Compito di meccanica dei robot 18/09/2013



- Svolgimento -

1. Per calcolare la distanza (Euclidea, se non diversamente specificato) occorre riportare l'espressione dei due punti in uno stesso sistema di riferimento.

Per comodità cerchiamo

$$f^c = T_{ca} f^a \quad ; \quad g^c = T_{cb} g^b$$

Ricordando che

$$T = \left[\begin{array}{c|c} R & d \\ \hline \vec{0}^T & 1 \end{array}\right] \Rightarrow T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} R^T & -R^T d \\ \hline \vec{0}^T & 1 \end{array}\right]$$

si ottiene

$$T_{ca} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad ; \quad T_{cb} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

da cui risulta

$$\Rightarrow f^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad g^c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\| f^c - g^c \| = \sqrt{(+1)^2 + (-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{21}$$

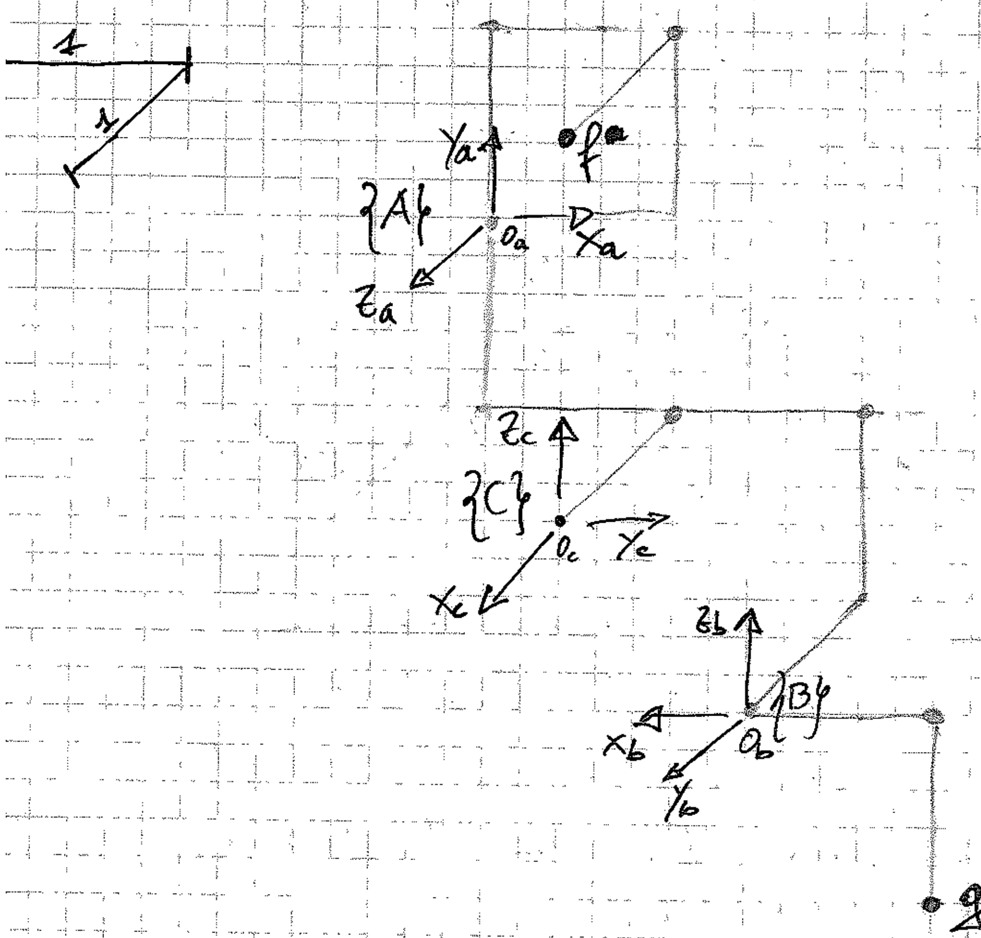
---

Le matrici $T_{ca}$ e $T_{cb}$ ci aiutano a rappresentare graficamente la disposizione dei frame. Si ricordi che i primi 3 elementi della 4° colonna di una trasformazione $T_{xy}$

individuano l'origine di {Y} rispetto ad {X} (espresso in {X} se non diversamente indicato). Similmente, dalla matrice di rotazione possiamo trovare

- i primi 3 elementi della 1° colonna descrivono la disposizione dell'asse $X_{\{Y\}}$
- i primi 3 della 2° colonna descrivono l'asse $Y_{\{Y\}}$
- i primi 3 della 3° colonna descrivono l'asse $Z_{\{Y\}}$

tutti espressi in {X}.
Si ottiene la seguente rappresentazione:



Per trasformare il twist $V_{ab}^{a}$ in $V_{ac}^{b}$ occorre utilizzare in sequenza

- una matrice ${}^{a}M_{O_cO_b}$ per cambiare il polo dal quale si osserva la velocità
- una matrice del tipo ${}^{b}L_a$ per cambiare il frame di lettura

$$V_{ac}^{b} = {}^{b}L_a \, {}^{a}M_{O_cO_b} V_{ab}^{a} = \left[\begin{array}{c|c} R_{ba} & 0 \\ \hline 0 & R_{ba} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I & -{}^{a}\widehat{(O_bO_c)} \\ \hline 0 & I \end{array}\right] V_{ab}^{a} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} R_{ba} & -R_{ba}\,{}^{a}\widehat{(O_bO_c)} \\ \hline 0 & R_{ba} \end{array}\right]$$

dove $R_{ba} = T_{ba}(1:3, 1:3)$

${}^{a}O_b = T_{ab}(1:3, 4)$

${}^{a}O_c = T_{ac}(1:3, 4)$ (data dal testo)

$$T_{ab} = T_{ac} \cdot T_{cb} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{ba} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui ${}^{b}L_a \, {}^{a}M_{O_cO_b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1) Per la presentazione della convenzione di Denavit-Hartenberg si vedano le dispense del corso.

La convenzione applicata al manipolatore proposto porta alla disposizione dei frame come in figura

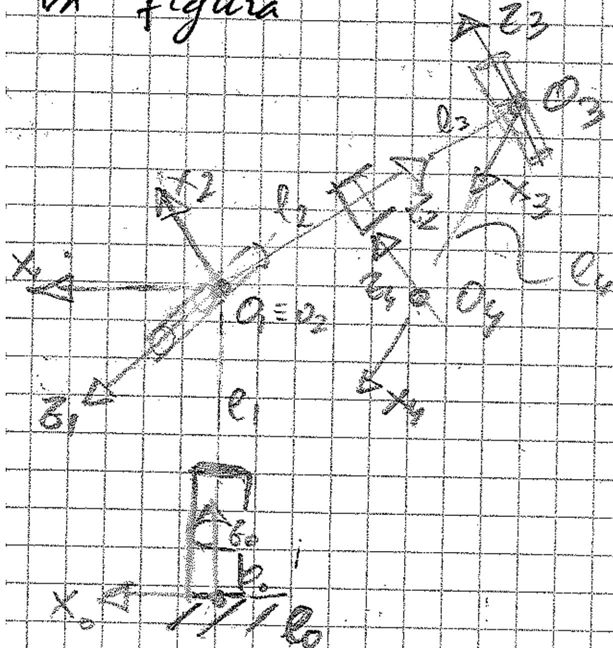



Tabella DH

| | $a$ | $\alpha$ | $d$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $-\pi/2$ | $l$ | $q_1$ |
| 2 | 0 | $\pi/2$ | 0 | $q_2-\pi/4$ |
| 3 | 0 | $\pi/2$ | $2l+q_3$ | $\pi/2$ |
| 4 | $l$ | 0 | 0 | $q_4$ |

Cinematica diretta

$$T_{ee}(q) = T_1^0\, T_2^1\, T_3^2\, T_4^3\,;$$

$$\text{con } T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta c\alpha & s\theta s\alpha & a c\theta \\ s\theta & c\theta c\alpha & -c\theta s\alpha & a s\theta \\ 0 & s\alpha & c\alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dunque risultano

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} cq_1 & 0 & -sq_1 & 0 \\ sq_1 & 0 & cq_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T_2^1 = \begin{bmatrix} c(q_2-\pi/4) & 0 & s(q_2-\pi/4) & 0 \\ s(q_2-\pi/4) & 0 & -c(q_2-\pi/4) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2l+q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T_3^2 \; ; \quad T_4^3 = \begin{bmatrix} c_{q_4} & -s_{q_4} & 0 & l c_{q_4} \\ s_{q_4} & c_{q_4} & 0 & l s_{q_4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In particolare nella configurazione proposta, con $l=1$, le matrici risultano

$$T_1^0(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad T_2^1(0) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \quad T_4^3(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nella configurazione proposta la matrice cinematica diretta vale

$$T_4^0(0) = T_1^0(0)\, T_2^1(0)\, T_3^2(0)\, T_4^3(0) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

# Jacobiano del Manipolatore

$$J = \begin{bmatrix} \underline{K}_0 \times O_0O_4 & \underline{K}_1 \times O_1O_4 & \underline{K}_2 & K_3 \times O_3O_4 \\ -- & -- & -- & -- \\ \underline{K}_0 & \underline{K}_1 & 0 & K_3 \end{bmatrix}$$

Dove i vari contributi possono essere calcolati come segue:

$\underline{K}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se il frame [redacted] base è scelto coincidente con il frame $\{0\}$

$O_0O_4 = T_4^0(1:3,4)$

$O_1O_4 = T_4^1(1:3,4)$ ; $T_4^1 = T_2^1\, T_3^2\, T_4^3$

$\underline{K}_1 = T_1^0(1:3,3)$

$\underline{K}_2 = T_2^0(1:3,3)$ ; $T_2^0 = T_1^0\, T_2^1$

$\underline{K}_3 = T_3^0(1:3,3)$ ; $T_3^0 = T_1^0\, T_2^1\, T_3^2$

$O_3O_4 = T_4^3(1:3,4)$ ;

Nella configurazione di riferimento si ha

$$T_4^1(0) = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad T_2^0(0) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0(0) = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Svolgendo i calcoli, il Jacobiano completo nella configurazione di riferimento risulta 

$$J(0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

---

Per calcolare le coppie all'equilibrio nel caso gli ultimi due link siano dotati di massa, dobbiamo considerare ~~con~~ la relazione

$\tau = J^T f_c$ che, nel caso di due punti di applicazioni di forze di interazione robot-mondo, diventa $\tau = \begin{bmatrix} J_1^T , J_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{c_1} \\ f_{c_2} \end{bmatrix}$

dove $J_1, J_2 \in \mathbb{R}^{6 \times \#q}$ ($\#q$ = numero di giunti) sono i Jacobiani che descrivono la velocità (twist) dei punti in cui sono applicate le forze.
Se i Jacobiani sono calcolati tramite il metodo visto prima, le forze di ~~contatto~~ interazione sono

- positive se effettuate dal robot sul mondo
- con frame di lettura $\{0\}$ e polo nel punto in cui è applicato il wrench.

Dunque
$$f_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad f_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il primo Jacobiano può essere calcolato a partire dalla tabella

| | $a$ | $\alpha$ | $d$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $0$ | $-\pi/2$ | $l$ | $q_1$ |
| 2 | $0$ | $\pi/2$ | $0$ | $q_2 - \pi/4$ |
| 3 | $0$ | $\pi/2$ | $\frac{3}{2}l + q_3$ | $\pi/2$ |

Per il secondo invece

| | $a$ | $\alpha$ | $d$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $0$ | $-\pi/2$ | $l$ | $q_1$ |
| 2 | $0$ | $\pi/2$ | $0$ | $q_2 - \pi/4$ |
| 3 | $0$ | $\pi/2$ | $2l + q_3$ | $\pi/2$ |
| 4 | $l/2$ | $0$ | $0$ | $q_4$ |

Risulta

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -3\sqrt{2}/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{4} & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad J_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2}/4 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

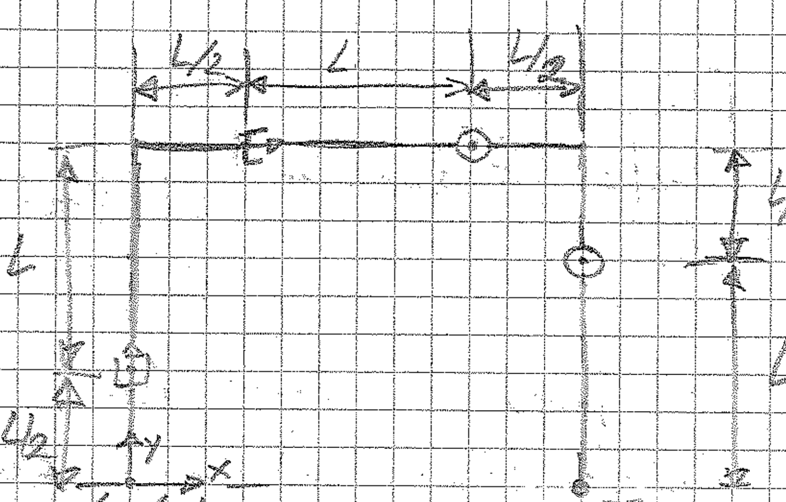
Es. 3)

Il Jacobiano del robot è composto da tre Jacobiani di catene seriali semplici:

- la prima da {A} al contatto $c_1$, che coinvolge i giunti 1, 2, 3, 4;
- la seconda da {A} al contatto $c_2$, che coinvolge i giunti 1, 2, 3, 5;
- la terza da {A} al contatto $c_3$, che non coinvolge nessun giunto (contatto sul telaio)

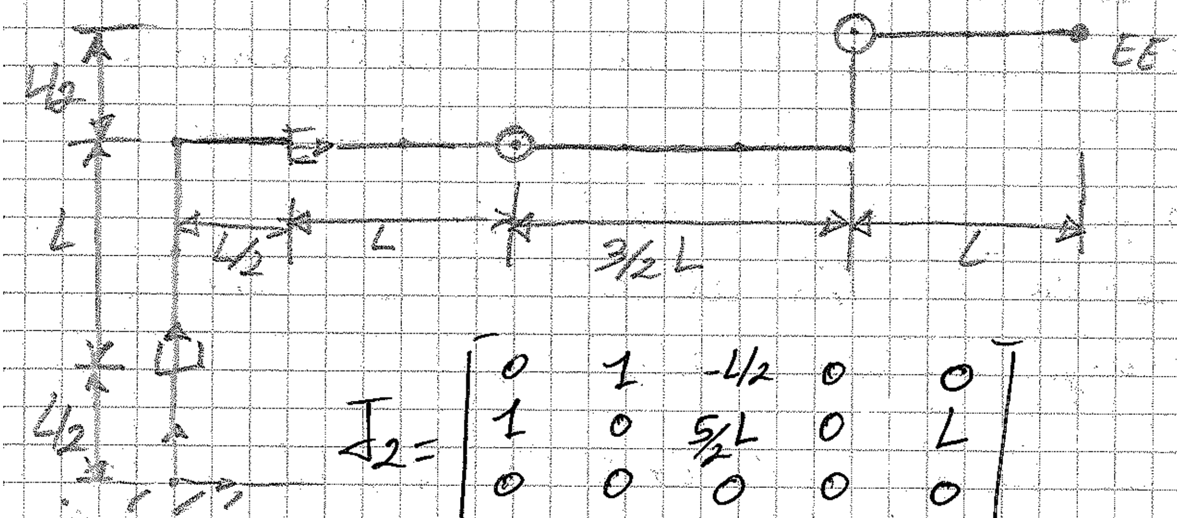
$$\begin{bmatrix} v_{c_1} \\ v_{c_2} \\ v_{c_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} \dot{q} \,, \quad \text{con} \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix}$$

Calcolo di $J_1$




$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2}L & L & 0 \\ 1 & 0 & L/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

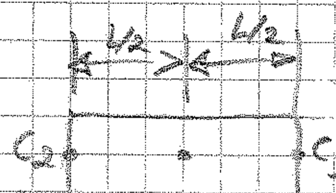
4 Calcolo di $J_2$




$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -L/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{5}{2}L & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$J_3 = zeros(6,5)$ ; $J = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$

Matrice di grasp




$$\begin{bmatrix} v_{c_1} \\ v_{c_2} \\ v_{c_3} \end{bmatrix} = G^T \xi_{obj} = \begin{bmatrix} G_1^T \\ G_2^T \\ G_3^T \end{bmatrix} \xi_{obj}$$

dove $\xi_{obj}$ è il twist dell oggetto rispetto al frame baricentrico e parallelo al frame base

$\Rightarrow \quad G_1^T = zeros(6,6)$

$$G_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_3^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per ciascun contatto la matrice $H_i$ risulta

$$H_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oppure, considerando che il problema è planare, ~~[illegible]~~ si può anche usare la forma

$$H_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 \end{bmatrix}$$

Equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \tau = J^T H^T f_c \\ w = -G H^T f_c \end{cases} \qquad \text{con } f_c = \begin{pmatrix} f_{c1} \\ f_{c2} \\ f_{c3} \end{pmatrix}$$

(i) Se il robot è completamente attuato tutti i giunti possono erogare coppie

(ii) Se $J_1, J_2, J_3$ sono passivi $\Rightarrow \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$

(iii) Se $J_1, J_2, J_4$ sono passivi $\Rightarrow \tau_1 = \tau_2 = \tau_4 = 0$