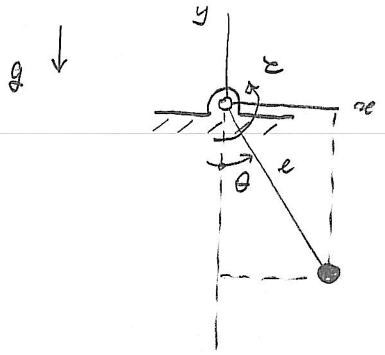
Esempio 1 (Pendolo)



eq.ni di congruenza:

$x = l \sin\theta$

$y = -l\cos\theta$

vincolo fra x e y

$x^2 + y^2 = l^2$

Configurazione del sistema $\underline{q} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ con q_i non indip.

$x^2 + y^2 = l^2 \Rightarrow q_1^2 + q_2^2 = l^2$

si deriva il vincolo rispetto al tempo:

$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$ ossia $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$

equivalente, in forma Pfaffiana, a:

$$[x \quad y]\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = 0 \qquad A(\underline{q})\,\dot{\underline{q}} = 0$$

Adesso consideriamo il Lagrangiano non vincolato:

$$L(\underline{q},\dot{\underline{q}}) = T(\underline{q},\dot{\underline{q}}) - U(\underline{q})$$

con $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{1}{2}[\dot{x} \quad \dot{y}]\begin{bmatrix} m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{2}[\dot{x} \quad \dot{y}]\begin{bmatrix} m\dot{x}\\ m\dot{y}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

ossia la T nella forma $T(\underline{q},\dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\underline{q}}^T B(\underline{q})\dot{\underline{q}}$ con, in questo caso, $B = \begin{bmatrix} m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}$

Allora C (Coriolis + f. centrifughe) $\Rightarrow C_{ij} = \Gamma^i_{jk}\,\dot{q}_k$

ma $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\right] \equiv 0 \quad \forall\, i,j,k = 1,2$

poiché B è costante

$U(\underline{q}) = -mgy$ (scelgo $U = 0$ con pendolo orizzontale allineato nel verso pos. asse x)

Allora:

$$\underline{G}(q) = -\left[\frac{\partial U(q)}{\partial q}\right]^T = -\left[\frac{\partial U}{\partial x} \;\vdots\; \frac{\partial U}{\partial y}\right]^T = -\left[0 \;\vdots\; -mg\right]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline mg \end{bmatrix}$$

eq.ni di Lagrange con vincoli:

$$\begin{cases} B(\underline{q})\ddot{\underline{q}} + \cancel{C(\underline{q},\dot{\underline{q}})\dot{\underline{q}}}^{\,0} + G(\underline{q}) + A^T \underline{\lambda} = \underline{0} \\ A(\underline{q})\,\dot{\underline{q}} = 0 \end{cases}$$

esplicitando le espressioni:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

||| metodo: Augmented formulation ... |||

$$\begin{cases} B\,\ddot{\underline{q}} + \underline{G}(\underline{q}) + A^T\lambda = \underline{0} \\ A\,\ddot{\underline{q}} + \mathring{A}\,\dot{\underline{q}} = \underline{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} B & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{G}(q) \\ -\mathring{A}\,\dot{q} \end{bmatrix}$$

↳ vincolo derivato

ossia

$$\mathring{A} = [\dot{x} \;\; \dot{y}] \;; \quad \mathring{A}\,\dot{q} = [\dot{x} \;\; \dot{y}]\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ [x \;\; y] & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{m\,l^2}\begin{bmatrix} y^2 & -xy & mx \\ -xy & x^2 & my \\ mx & my & -m^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \end{bmatrix}$$

||| metodo: Lagrange d'Alembert (embedding technique) |||

$$1\;\begin{bmatrix} \overset{1}{x} & \overset{1}{y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = 0 \qquad x\,\dot{x} + y\,\dot{y} = 0$$

si considera $\dot{y}$ dip. da $\dot{x}$ allora

$$\dot{y} = -\frac{x\,\dot{x}}{y} \qquad \text{per } y \neq 0$$

allora

$\underline{\delta q} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}$ che deve soddisfare $A(\underline{q})\,\underline{\delta q} = 0$ e' $\delta y = -\frac{x}{y}\,\delta x$

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{x}{y} \end{bmatrix} \delta x$$

allora nel PLV:

$(B\ddot{\underline{q}} + \underline{G}(\underline{q}))^T \,\underline{\delta q} = 0$ si ha

$\underline{\delta q}^T (B\ddot{\underline{q}} + \underline{G}(\underline{q})) = 0$

$$\delta x \left[1 \;\; -\frac{x}{y} \right] \left[\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} \right] = 0$$

δx arbitrario allora

$$\left[1 \;\; -\frac{x}{y} \right] \begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} + mg \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} - \frac{x}{y}\, m(\ddot{x} + g) = 0 & \text{(2° ordine)} \\ \text{eq. vincolo} \quad \dot{y} = -\frac{x}{y}\,\dot{x} & \text{(1° ordine)} \end{cases}$$

||| metodo: "Quasi velocita'" |||

$A(\underline{q})\,\dot{\underline{q}} = \underline{0}$ $\qquad \dot{\underline{q}} = S(\underline{q})\,\underline{\nu}$

$\overset{1}{}\,\overset{2}{[x \;\; y]} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = 0$ $\qquad$ S 1 sola colonna (2-1) base del $N(A)$ $\qquad$ con A rango pieno righe $\;{}_1 A_2 \, {}^2 S_1 \equiv 0 \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

$$[x \;\; y] \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = 0 = xy - yx$$

base del $N(A)$

allora

$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \nu$ quasi velocita'

eventualmente se voglio che $\nu = \dot{x}$ allora faccio base così

$$[x \;\; y] \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{x}{y} \end{bmatrix} = x + y\left(-\frac{x}{y}\right) = 0$$

in questo caso $\nu = \dot{x}$ (proprio la coord x)

Allora:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{x}{y} \end{bmatrix} \nu \qquad (\nu = \dot{x}) \qquad \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{x}{y} \end{bmatrix} \dot{\nu} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\dot{x}}{y} + \frac{x\dot{y}}{y^2} \end{bmatrix} \nu$$

allora:

$$B(S\dot{\nu} + \dot{S}\nu) + \underline{G} + A^T \lambda = \underline{0}$$

adesso proietto din. nel $N(A)$:

$$\begin{cases} S^T B S \dot{\nu} + S^T B \dot{S} \nu + S^T \underline{G} = \underline{0} \\ \dot{q} = S\nu \end{cases}$$

allora

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{x}{y} \end{bmatrix} \dot{\nu} + \begin{bmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\dot{x}}{y} + \frac{x\dot{y}}{y^2} \end{bmatrix} \nu + \\ \qquad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} = 0 & \text{1 eq.} \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{x}{y} \end{bmatrix} \nu & \text{2 eq.} \end{cases} \quad \text{3 eq. inc. } x, y, \nu$$

$$\begin{cases} \left(m + m\frac{x^2}{y^2} \right) \dot{\nu} + \left(-\frac{mx(x\dot{y} - y\dot{x})}{y^3} \right) \nu - \left(\frac{x}{y} \right) mg = 0 \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{x}{y} \end{bmatrix} \nu \end{cases}$$

Cerchiamo di capire cosa rappresenta il termine $A^T \lambda$

dalla

$$\begin{cases} B\ddot{\underline{q}} + \underline{G}(\underline{q}) + A^T \underline{\lambda} = \underline{0} & (1) \\ A\ddot{\underline{q}} + \dot{A}\dot{\underline{q}} = \underline{0} & \text{(vincolo derivato)} \quad (2) \end{cases}$$

da (1) $\longrightarrow$ $\ddot{q} = B^{-1}(-\underline{G} - A^T \underline{\lambda})$ sostituisco in (2)

$$+AB^{-1}\underline{G} + AB^{-1}A^T \underline{\lambda} = +\dot{A}\dot{\underline{q}} \qquad \text{con } A \text{ f.r.r.}$$

$$\underline{\lambda} = (AB^{-1}A^T)^{-1}(\dot{A}\dot{\underline{q}} - AB^{-1}\underline{G})$$

Nel nostro caso:

$$\lambda = \left(\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} \right)$$

$$\lambda = \frac{m}{\underbrace{(x^2+y^2)}_{\ell^2}} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - g y \right) = \frac{m}{\ell^2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - g y \right)$$

la

$$A^T \lambda = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \lambda = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \frac{m}{L^2} \left((\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - g y \right)$$

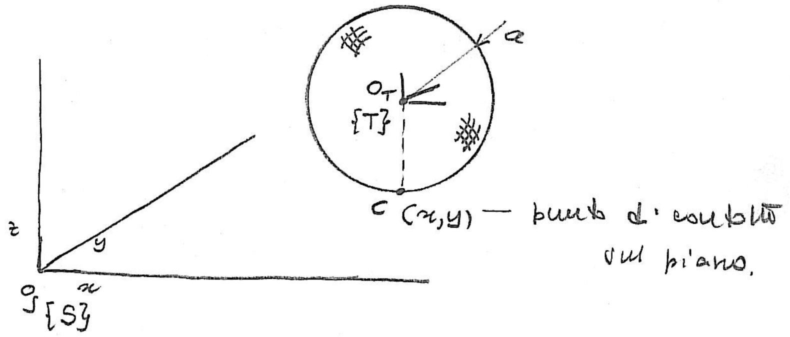
la tensione nel filo è $\| A^T \lambda \| = \frac{m}{\ell} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - g y \right)$

$$\| A^T \lambda \| = \underbrace{\frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\ell}}_{m \frac{V^2}{R}} \underbrace{- m g \frac{y}{\ell}}_{+ m g \cos\theta}$$

n.b. che $\left(-\frac{y}{\ell} \right) = \cos\theta$

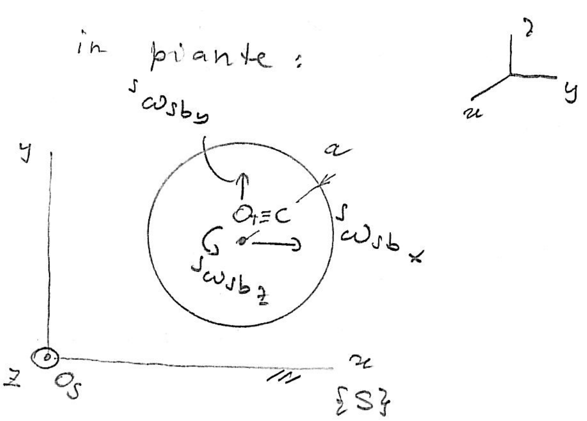
giustamente se $\underline{y < 0}$ (in basso) $\left(- m g \frac{y}{\ell} \right) > 0$ e dunque la tensione è maggiore

Esempio 2 (sfera che rotola senza strisciare su un piano)



- $\{S\}$ frame fisso (spatial)
- $\{T\}$ frame di origine O_T nel centro della sfera che trasla (e basta!) rimanendo con assi allineati a $\{S\}$
- $\{B\}$ body sarebbe solidale alla sfera

in pianta:



con parametrizzazione di $SO(3)$ da Eulero 323 (ZYZ)

$$^s\omega_{sb} = {}^sJ(\psi, \theta, \varphi) \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

nell'ipotesi di rotolamento senza strisciamento:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{pto di contatto}\\ \text{sul piano}}}{\underline{v}_C} = \underline{v}_{O_T}$$ ← del centro del frame {T} traslante con la sfera

(sempre de contatto)

La componenti di $\underline{v}_c = \underline{v}_{O_T}$ sono legate alle componenti della velocita' angolare e lo spin e' nullo

$$\begin{cases} {}^s\omega_{sb}^T \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} a = -\dot{y} \\ {}^s\omega_{sb}^T \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} a = \dot{x} \\ {}^s\omega_{sb}^T \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

$${}^s\omega_{sb} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\psi & \cos\psi\sin\theta \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi\sin\theta \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} a\begin{bmatrix}0 & -\sin\psi & \cos\psi\sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix} + \dot{y} = 0 \\ a\begin{bmatrix}0 & \cos\psi & \sin\psi\sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix} - \dot{x} = 0 \\ \begin{bmatrix}1 & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

allora configurazione: $\underline{q} = (x, y, \psi, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^5$

vincoli:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a[0 & 1 & 0 & -\sin\psi & \cos\psi\sin\theta] \\ a[-1 & 0 & 0 & \cos\psi & \sin\psi\sin\theta] \\ [0 & 0 & 1 & 0 & \cos\theta] \end{bmatrix}}_{A(\underline{q})} \overbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\psi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}}^{\dot{\underline{q}}} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Scriviamo il Lagrangiano non vincolato:

$$L(\underline{q},\dot{\underline{q}}) = T(\underline{q},\dot{\underline{q}}) - U(\underline{q})$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{in questo caso}\\ \text{dip da } \underline{q} \text{ e } \dot{\underline{q}}}}{T(\underline{q},\dot{\underline{q}})} = \frac{1}{2}\dot{\underline{q}}^T B \dot{\underline{q}} = \frac{1}{2} m \underbrace{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}_{\|\underline{v}\|^2_{\text{baric}}} + \frac{1}{2}\, {}^s\omega_{sb}^T \, \underset{\substack{\nearrow\\ \text{baricentro}}}{{}^s\mathcal{I}_{O_T}} \, {}^s\omega_{sb}$$

con m = massa della sfera

$${}^s\mathcal{I}_{O_T} = \text{tens. inerzia risp. } O_T \text{ (baricentro) in componenti in } \{S\} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_{zz} \end{bmatrix} = I_{xx}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sfera $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$

$$T(\underline{q},\dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{\psi} & \dot{\theta} & \dot{\varphi} \end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|ccc} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{\psi} & \dot{\theta} & \dot{\varphi} \end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \;\; 0 \;\; 0 \\ 0 & 0 & 0 \;\; 0 \;\; 0 \\ \hline 0 & 0 & \\ 0 & 0 & {}^sJ^T \, {}^sJ \, I_{xx} \\ 0 & 0 & \end{array}\right]\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

ossia:

$$T(\underline{q},\dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2}\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{\psi} & \dot{\theta} & \dot{\varphi} \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{q}}^T}\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx} & 0 & I_{xx}\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx}\cos\theta & 0 & I_{xx} \end{bmatrix}}_{B(\underline{q})}\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{q}}}$$

$$C(\underline{q},\dot{\underline{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{34} & C_{35} \\ 0 & 0 & C_{34} & 0 & C_{45} \\ 0 & 0 & C_{35} & C_{45} & 0 \end{bmatrix}$$

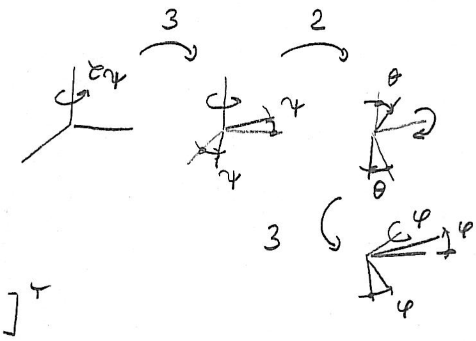
dove $C_{34} = -\frac{1}{2} I_{xx} \sin\theta \, \dot{\varphi}$

$C_{35} = -\frac{1}{2} I_{xx} \sin\theta \, \dot{\theta}$

$C_{45} = \frac{1}{2} I_{xx} \sin\theta \, \dot{\psi}$

Potenziale $U(\underline{q}) = 0$

Dunque abbiamo tutte le informazioni necessarie per scrivere le eq.ni della dinamica del sistema anolonomo.



$$\begin{cases} B(\underline{q})\,\ddot{\underline{q}} + C(\underline{q},\dot{\underline{q}})\,\dot{\underline{q}} + A^T(\underline{q})\,\underline{\lambda} = \underline{\tau} & \text{5 eq.ni} \\ A(\underline{q})\,\dot{\underline{q}} = \underline{0} & \text{3 eq.ni} \end{cases}$$

attenzione che $\underline{\tau} = [f_x \;\; f_y \;\; \tau_\psi \;\; \tau_\theta \;\; \tau_\varphi]^T$

f_x, f_y: forze (N) su baricentro O_T in direz. x e y

τ_ψ, τ_θ, τ_φ: coppie (N·m) attorno agli assi:

- τ_ψ : coppia imbardata (z_0)
- τ_θ : coppia (y_1)
- τ_φ : coppia (z_2)

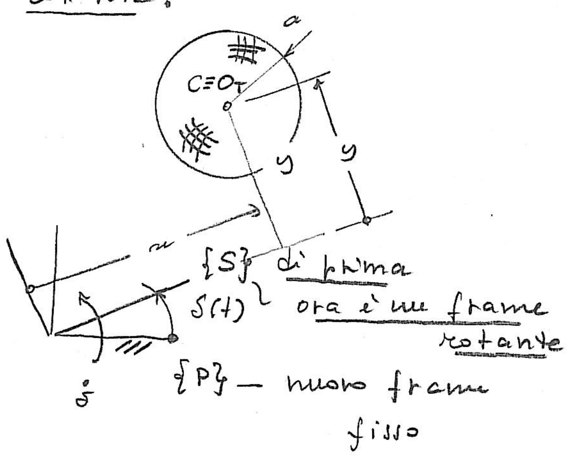
5 + 3 = 8 eq.ni differenziali

incognite = 5 + 3

$\underline{q} = (x, y, \psi, \theta, \varphi)$ — f.ni di t

$\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — f.ni di t

Che succede se considero una sfera montata su una tavola rotante?



$T(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$ è differente!

ci entra anche la $\dot{\delta}$ etc...