In base allo schema:

$$\underline{v}_A = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}; \qquad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}; \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix};$$

Condizione sulla velocita' del punto A (costretta del coltello a non avere componente in direzione $\underline{e}_2$), da cui:

$$\underline{e}_2^T \underline{v}_A = [-\sin\theta \quad \cos\theta] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = -\sin\theta\, \dot{x} + \cos\theta\, \dot{y} = 0$$

Dato che la variabile di configurazione è $\underline{q} = [x \quad y \quad \theta]^T$, la forma Pfaffiana del vincolo risulta:

$$-\sin\theta\, \dot{x} + \cos\theta\, \dot{y} + 0\, \dot{\theta} = 0 \qquad \text{ovvia}$$

$$[-\sin\theta \quad \cos\theta \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = A(\underline{q})\, \dot{\underline{q}} = 0$$

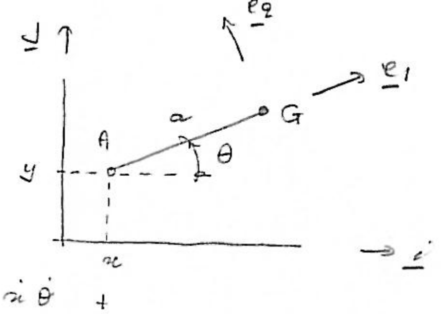
|| Questo risponde al punto (i)

Colcolo adesso l'en. cinetica $T(q,\dot{q})$ che ci consentira' di det. $B(\underline{q})$ in base alla relazione $T(\underline{q},\dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T B(\underline{q})\, \dot{\underline{q}}$

$$T(\underline{q},\dot{\underline{q}}) = (\text{in base a teo. König}) = \frac{1}{2} m \|\underline{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2$$

colcolo quindi la $\underline{v}_G$ a partire da $\underline{v}_A$

$$\underline{v}_G = \begin{bmatrix} \dot{x} - a\sin\theta\, \dot{\theta} \\ \dot{y} + a\cos\theta\, \dot{\theta} \end{bmatrix}$$



$$\|\underline{v}_G\|^2 = \underline{v}_G^T \underline{v}_G = \dot{x}^2 + a^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2 - 2a\sin\theta\, \dot{x}\dot{\theta} +$$
$$+ \dot{y}^2 + a^2\cos^2\theta\, \dot{\theta}^2 + 2a\cos\theta\, \dot{y}\dot{\theta} =$$
$$= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2\dot{\theta}^2 - 2a\sin\theta\, \dot{x}\dot{\theta} + 2a\cos\theta\, \dot{y}\dot{\theta}$$

Dunque $T(\underline{q},\dot{q})$ (totale) risulta:

$$T(\underline{q},\dot{q}) = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2\dot{\theta}^2 - 2a\sin\theta\, \dot{x}\dot{\theta} + 2a\cos\theta\, \dot{y}\dot{\theta}\right] + \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2$$

per ispezione la $B(\underline{q})$ risulta:

$$B(\underline{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 & -ma\sin\theta \\ 0 & m & ma\cos\theta \\ -ma\sin\theta & ma\cos\theta & ma^2 + J_z \end{bmatrix}$$

In base alla def.ne di $C(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$ con $[C(\underline{q}, \dot{\underline{q}})]_{ij} = c_{ij}$ dove

$c_{ij} = \Gamma^{i}_{jk} \dot{q}_k$

si ha:

$$C(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -ma\cos\theta\,\dot{\theta} \\ 0 & 0 & -ma\sin\theta\,\dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

// Questo risponde al punto (ii)

Dato che il sistema viaggia su un piano orizzontale $\mathcal{U} = \text{cost.}$,

da cui $\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \underline{q}}\right]^T = \underline{0}$

Inoltre non vi sono forze attive applicate da cui le forze attive generalizzate $\underline{Q} = [Q_x \;\; Q_y \;\; Q_\theta]^T = \underline{0}$.

// Questo risponde al punto (iii)

Scrivendo l'equilibrio secondo il metodo delle quasi-velocità si ha:

1) Data la $A(\underline{q})\dot{\underline{q}} = 0$, si deve scrivere la $\dot{\underline{q}} = S(\underline{q})\underline{\nu}$ dove $S(\underline{q})$ è una base del $\ker(A(\underline{q}))$ e $\underline{\nu}$ sono quasi velocità

ad es.

$$S(\underline{q}) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 \\ s\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{\nu} = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix};$$

Allora: $\dot{\underline{q}} = S(\underline{q})\underline{\nu}$; $\ddot{\underline{q}} = S(\underline{q})\dot{\underline{\nu}} + \dot{S}(\underline{q}, \underline{\nu})\underline{\nu}$

Nella dinamica

$$B(\underline{q})\ddot{\underline{q}} + C(\underline{q}, \dot{\underline{q}})\dot{\underline{q}} + \underbrace{A^T \underline{\lambda}}_{\tau \text{ forze vincolari}} = \underline{0}$$

sostituisco

$$B(\underline{q})\left(S(\underline{q})\dot{\underline{\nu}} + \dot{S}(\underline{q}, \nu)\underline{\nu}\right) + C(\underline{q}, \dot{\underline{q}})S(\underline{q})\underline{\nu} + A^T(\underline{q})\underline{\lambda} = \underline{0}$$

Proietto din. nel $\ker(A)$:

$$S^T(q)B(q)S(q)\dot{\underline{\nu}} + S^T(q)\left[B(\underline{q})\dot{S}(\underline{q}, \underline{\nu}) + C(\underline{q}, \dot{\underline{q}})S(\underline{q})\right]\underline{\nu} = \underline{0}$$

In definitiva la struttura delle eq.ni da risolvere è

$$\begin{cases} \dot{\underline{\nu}} = -(S^T B S)^{-1} S^T (B\dot{S} + CS)\,\underline{\nu} & (2 \text{ eq.ni}) \\ \dot{\underline{q}} = S\,\underline{\nu} & (3 \text{ eq.ni}) \end{cases} \Bigg\} \; 5 \text{ eq.ni};$$

fin. inc. $\underline{q}(t) \in \mathbb{R}^3$

$\underline{\nu}(t) \in \mathbb{R}^2$

|| Questo risponde al punto (iv)

Con le cardinali:

$$\begin{cases} \underline{F}_A = F_A\,\underline{e}_2 = m\,\underline{a}_G & (1^a \text{ cardinale}) \\ \underline{M}_A = \dot{\underline{K}}_G^{(r)} + \underline{AG} \times m\,\underline{a}_G & (2^a \text{ cardinale}) \end{cases} \quad \cup \quad A(\underline{q})\,\dot{\underline{q}} = 0$$

$$\underline{a}_G = \frac{d}{dt}(\underline{v}_G) = \begin{bmatrix} \ddot{x} - a \sin\theta\,\ddot{\theta} - a\cos\theta\,\dot{\theta}^2 \\ \ddot{y} + a\cos\theta\,\ddot{\theta} - a\sin\theta\,\dot{\theta}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{AG} = \begin{bmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{K}}_G^{(r)} = J_z\,\ddot{\theta}\,\underline{k}$$

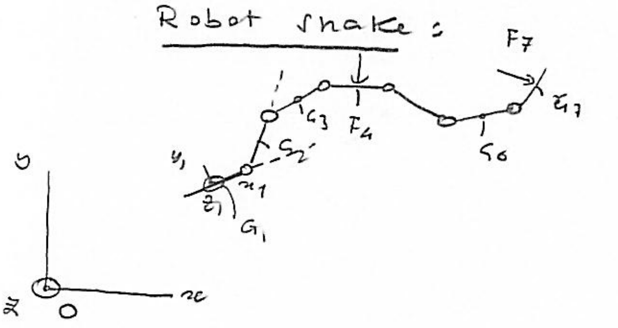
$\underline{M}_A = \underline{0}$ (no momento dalla lama, solo $\underline{F}_A$, che però fa mom. nullo rispetto a polo A)

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

Alla fine si hanno 4 eq.ni nelle incognite F_A, x, y, θ.

|| Questo risponde al punto (v)

Robot snake:



$${}^0A_1(x_1, y_1, q_1) = \left[\begin{array}{c|c} R_{2D}(q_1) & \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \\ \hline 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right];$$

$${}^1A_2(q_2) = \begin{bmatrix} R_{2D}(q_2) & \begin{bmatrix} a/2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix};$$

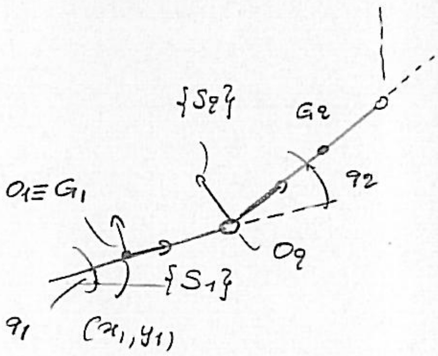
$${}^2A_3(q_3) = \begin{bmatrix} R_{2D}(q_3) & \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

etc... fino a

$${}^6A_7(q_7) = \begin{bmatrix} R_{2D}(q_7) & \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posso scrivere energia cinetica come:

$$T(\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}}) = \sum_{i=1}^{7} \frac{1}{2} \left\{ m_i \, \|\underline{v}_{G_i}\|^2 + J_i \, \omega_i^2 \right\}$$



dove

$$\underline{v}_{G_1} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} ; \qquad \underline{v}_{G_2} \text{ lo calcolo da}$$

$${}^0\underline{\bar{p}}_{G_2} = {}^0\underline{\bar{p}}_{O_2} + {}^0A_2(x_1, y_1, q_1, q_2) \, {}^2\underline{\bar{p}}_{G_2}$$

$${}^0\dot{\underline{\bar{p}}}_{G_2} = {}^0\dot{\underline{\bar{p}}}_{O_2} + {}^0\dot{A}_2 \, {}^2\underline{\bar{p}}_{G_2} \qquad \underline{v}_{G_2} = {}^0\dot{\underline{\bar{p}}}_{G_2}(1:2)$$

dove ad es. ${}^0A_2(x_1, y_1, q_1, q_2) = {}^0A_1(x_1, y_1, q_1) \, {}^1A_2(q_2)$

$${}^0\dot{A}_2 = {}^0\dot{A}_1 \, {}^1A_2 + {}^0A_1 \, {}^1\dot{A}_2$$

e ad esempio:

$${}^0\dot{A}_1 = \frac{\partial\, {}^0A_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial\, {}^0A_1}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial\, {}^0A_1}{\partial q_1} \dot{q}_1$$

$${}^1\dot{A}_2 = \frac{\partial\, {}^1A_2}{\partial q_2} \dot{q}_2$$

e

$$\frac{\partial\, {}^0A_1}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \qquad \frac{\partial\, {}^0A_1}{\partial y_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$\frac{\partial\, {}^0A_1}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} -sq_1 & -cq_1 & 0 \\ cq_1 & -sq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

e

$$\frac{\partial\, {}^1A_2}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} -sq_2 & -cq_2 & 0 \\ cq_2 & -sq_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0\bar{p}_{O_2} = \begin{bmatrix} x_1 + a \cos q_1 \\ y_1 + a \sin q_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dunque trovo i vari $\underline{v}_{G_i}$ e poi

$$\omega_i = \sum_{k=1}^{i} \dot{q}_k$$

da cui la $T(\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}})$ viene banalmente calcolata

$$\underline{\theta} = (x_1, y_1, q_1, q_2, \ldots, q_7)$$

Il contributo dovuto alle F_4 e F_7 si calcola da:

$$- F_4 \underline{J_4} \cdot \frac{\partial ({}^{0}\underline{p}_{G_4})}{\partial \theta_i} - F_7 \underline{J_7} \cdot \frac{\partial ({}^{0}\underline{p}_{G_7})}{\partial \theta_i}$$

noto bene che $\underline{J_4} = {}^{0}A_4(1:2;2)$; $\underline{J_7} = {}^{0}A_7(1:2;2)$

La struttura delle eq.ni sarà:

$$B(\underline{\theta})\,\underline{\ddot{\theta}} + C(\underline{\theta}, \underline{\dot{\theta}})\,\underline{\dot{\theta}} = \underbrace{\underline{\tau}}_{\text{attuatori ai giunti}} + \underbrace{\underline{Q}}_{\text{dovute a interaz. con esterno}}$$

con $$\underline{Q}_i = - F_4 \underline{J_4} \cdot \frac{\partial ({}^{0}\underline{p}_{G_4})}{\partial \theta_i} - F_7 \underline{J_7} \cdot \frac{\partial ({}^{0}\underline{p}_{G_7})}{\partial \theta_i}$$

noto bene che detto che, per come è stato param. lo snater,

$$\frac{\partial\, {}^{0}\underline{p}_{G_4}}{\partial \theta_i} = 0 \quad \text{per } i \geq 5$$

inoltre

$$\underline{\tau} = [\,0 \quad 0 \quad * \quad \cdots\cdots \quad *\,]$$

poiché non ho nessun attuatore che controlla direttam. la forza esterna in x_1 e y_1