[\begin{array}{cccccc} k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{m,m} & \dots & k_{mn_{GDL}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ - \\ - \\ u_m^* \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{array} \right\}$$

vincolo imposto

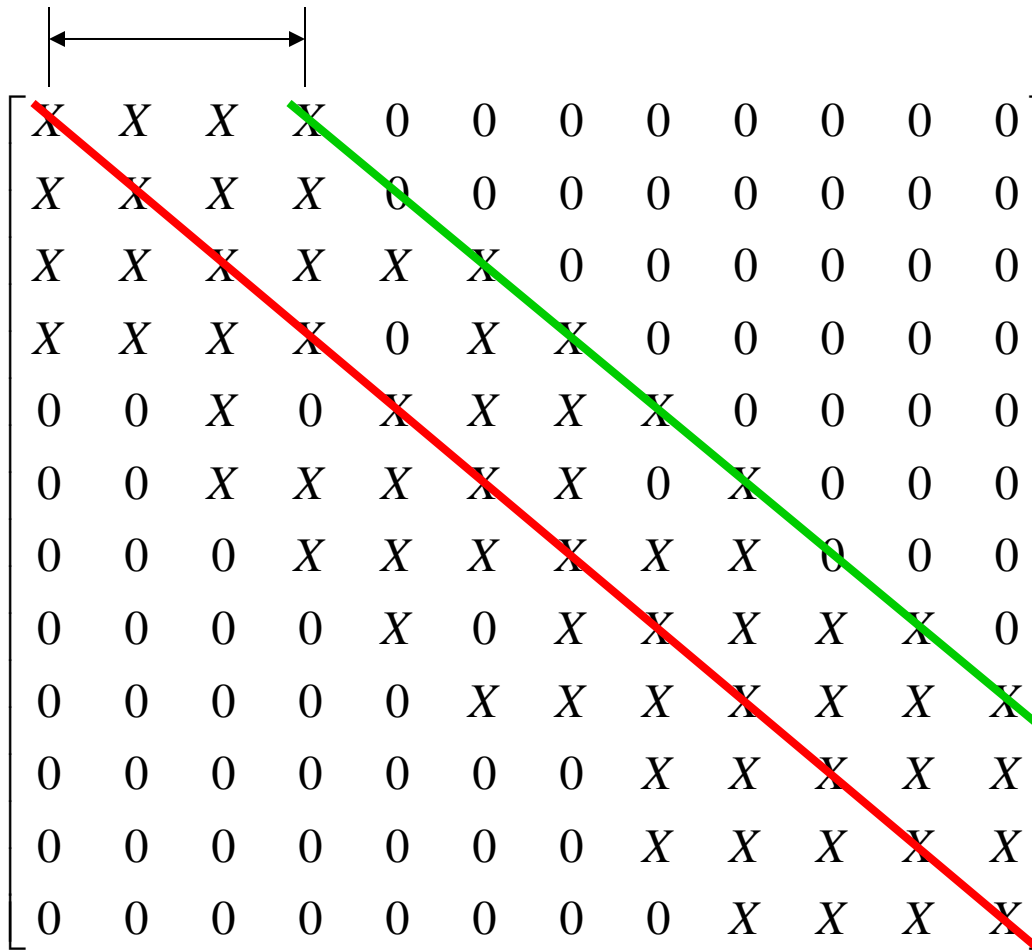
Caratteristiche della matrice $[K']$

$$[K'] = \begin{bmatrix} X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & X & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & X & X & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & X & X & X & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & X & X & X & X & 0 \\ & S & I & M & M & . & & X & X & X & X & X \\ & & & & & & & & X & X & X & X \\ & & & & & & & & & X & X & X \\ & & & & & & & & & & X & X \\ & & & & & & & & & & & X \end{bmatrix}$$

La matrice $[K']$:

- è simmetrica
- ha una struttura “a banda” attorno alla diagonale principale

Larghezza di banda ("bandwidth")



$$N^{\circ} \text{ operazioni} \approx (\text{largh. banda})^2 \cdot n_{GDL}$$

Larghezza di banda

dipende dal

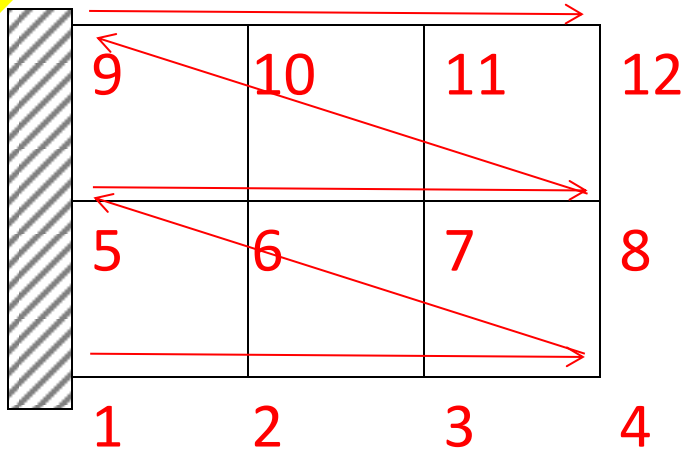
Modo di costruire [K]

Esistono due modi principali di costruire la matrice [K]:

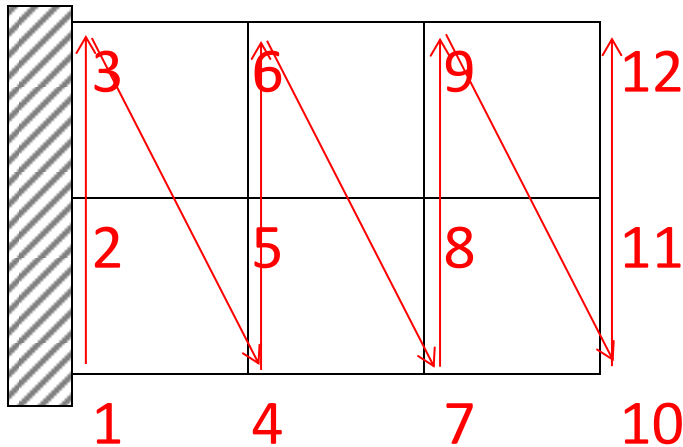
- seguendo l'ordine progressivo dei nodi;
- seguendo l'ordine progressivo degli elementi

Max. diff. n° d'ordine per nodi attaccati allo stesso elemento

ORDINE NODI



Largh. Banda = $6 \times 2 = 12$



Largh. Banda = $5 \times 2 = 10$

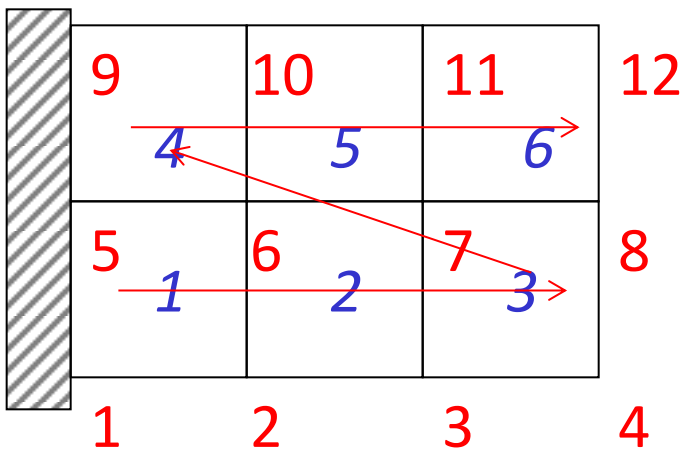
N° g.d.l. per nodo

$$\text{Largh. banda} = (n_{nE} + 1) n_{GDL,n}$$

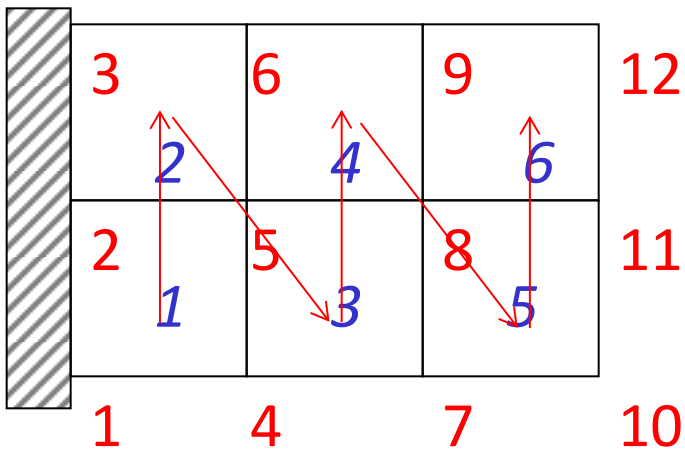
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0
	X	X	0	X	X	X	0	0	0	0	0	0
		X	X	0	X	X	X	0	0	0	0	0
			X	0	0	X	X	0	0	0	0	0
				X	X	0	0	X	X	0	0	0
					X	X	0	X	X	X	0	0
						X	X	0	X	X	X	0
							X	X	0	X	X	X
								X	0	0	X	X
									X	X	0	0
										X	X	0
											X	X
												X

ordine è quello dei nodi (1,2,3,4..)
 $k_{ij}=0$ se nodo j non \in el. connessi a i , u_j
 non genera reazioni in nodo i

ORDINE ELEMENTI



Largh. Banda = $8 \times 2 = 16$



Largh. Banda = $6 \times 2 = 12$

Max. diff. n° d'ordine per elementi attaccati allo stesso nodo

N° nodi per elemento/2

Largh. banda $\sim (n_{En}) n_{nod,e} n_{GDL,n}$

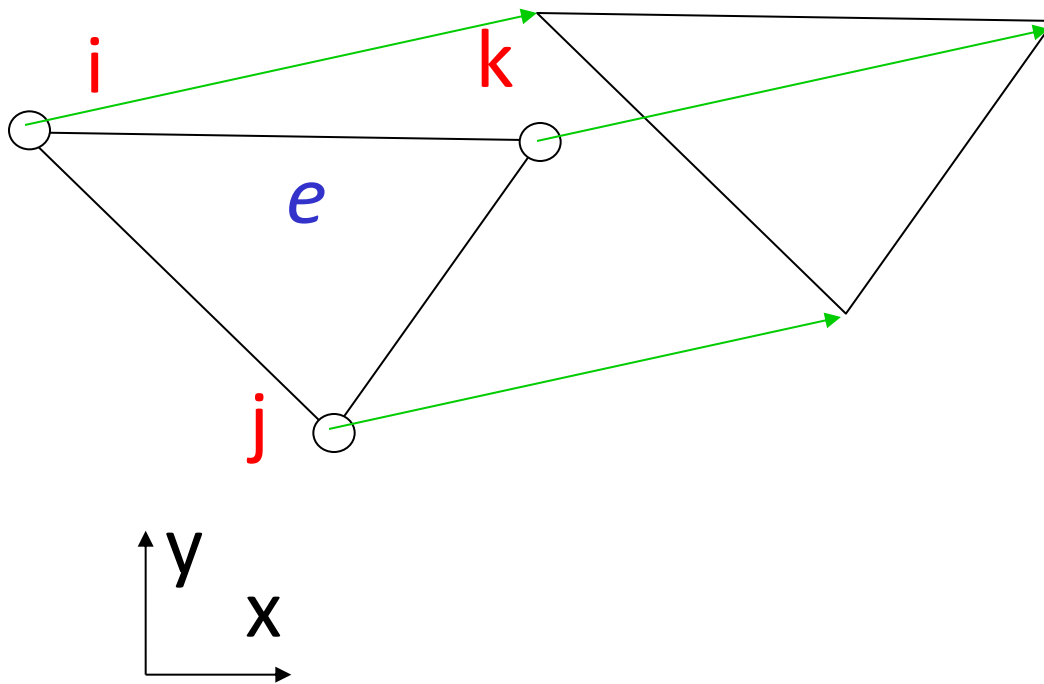
	1	2	5	6	3	7	4	8	9	10	11	12
X	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	X	X	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0
		X	X	0	0	0	0	X	X	0	0	0
			X	X	X	0	0	X	X	X	0	0
				X	X	X	X	0	0	0	0	0
					X	X	X	0	X	X	X	0
						X	X	0	0	0	0	0
							X	0	0	X	X	0
								X	X	0	0	0
									X	X	0	0
										X	X	0
											X	X
												X

ordine è quello dei nodi della sequenza di elementi (1,2,5,6 di e1...)

$k_{ij}=0$ se nodo j non \in el. connessi a i

Condizioni di convergenza sulle funz.ni di forma

Condizione 1: la f.ne di spostamento deve dare luogo ad una deformazione nulla in tutti i punti dell'elemento quando il campo di spostamenti nodali corrisponde ad un moto rigido.





Verifica per elemento triangolare

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U^e\}$$

nodi con u =

$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_x \\ u_y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} & 0 & C_{26} \\ C_{11} & B_{22} & C_{13} & B_{24} & C_{15} & B_{26} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x = B_{11}u_x + B_{13}u_x + B_{15}u_x$$

$$B_{11} = \frac{y_j - y_k}{\Delta}$$

$$B_{13} = \frac{y_k - y_i}{\Delta}$$

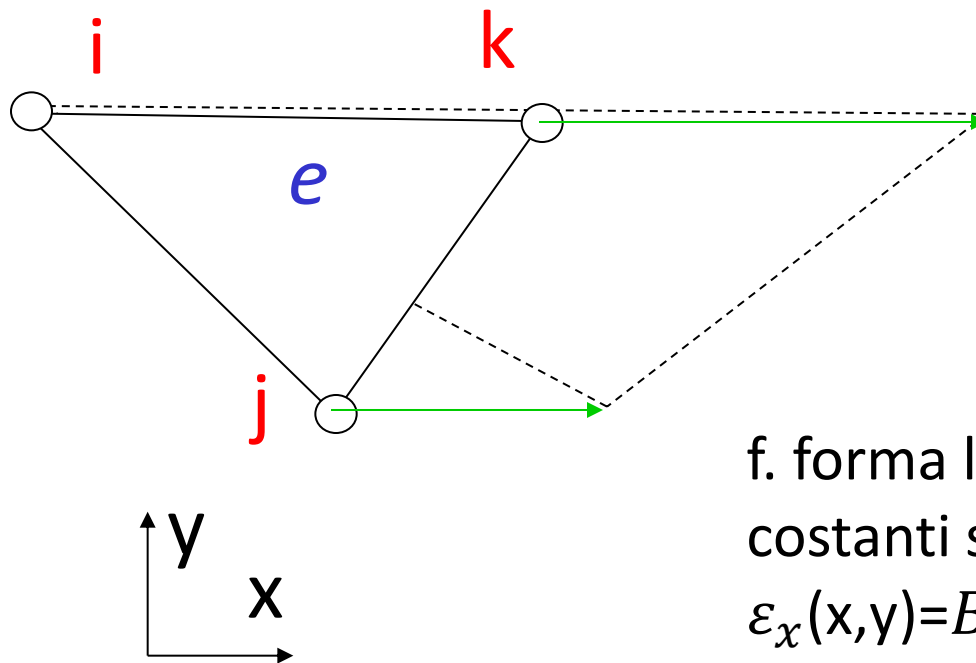
$$B_{15} = \frac{y_i - y_j}{\Delta}$$

$$\varepsilon_x = \frac{y_j - y_k}{\Delta} u_x + \frac{y_k - y_i}{\Delta} u_x + \frac{y_i - y_j}{\Delta} u_x = 0$$

Condizione 2: la f.ne di spostamento deve dare luogo ad una deformazione costante in tutti i punti dell'elemento quando il campo di spostamenti nodali è compatibile con tale condizione.

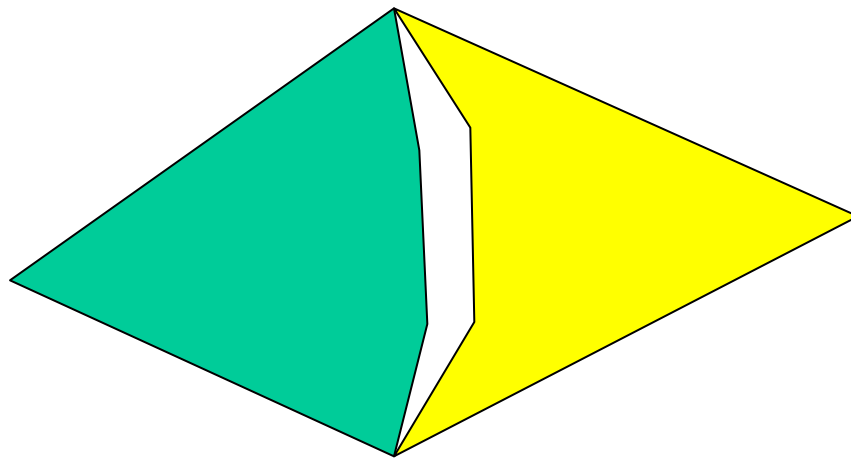
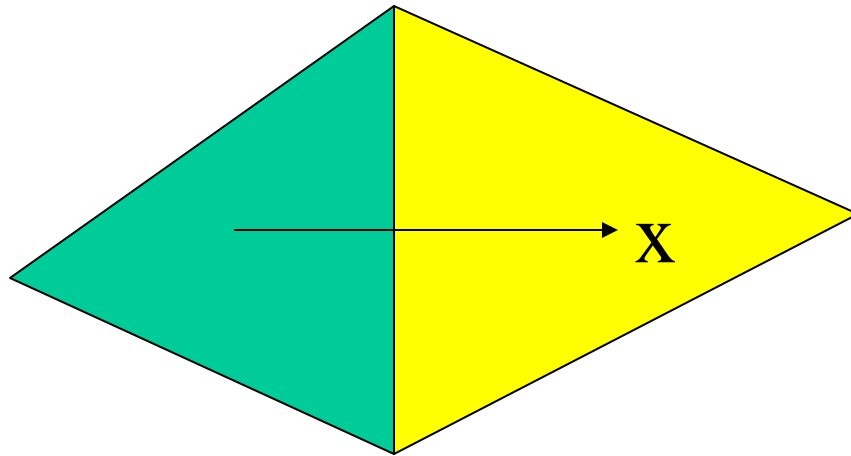
es. $u_x \propto \Delta x$ (diff.coord. x rispetto a nodo di rif. i)

$$u_{kx} = \frac{(x_k - x_i)}{(x_j - x_i)} u_{jx}$$



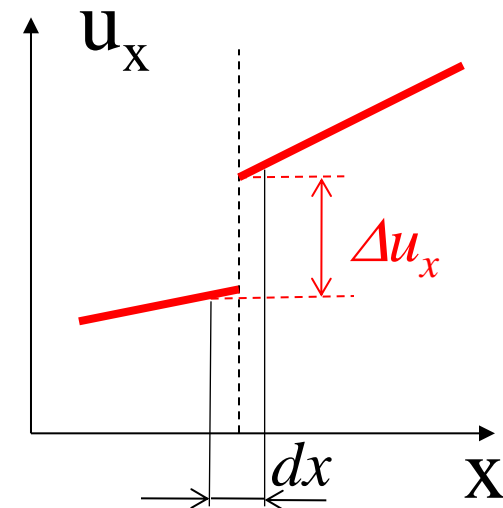
f. forma lineari: $A_{m,n}$; B_{mn} ; $C_{m,n}$
 costanti sempre verificato
 $\varepsilon_x(x,y) = B_{11} u_{ix} + B_{13} u_{jx} + B_{11} u_{kx}$
 $= \text{cost}$ (non dip. da x,y)

Condizione 3: la f.ne di spostamento deve dare luogo a deformazioni limitate all'interfaccia tra elementi diversi → continuità negli spostamenti

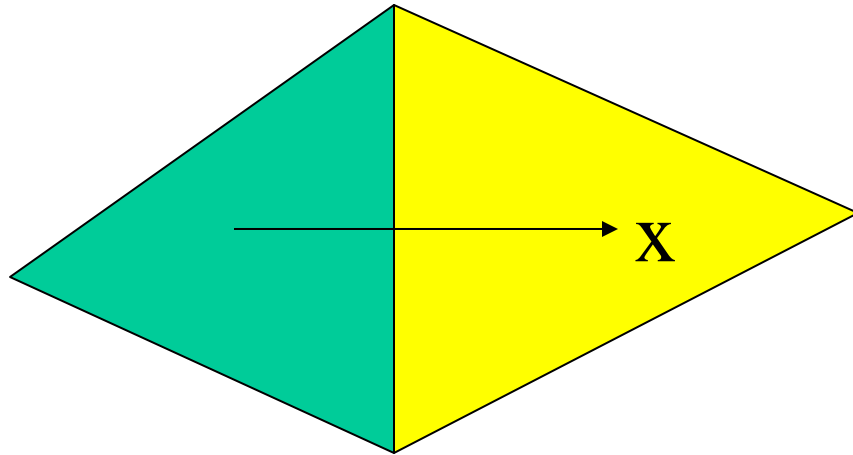


$\varepsilon \rightarrow \infty$

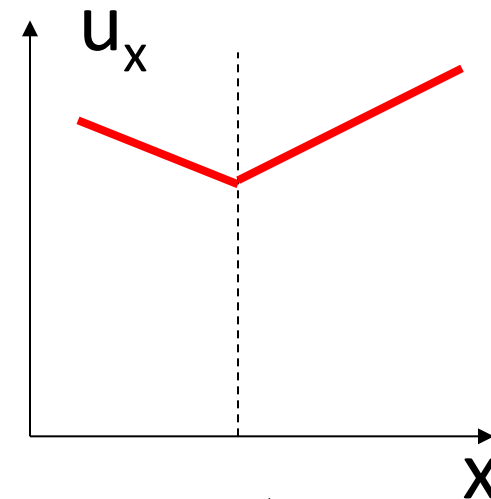
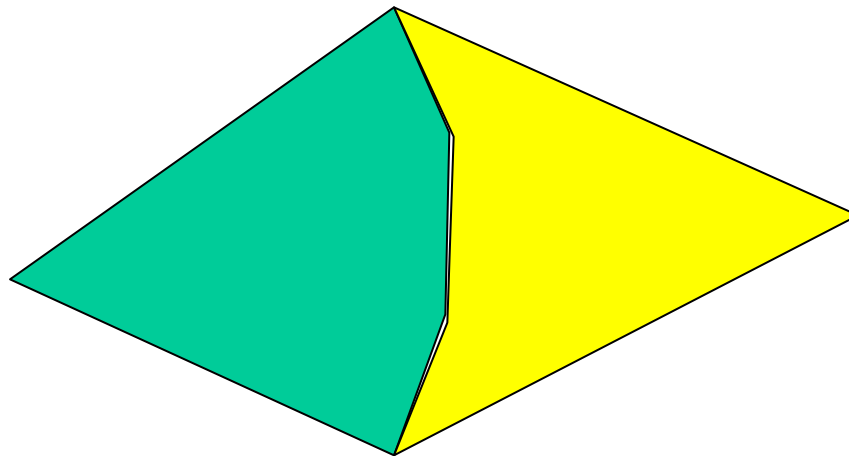
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$



Condizione 3: la f.ne di spostamento deve dare luogo a deformazioni limitate all'interfaccia tra elementi diversi.

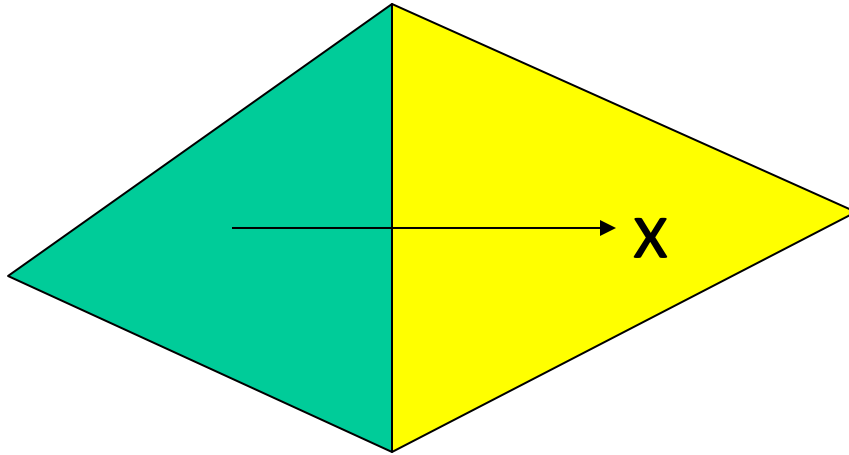


$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$



$\varepsilon \rightarrow$ valore finito (*anche se discontinua*)

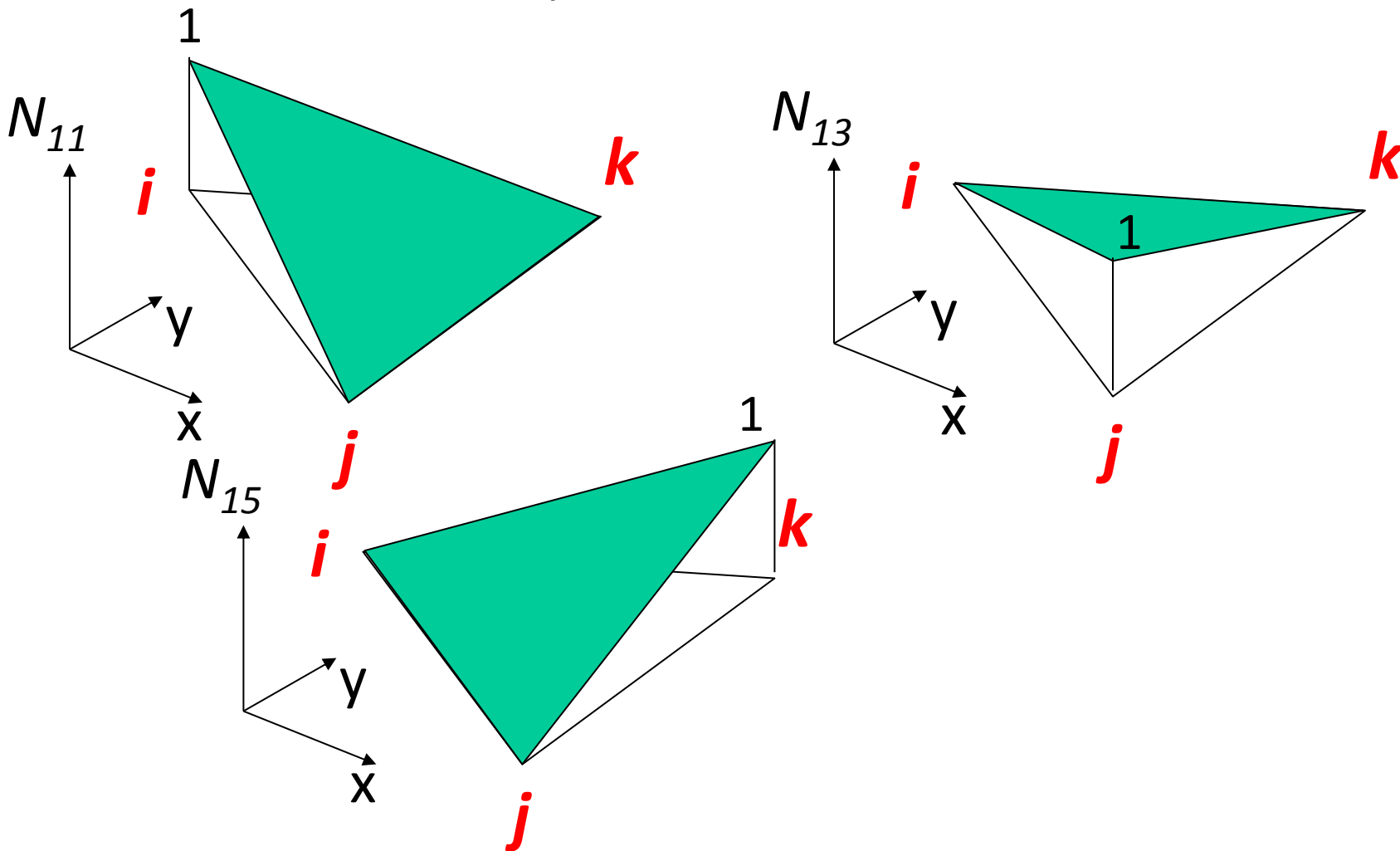
Condizione 3: la f.ne di spostamento deve dare luogo a deformazioni limitate all'interfaccia tra elementi diversi.



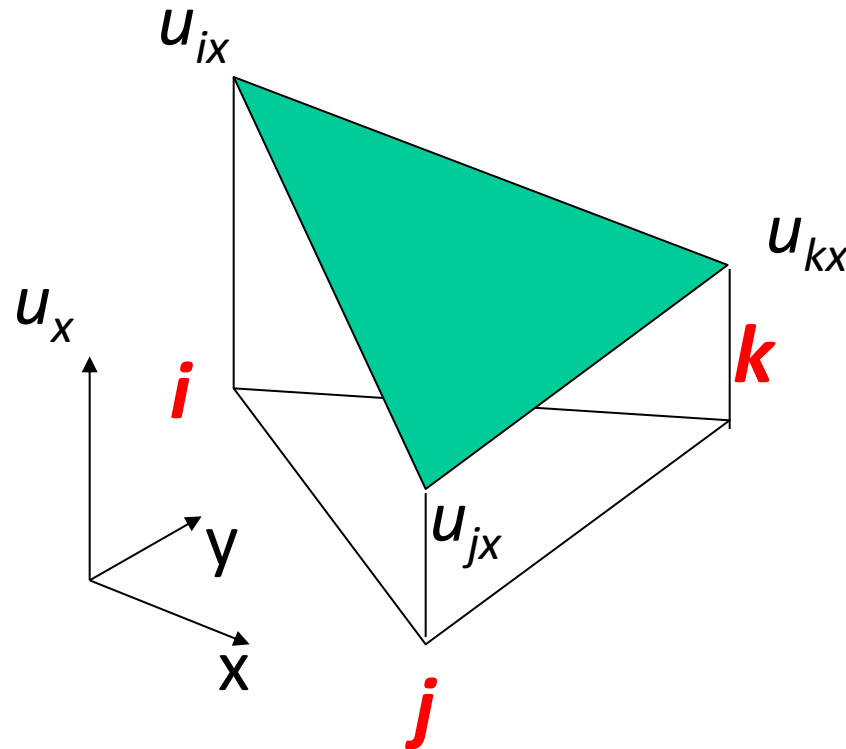
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

In generale: se il calcolo della deformazione richiede la derivata n -sima della f.ne spostamento, quest'ultima deve essere continua all'interfaccia con Classe di continuità C_{n-1} (derivata prima \rightarrow continuità C_0)

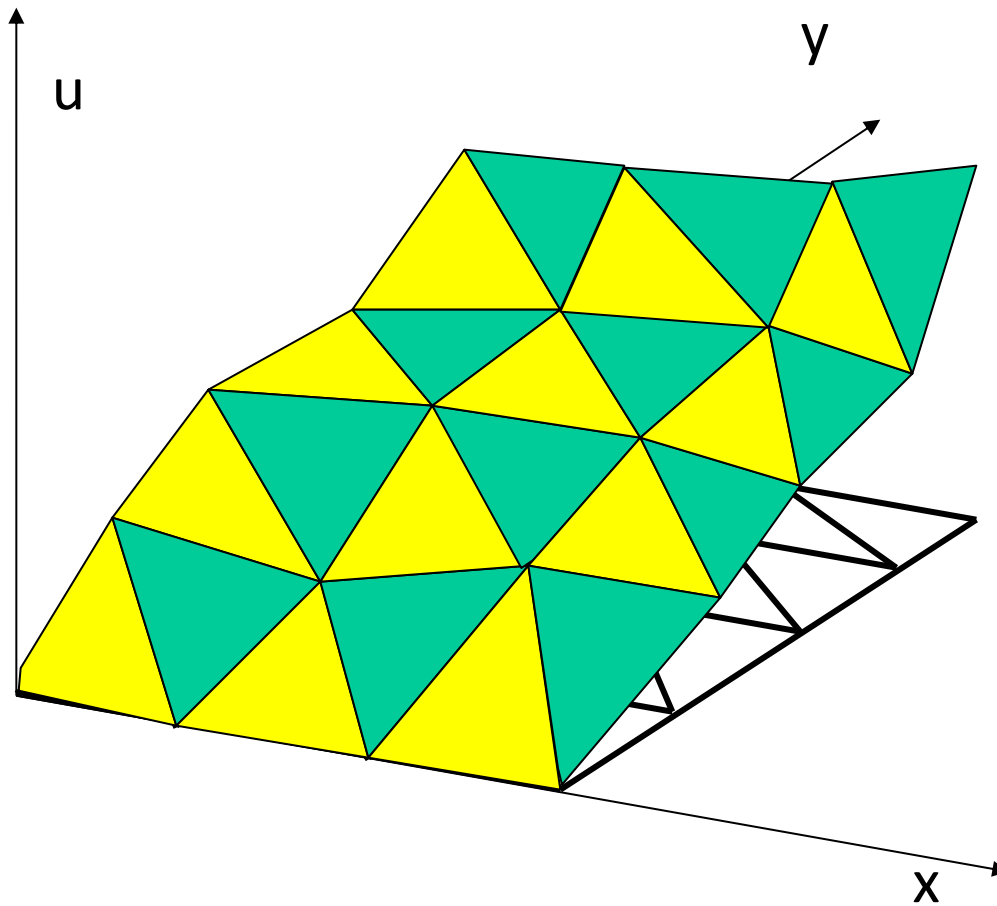
Oss.ne: la funzione di spostamento scelta garantisce tale continuità in quanto lo spostamento di un punto \in ad un lato dipende solo dagli spostamenti dei nodi \in al lato (elementi adiacenti hanno lo stesso spostamento sul lato di interfaccia)

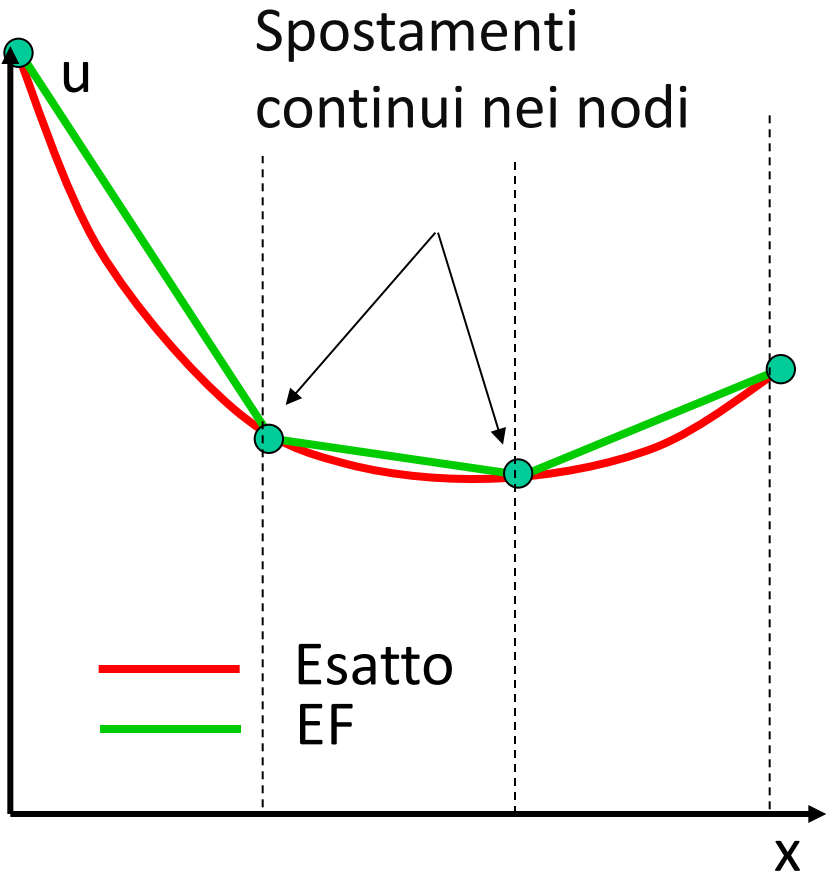
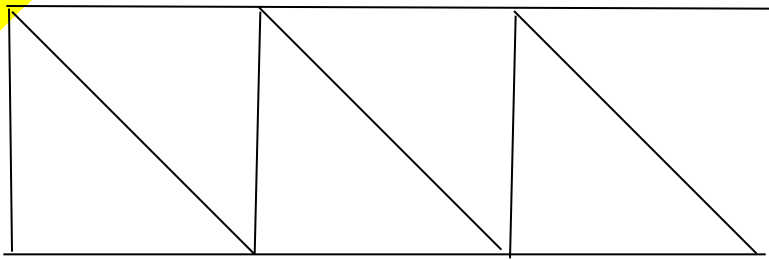


Approssimazione effettiva del campo di spostamenti sul singolo elemento

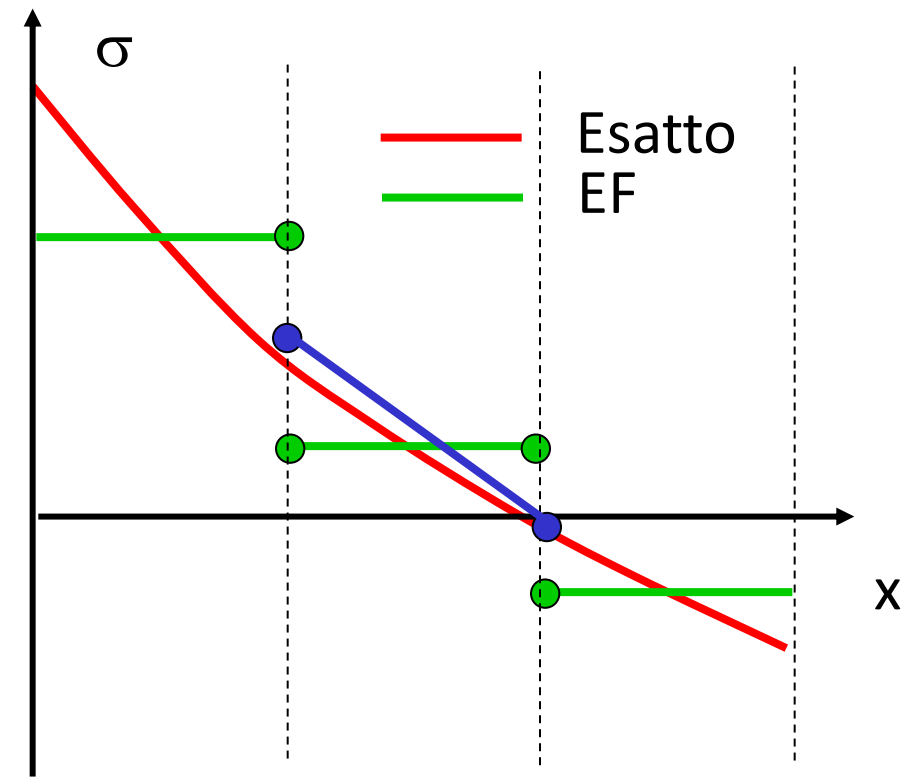


Approssimazione effettiva del campo di spostamenti sull'intero modello



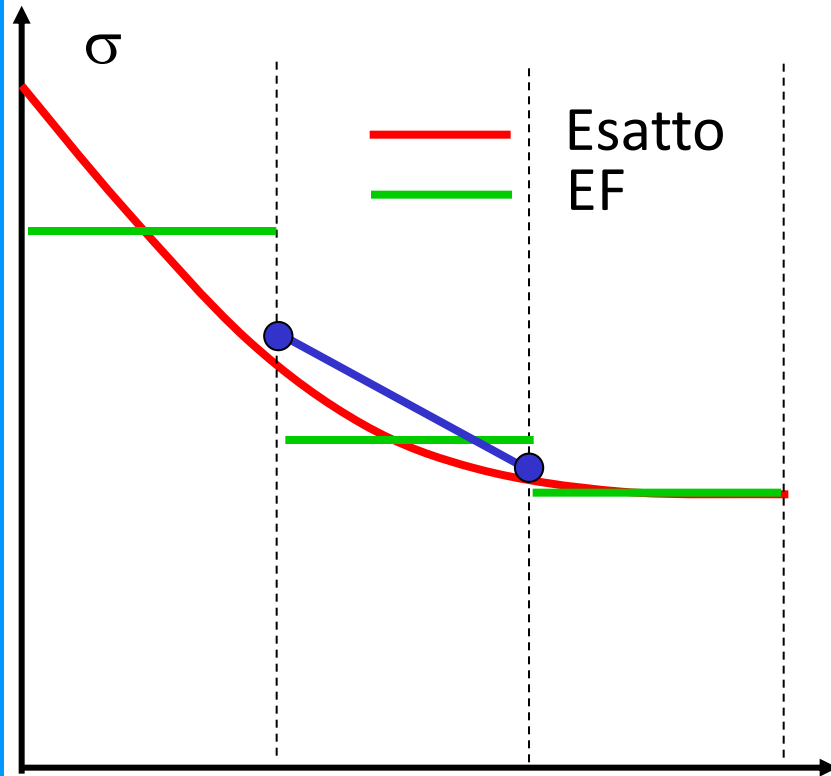


Andamento effettivo delle tensioni
Tensioni discontinue nei nodi

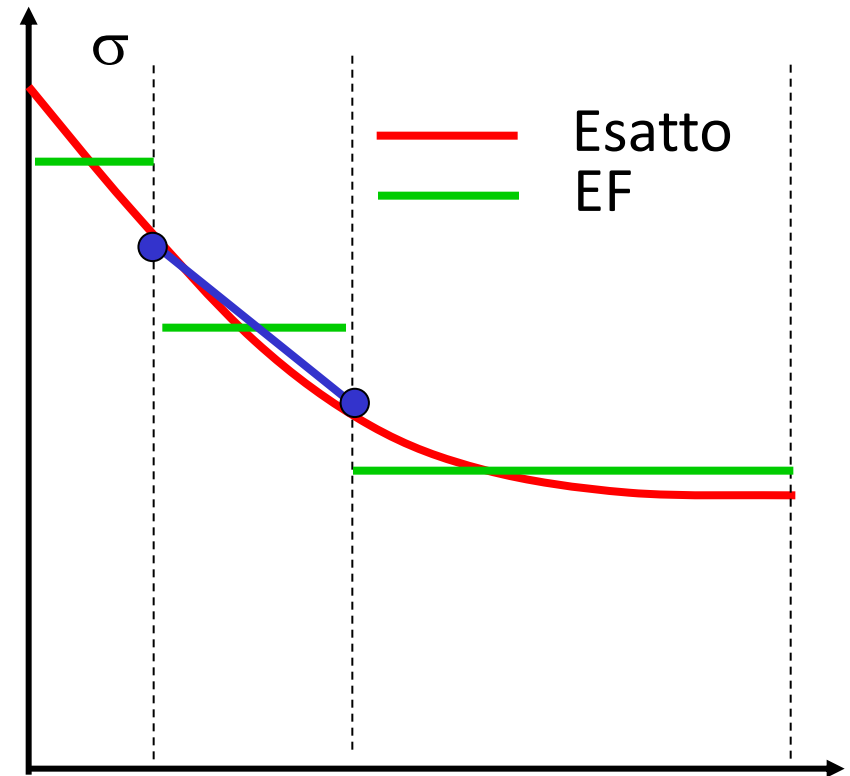


Calcolo di valori mediati nei nodi
(media aritmetica o altre tecniche)

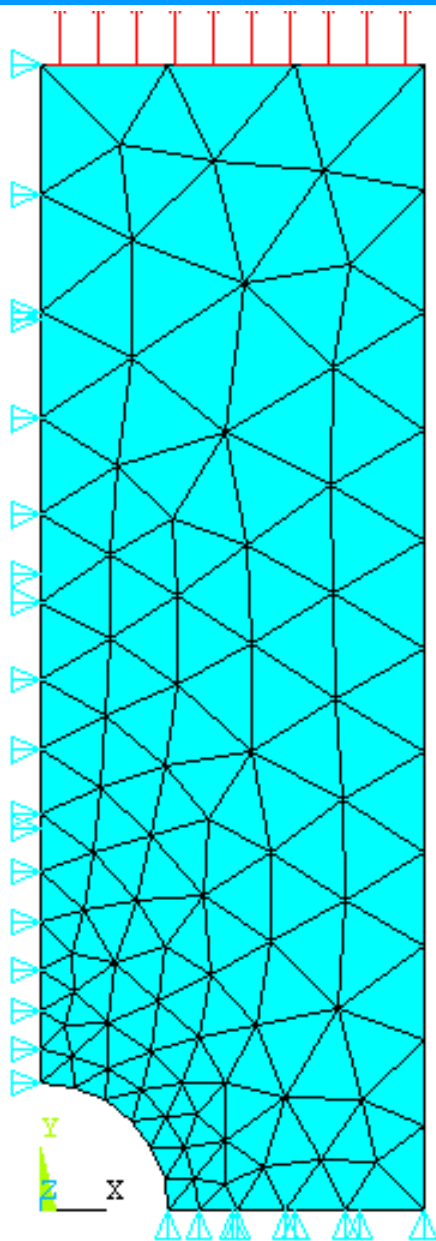
Dimensioni ottimali degli elementi per maggior accuratezza ai nodi



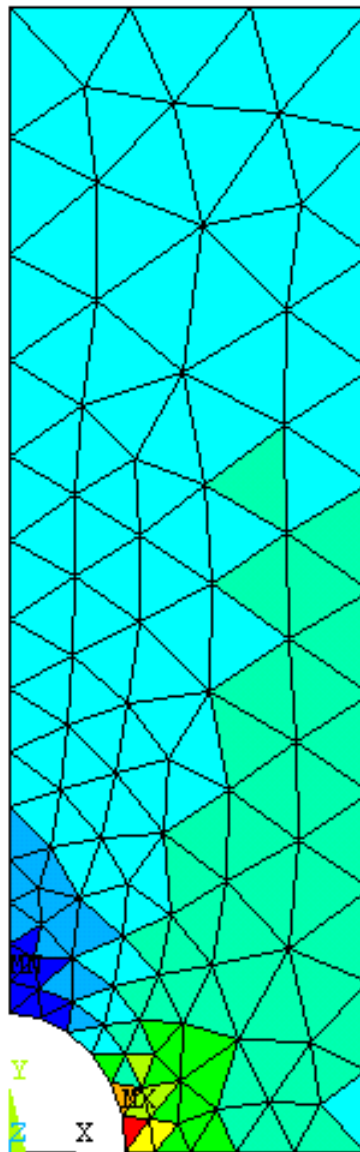
Dimensioni elementi non ottimali (uniformi)



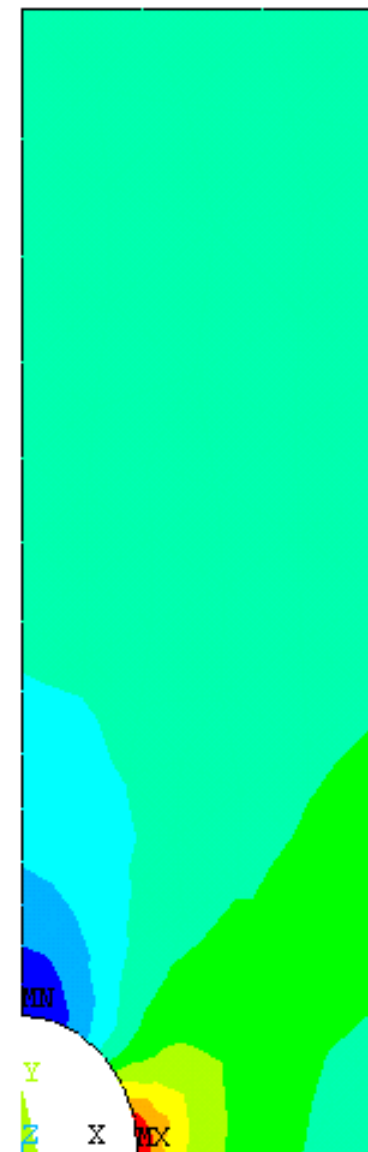
Dimensioni elementi ottimali (minori dove maggiore è il gradiente)



Modello



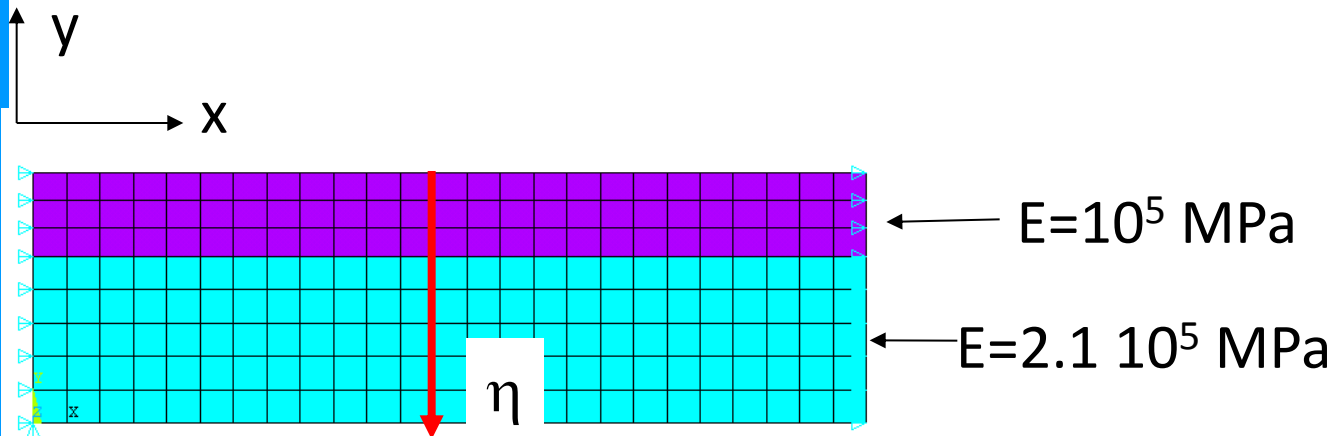
Tensioni σ_y non mediate

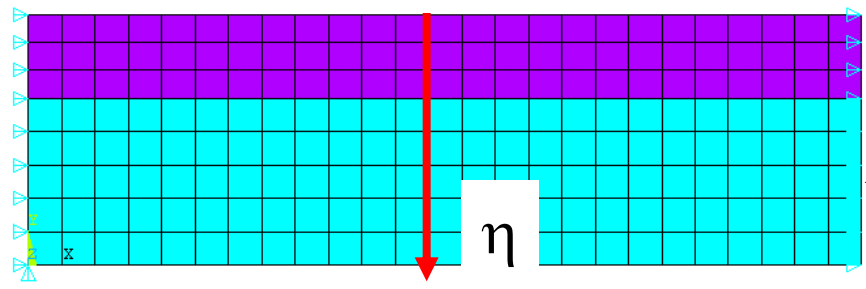
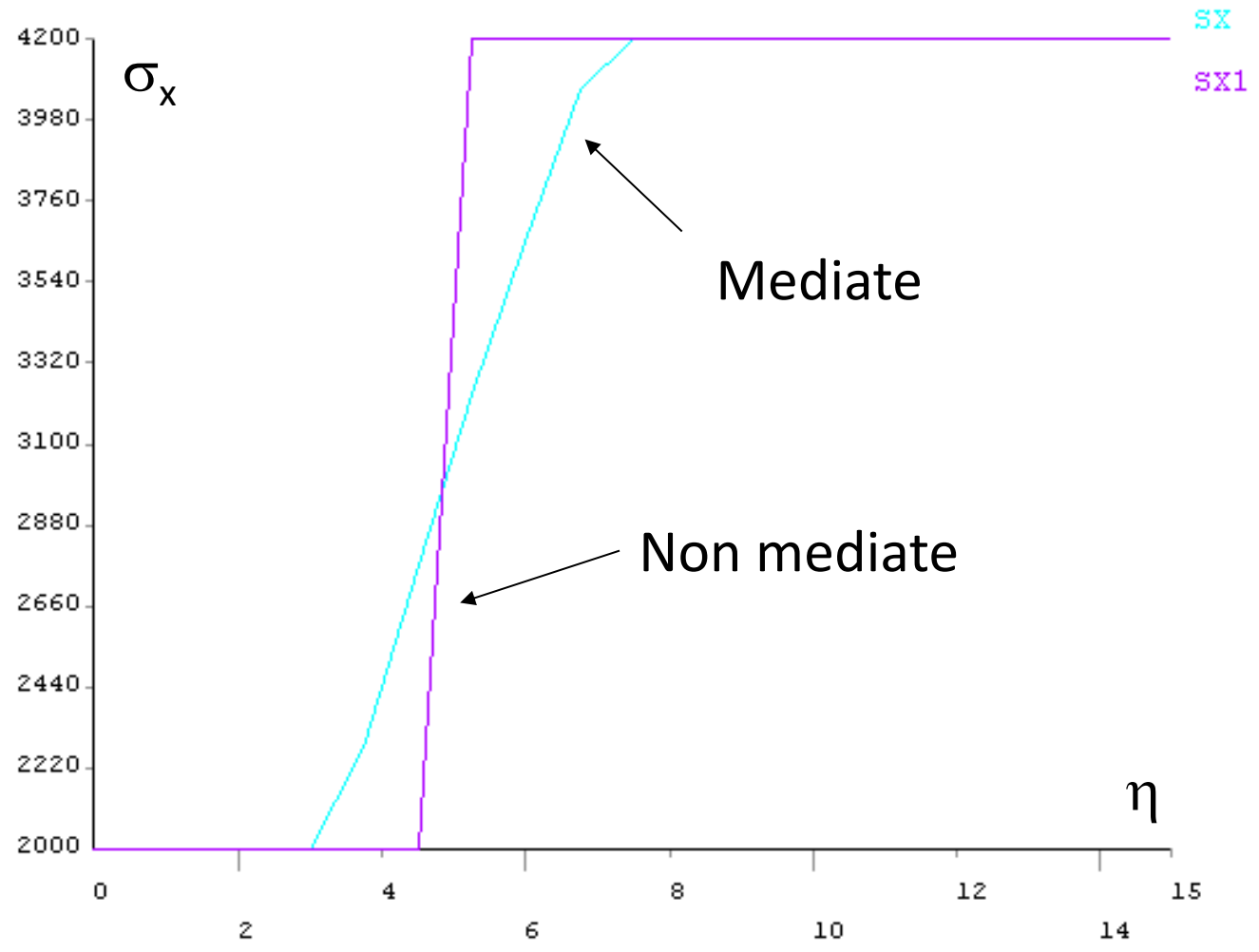


Tensioni σ_y mediate

In casi in cui le tensioni sono intrinsecamente discontinue, l'operazione di media nei nodi può diminuire la precisione.

Esempio 1 : Lastra in due materiali diversi, soggetta ad allungamento uniforme

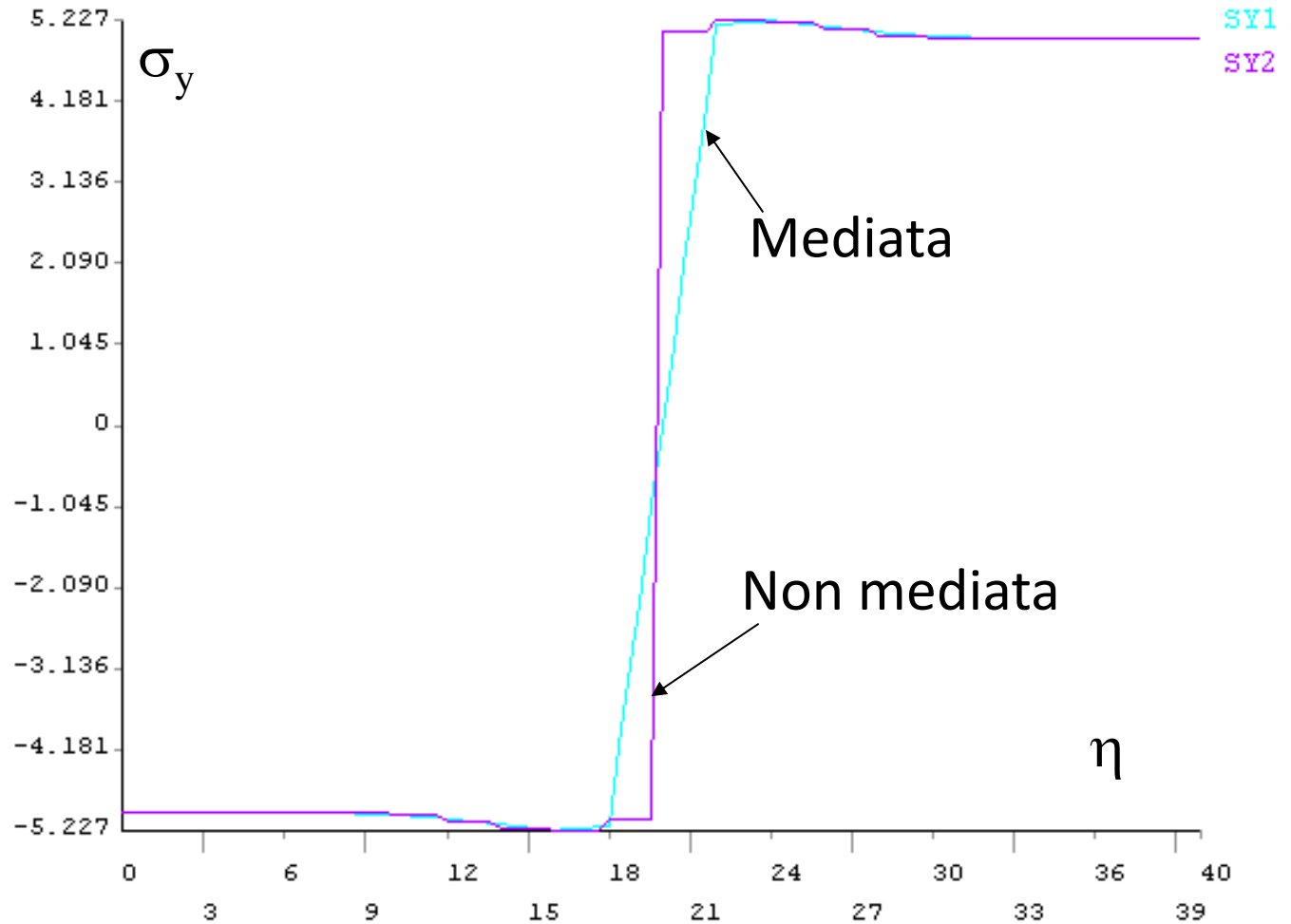
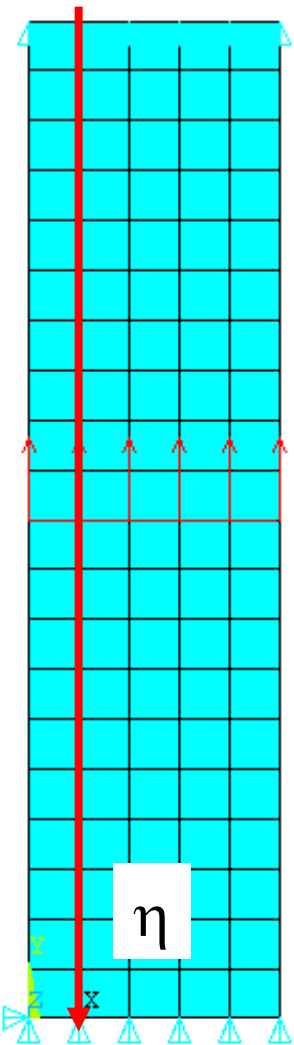




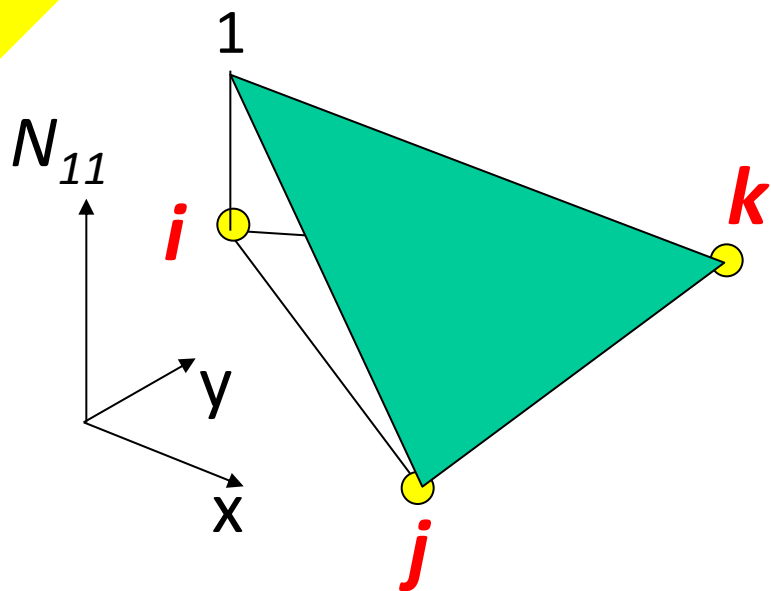
$E=10^5$ MPa

$E=2.1 \cdot 10^5$ MPa

Esempio 2: lastra incastrata agli estremi e caricata al centro

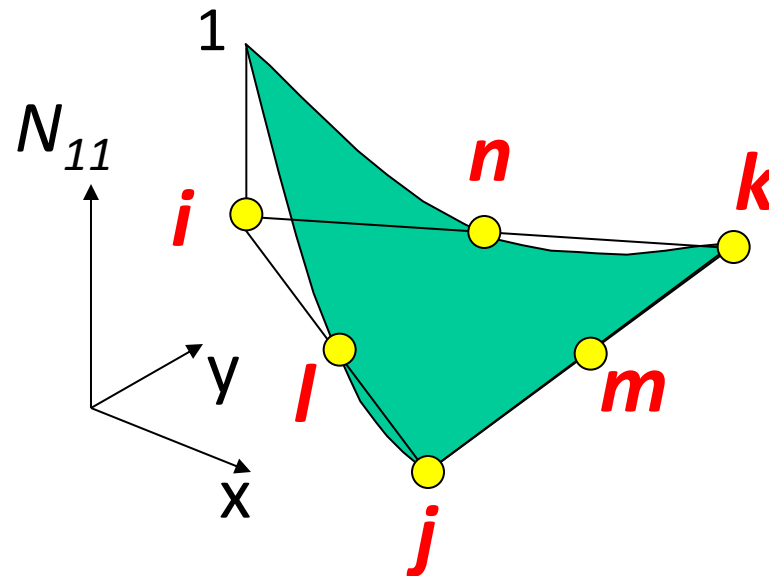


Elementi di ordine superiore



$$\begin{cases} N_{11}(x_i, y_i) = 1 \\ N_{11}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{11}(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

$$N_{lm}^e(x, y) = A_{lm} + B_{lm} \cdot x + C_{lm} \cdot y$$

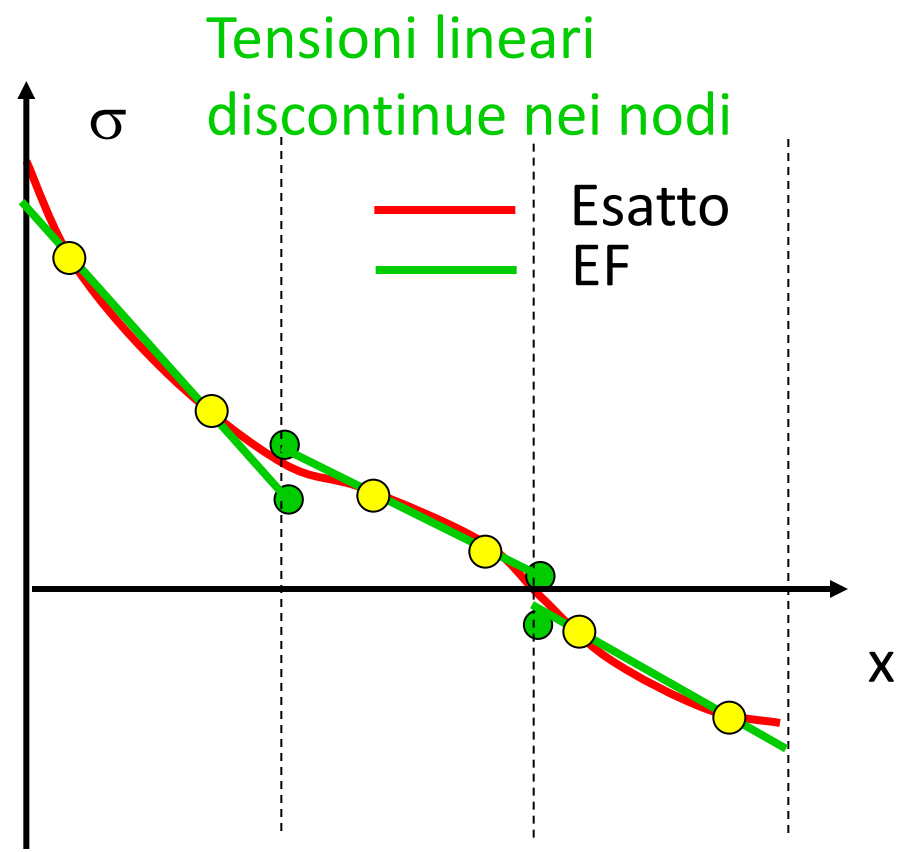
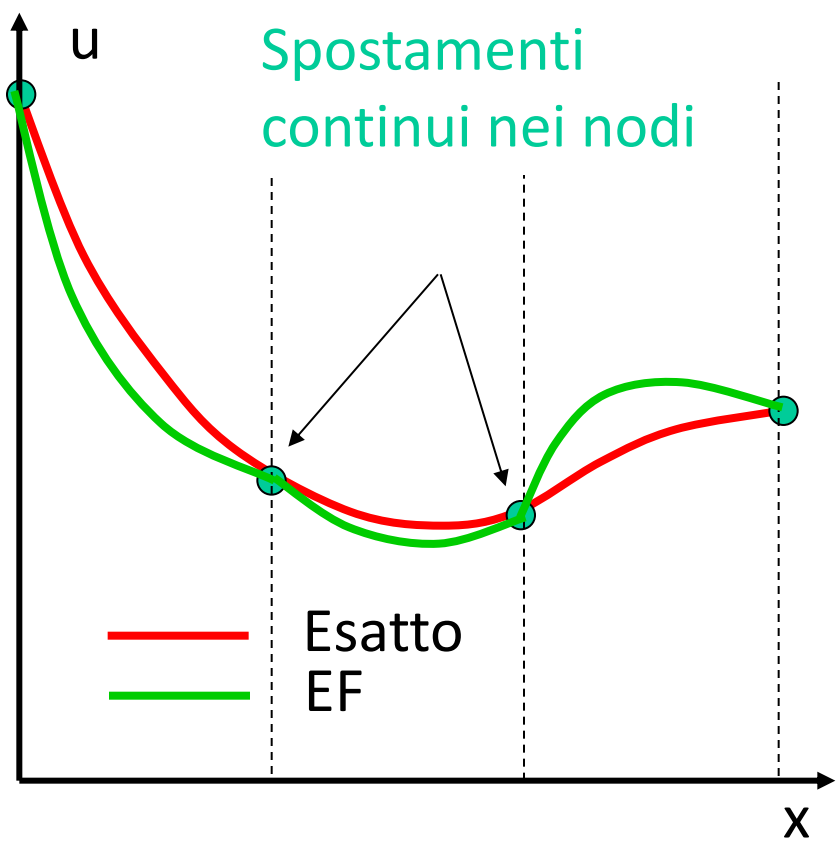
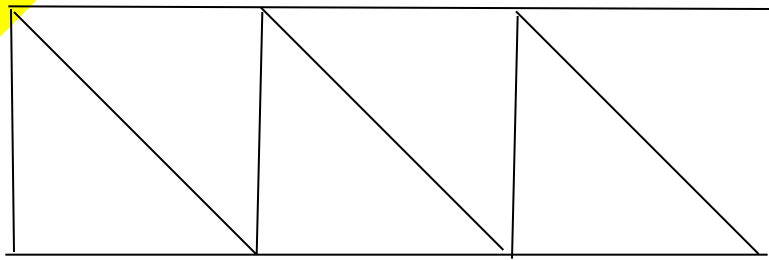


$$\begin{cases} N_{11}(x_i, y_i) = 1 \\ N_{11}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{11}(x_k, y_k) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N_{11}(x_l, y_l) = 0 \\ N_{11}(x_m, y_m) = 0 \\ N_{11}(x_n, y_n) = 0 \end{cases}$$

$$N_{lm}^e(x, y) = A_{lm} + B_{lm} \cdot x + C_{lm} \cdot y + D_{lm} \cdot x^2 + E_{lm} \cdot y^2 + F_{lm} \cdot xy$$

Elemento con F.ne Forma quadratica

Generalmente la soluzione è più accurata a parità di dimensione dell'elemento



La convergenza delle tensioni è più lenta di quella sugli spostamenti

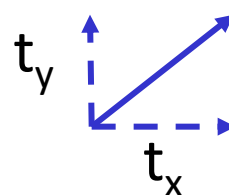
punti Gauss per calcolo di B e K^e → convergenza delle tensioni

Carichi distribuiti

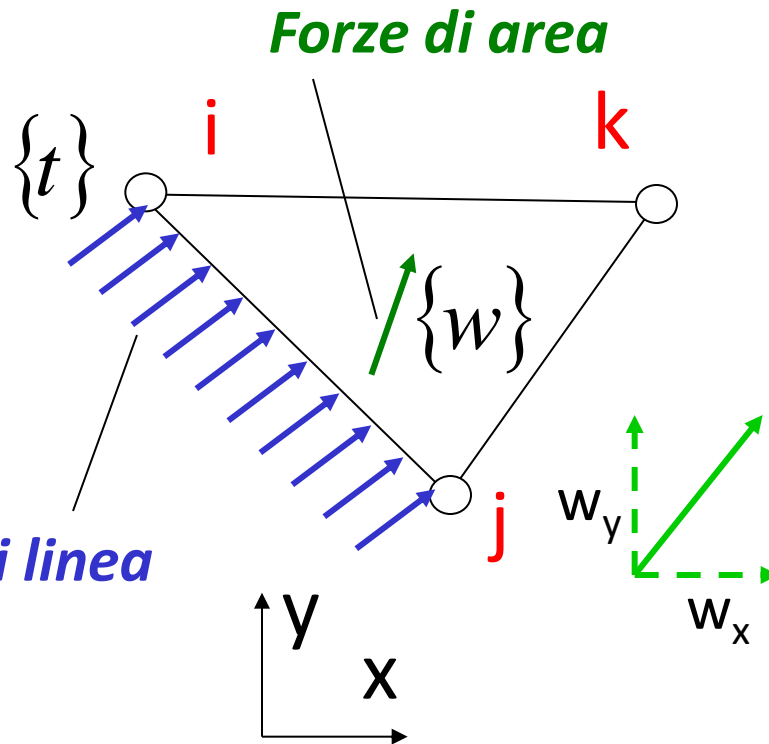
Lavoro virtuale
forze di volume o di area

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\} + L_W + L_t$$

Lavoro virtuale
forze di linea



Forze di linea



$$dL_W = \{\delta u\}^T \{w\} dA$$

$$L_W = \int_V \{\delta u\}^T \{w\} dA = \int_V \{\delta U^e\}^T [N]^T \{w\} dA = \{\delta U^e\}^T \int_V [N]^T \{w\} dA$$

$$L_t = \int_L \{\delta u\}^T \{t\} dL = \{\delta U^e\}^T \int_L [N]^T \{t\} dL$$

$$L_{\text{est}} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\} + \{\delta U^e\}^T \int_A [N]^T \{w\} dA + \{\delta U^e\}^T \int_L [N]^T \{t\} dL$$

$$L_{\text{int}} = \{\delta U^e\}^T [K^e] \{U^e\}$$

$$\{P^e\} + \{P_w^e\} + \{P_t^e\} = [K^e] \{U^e\}$$

$$\{P_w^e\} = \int_A [N]^T \{w\} dA$$

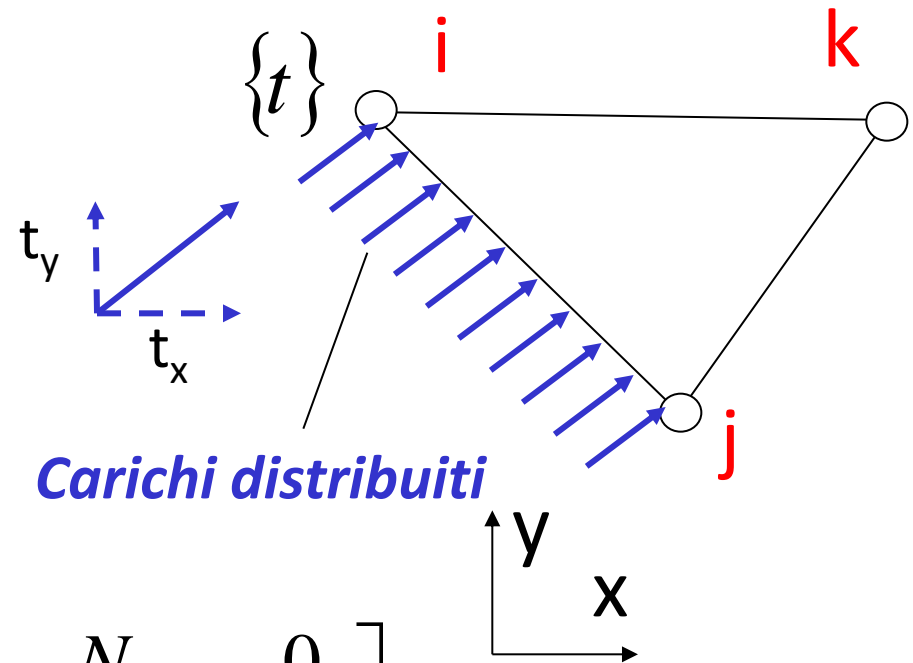
$$\{P_t^e\} = \int_L [N]^T \{t\} dL$$

Si possono applicare sui nodi delle forze staticamente equivalenti alle forze distribuite di volume e di linea (che compiono lo stesso lavoro virtuale)

Esempio: carico uniformemente distribuito sul lato di un elemento triangolare

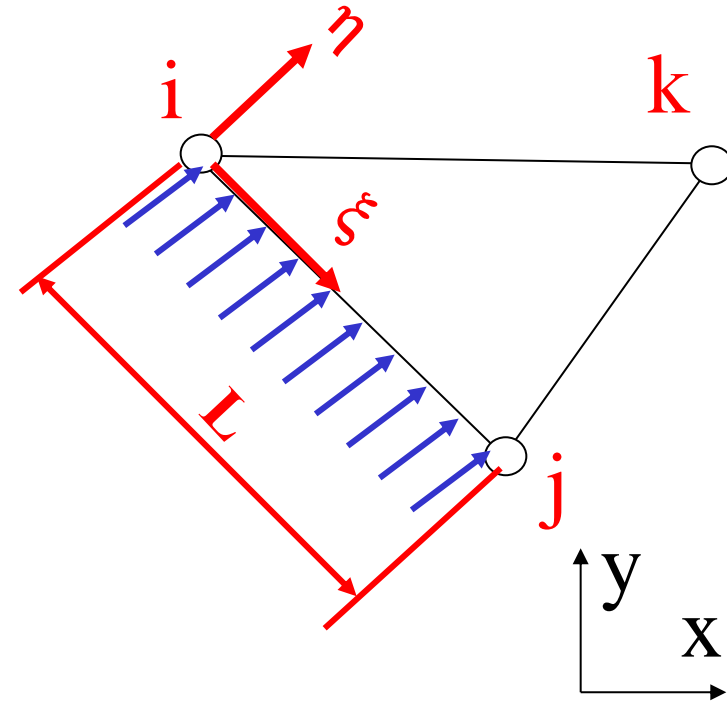
$$\{P_t^e\} = \int_L [N]^T \{t\} d\xi$$

6×1 6×2 2×1



$$[N] = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 \\ 0 & N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} \end{bmatrix}$$

$$\{P_t^e\} = \begin{Bmatrix} p_{t,ix}^e \\ p_{t,iy}^e \\ p_{t,jx}^e \\ p_{t,jy}^e \\ p_{t,kx}^e \\ p_{t,ky}^e \end{Bmatrix} = \int_L \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ 0 & N_{11} \\ N_{13} & 0 \\ 0 & N_{13} \\ N_{15} & 0 \\ 0 & N_{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} d\xi$$



$$p_{t,ix}^e = \int_L N_{11}(\xi) t_x d\xi$$

$$p_{t,jx}^e = \int_L N_{13}(\xi) t_x d\xi$$

$$p_{t,kx}^e = \int_L N_{15}(\xi) t_x d\xi$$

$$p_{t,iy}^e = \int_L N_{11}(\xi) t_y d\xi$$

$$p_{t,jy}^e = \int_L N_{13}(\xi) t_y d\xi$$

$$p_{t,ky}^e = \int_L N_{15}(\xi) t_y d\xi$$

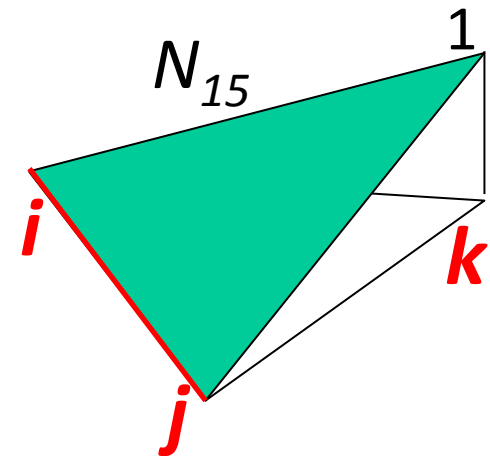
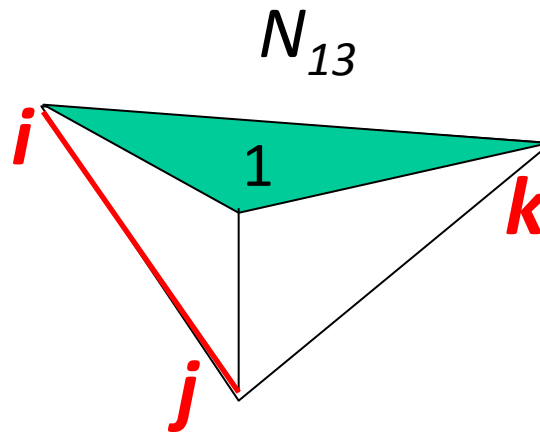
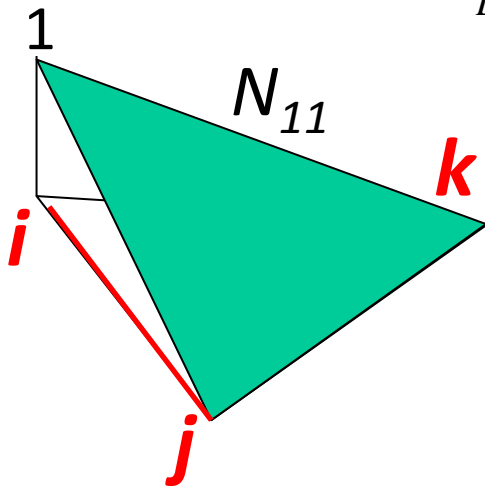
$N_{ij}(\xi)$ = funzioni di forma calcolate lungo lato ij

$$p_{t,ix}^e = \int_L N_{11}(\xi) t_x d\xi = t_x \int_L \frac{L-\xi}{L} d\xi = \frac{t_x L}{2}$$

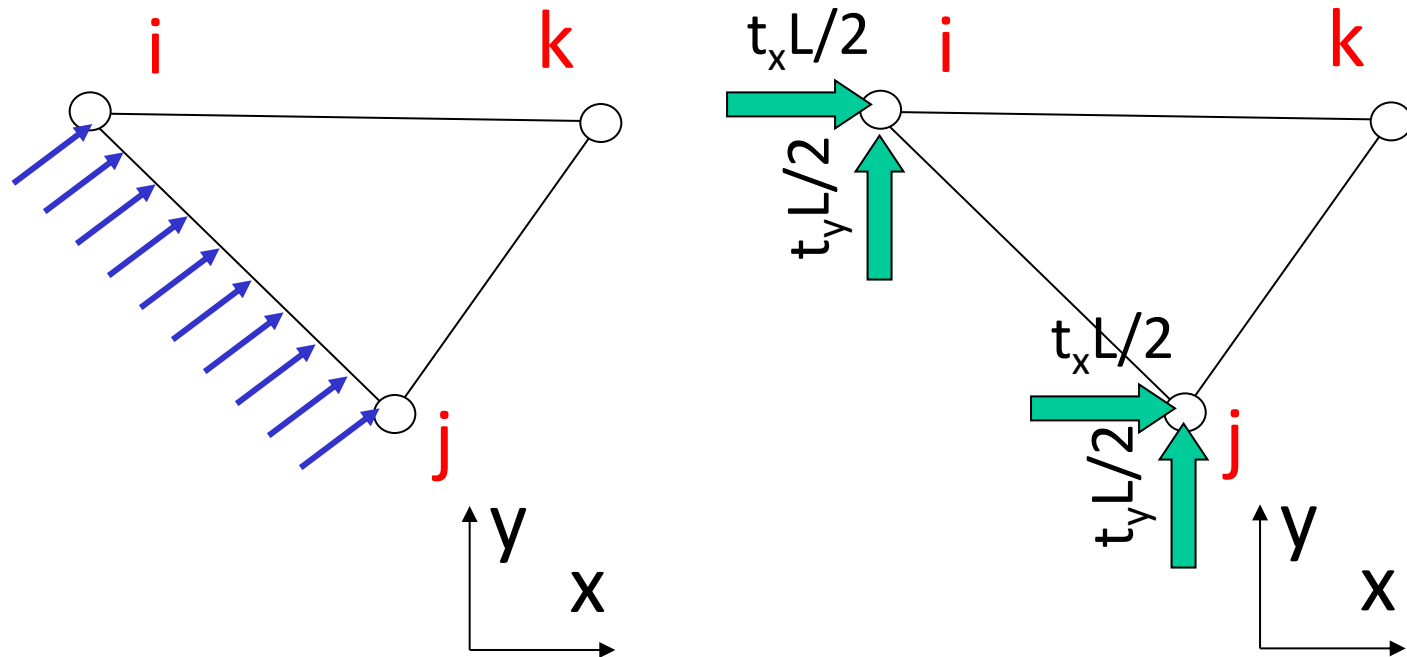
$$p_{t,jx}^e = \int_L N_{13}(\xi) t_x d\xi = t_x \int_L \frac{\xi}{L} d\xi = \frac{t_x L}{2}$$

$$p_{t,kx}^e = \int_L N_{15}(\xi) t_x d\xi = t_x \int_L 0 d\xi = 0$$

$N_{ij}(\xi) =$
 funzioni di
 forma lungo
 lato ij



Carichi nodali equivalenti



carico uniforme ripartito a metà fra i due nodi