Compito di Meccanica dei Robot – 14 Febbraio 2012

1) Come mostrato nella vista in pianta in Figura 1, un sfera omogenea di massa m, baricentro G e tensore d'inerzia baricentrico $\mathcal{I}_G^b$ (noti) rotola senza strisciare e senza spin (prillamento), rispetto al punto di contatto C, su di una tavola orizzontale che ruota attorno al punto O. La rotazione della tavola rotante è descritta dall'angolo $\alpha(t) = \omega t$. Per meglio visualizzare la situazione si sono introdotti il sistema di riferimento *world* $\mathsf{S}_W = (O; x_W, y_W, z_W)$ (fisso al suolo) ed il sistema di riferimento *local* $\mathsf{S}_L = (O; x_L, y_L, z_L)$ (solidale alla tavola).

(i) Si discuta la possibilità di determinare un set di coordinate indipendenti per parametrizzare la configurazione della sfera; (ii) si scelga una set di coordinate (non necessariamente indipendenti) per descrivere la configurazione della sfera; (iii) scrivano le equazioni di vincolo che assicurano il moto di puro rotolamento della sfera sulla tavola rotante; (iv) si scrivano le equazioni di moto della sfera rispetto alla tavola rotante (S_L) che consentirebbero, una volta integrate (non richiesto, naturalmente) di conoscere la postura della sfera e la traiettoria del punto di contatto sulla tavola.

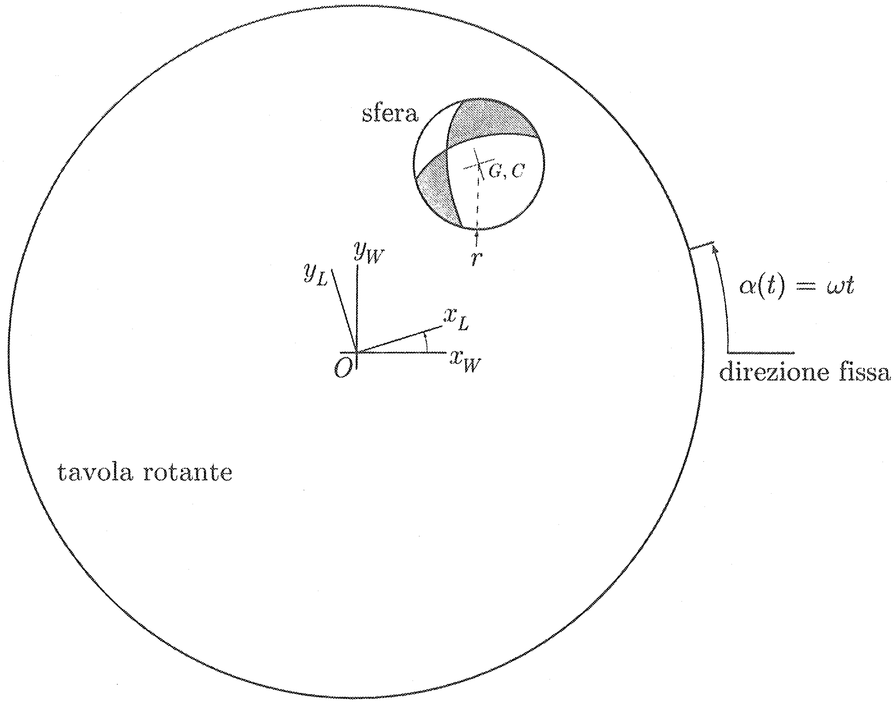
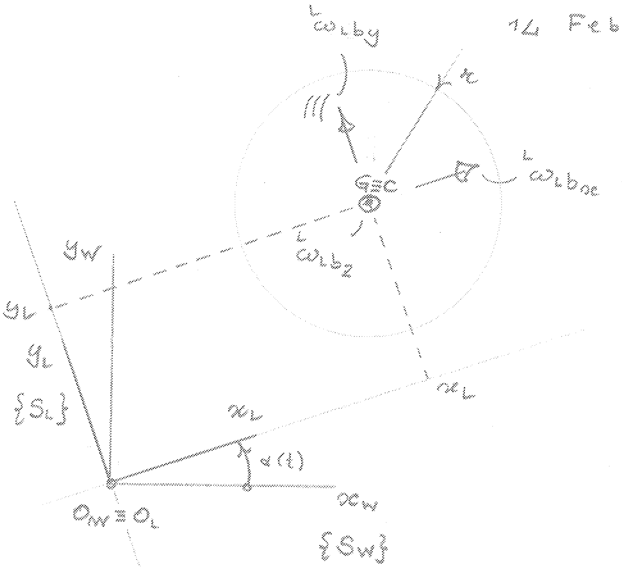


Figura 1: Sfera in puro rotolamento su una tavola rotante.

2) Si enuncino e discutano accuratamente tutti passi della procedura di applicazione della convenzione di Denavit-Hartenberg alla parametrizzazione di una struttura cinematica seriale. Come tratterebbe la parametrizzazione di un braccio seriale avente la base fissata non al suolo, bensì ad un satellite in assenza di gravità?

Soluzione del Compito di Meccanica dei Robot
14 Febbraio 2012



Definizioni:

- $\{S_W\}$ frame fisso (world)
- $\{S_L\}$ frame locale alla tavola rotante
- $\{S_B\}$ frame body solidale alla sfera con $O_B \equiv G$
- r = raggio della sfera
- G = baricentro della sfera
  C = pto di contatto sfera-piano

- $^L\omega_{LB} = [\,^L\omega_{Lbx} \;\; ^L\omega_{LBy} \;\; ^L\omega_{LBz}]^T$ componenti della v. angolare della sfera rispetto al frame $\{S_L\}$. Nota bene: questa è solo la componente di $\underline{\omega}^{(rel)}$ della v. ang. della sfera rispetto al suolo: quella di trascinamento $\underline{\omega}^{(tr)}$ (ancora in $\{S_L\}$) sarà $^L\omega_{WL} = [\,0 \quad 0 \quad ^L\omega_{WLz}]^T$. (attenzione: questo poichè assi z_W e z_L sono allineati!) Con param ZYZ di $SO(3)$ da $\{S_L\}$ a $\{S_B\}$ si ha:

$$^L\omega_{LB} = \,^LJ_{LB}(\psi,\theta,\varphi)\begin{bmatrix}\dot\psi\\ \dot\theta\\ \dot\varphi\end{bmatrix} =: \,^LJ_{LB}(\underline{\varphi})\,\underline{\dot\varphi}$$

La $^L\omega_{WL}$ di trascin. nel moto con la tavola rotante vale

$$^L\omega_{WL} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\dot\alpha$$

Dunque la $\;^L\omega_{WB} = \,^L\omega_{WL} + \,^L\omega_{LB} = \left[\,^LJ_{LB}(\psi,\theta,\varphi) \;\middle|\; \begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right]\begin{bmatrix}\dot\psi\\ \dot\theta\\ \dot\varphi\\ \dot\alpha\end{bmatrix} =: \,^LJ_{WB}\,\underline{\dot\theta}$

dove $\underline{\dot\theta} := \begin{bmatrix}\underline{\dot\varphi}\\ \dot\alpha\end{bmatrix}$

Attenzione: quando scriveremo la $T^{(rot)}$ della sfera dovremo usare "tutta" la velocità angolare, poichè l'energia cinetica di rotazione della sfera dipende <u>ANCHE</u> da quanto (veloc.) ruota la tavola rotante. (useremo perciò $^L\omega_{WB}$: la scelta di scriverla in $\{S_L\}$ è comoda <u>MA</u> non obbligatoria)

Invece, per scrivere i vincoli imposti dal "rolling constraint" fra tavola rotante e sfera è <u>COMODO</u> avere le $^L\omega_{LB}$, poichè tali componenti sono facilmente (per una sfera!) associabili alle componenti di velocità lineari del suo baricentro G (e del punto di contatto al suolo C) nel sistema $\{S_L\}$. Queste componenti in $\{S_L\}$

ossia ${}^L\underline{O_L C} = [x_L \quad y_L \quad 0]^T$ e ${}^L\underline{O_L G} = [x_L \quad y_L \quad \underset{\text{raggio sfera}}{r}]$

hanno x_L e y_L che rappresentano le componenti della traiettoria del punto di contatto della sfera sulla tavola rotante (in $\{S_L\}$).

É ovvio che se si scrivono i vincoli fra tali quantità relative alla tavola rotante, esse appaiono identiche a quelle viste nell'esercitaz svolta in aula.

<u>Scrittura delle equazioni di vincolo sulle velocità</u>

Legame fra compon. di vel. angolare in $\{S_L\}$ e veloc. di traslaz. del baricentro G in x_L e y_L.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} {}^L\omega_{LBx} \cdot r = [1 \quad 0 \quad 0]\, {}^L\omega_{LB}\, r = -\dot{y}_L \\ {}^L\omega_{LBy} \cdot r = [0 \quad 1 \quad 0]\, {}^L\omega_{LB}\, r = \dot{x}_L \end{array}\right\} \text{no sliding} \\ \text{Vincolo di non brillamento} \\ \left.{}^L\omega_{LBz} = [0 \quad 0 \quad 1]\, {}^L\omega_{LB} = 0 \right\} \text{no spin} \end{array}\right\} \text{pure rolling}$$

Si ricorda che da Eulero ZYZ

$${}^L\omega_{LB} = \begin{bmatrix} 0 & -s\psi & c\psi\, s\theta \\ 0 & c\psi & s\psi\, s\theta \\ 1 & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

allora le tre condizioni di vincolo si esplicitano nelle seguenti:

$$\begin{cases} r\,[0 \quad -s\psi \quad c\psi\, s\theta] \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \dot{y}_L = 0 \\ r\,[0 \quad c\psi \quad s\psi\, s\theta] \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} - \dot{x}_L = 0 \\ [1 \quad 0 \quad c\theta] \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

nota bene: i vincoli sono "interni" al sistema (tav. rot. - sfera) e non si curano del fatto che la tavola rotante ruoti o stia ferma.

Il fatto che la tav. rotante ruoti influenzerà l'energia cin della sfera, e quindi $\alpha(t)$ rientrerà ovviamente nelle espressioni che descrivono la vel. assoluta di G e la vel. angolare assoluta della sfera.

Prima di scrivere i vincoli in forma Pfaffiana occorre chiedersi cos'è in questo caso la configurazione $\underline{q}$. Cioè, oltre a $\alpha(t)$ che ci viene imposto dall'esterno, cosa occorre conoscere per sapere tutto riguardo alla config. della sfera? Beh, se conosco il pto di contatto fra sfera e tav. rotante (x_L, y_L), e conosco come è orientata la sfera rispetto alla tavola rotante (ψ, θ, φ), se qualcuno mi dice $\alpha(t)$ so tutto della sfera rispetto a $\{S_W\}$.

Dunque poichè $\alpha(t)$ è un ingresso esogeno, la config. è senz'altro $\underline{q} = [x_L \; y_L \; \psi \; \theta \; \varphi]^T$ da cui le eq.ni di vincolo risultano

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -r S\psi & r C\psi S\theta \\ -1 & 0 & 0 & r C\psi & r S\psi S\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & C\theta \end{bmatrix}}_{A(\underline{q})} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{y}_L \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{q}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{0}}$$

Il lagrangiano non vincolato per la sfera risulta

$$L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \dot{\alpha}) = T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \dot{\alpha}) - U(\underline{q})$$

$$T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \dot{\alpha}) = \frac{1}{2} m \|\underline{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} {}^L\omega_{WB}^T \, {}^L\mathcal{I}_G \, {}^L\omega_{WB}$$

da teo. König per $T^{(tot)}$ di corpo rigido in 3D.

n.b. ${}^L\mathcal{I}_G = {}^B\mathcal{I}_G = {}^W\mathcal{I}_G$ etc. poi una sfera omog. è inerzialmente isotropa con ${}^B\mathcal{I}_G = k \, \mathrm{eye}(3)$.

$$\underline{v}_G = \underline{v}_G^{(r)} + \underline{v}_G^{(tr)} = (\dot{x}_L \underline{i}_e + \dot{y}_L \underline{j}_e) + (\dot{\alpha} \underline{k}_e \times (x_L \underline{i}_e + y_L \underline{j}_e)) =$$

$$= \dot{x}_L \underline{i}_e + \dot{y}_L \underline{j}_e + \dot{\alpha} x_L \underline{j}_e - \dot{\alpha} y_L \underline{i}_e =$$

$$= (\dot{x}_L - \dot{\alpha} y_L) \underline{i}_e + (\dot{y}_L + \dot{\alpha} x_L) \underline{j}_e$$

Dunque usando le componenti in $\{S_L\}$

$${}^L\underline{v}_G = \begin{bmatrix} (\dot{x}_L - \dot{\alpha} y_L) \\ (\dot{y}_L + \dot{\alpha} x_L) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -y_L \\ 0 & 1 & x_L \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{y}_L \\ \hline \dot{\alpha} \end{bmatrix} =: [I_2 \mid J_{v\alpha}] \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

La ${}^{L}\omega_{WB}$ è stata già calcolata e vale

$$
{}^{L}\omega_{WB} = \left[\; {}^{L}J_{LB}(\psi,\theta,\varphi) \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right] \left[\begin{array}{c} \dot{\underline{\varphi}} \\ \hline \dot{\alpha} \end{array} \right] =: \left[J_{\omega\varphi} \mid J_{\omega\alpha} \right] \left[\begin{array}{c} \dot{\underline{\varphi}} \\ \dot{\alpha} \end{array} \right]
$$

Allora si ha:

∘) $U \equiv 0$ poiché su piano oriz. con $U = 0$ a quota $z_w = r$

∘) $T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \dot{\alpha})$ con $\underline{q} = [\underline{x} \;\; \underline{\varphi}]^T$

$$
T^{(tr)} = \frac{1}{2} m \, {}^{L}\underline{v}_G^T \, {}^{L}\underline{v}_G = \frac{1}{2} m \left[\dot{\underline{x}}^T \mid \dot{\alpha} \right] \left[\begin{array}{c} I_2 \\ \hline J_{v\alpha}^T \end{array} \right] \left[I_2 \mid J_{v\alpha} \right] \left[\begin{array}{c} \dot{\underline{x}} \\ \hline \dot{\alpha} \end{array} \right] =
$$

$$
= \frac{1}{2} m \left[\dot{\underline{x}}^T \mid \dot{\alpha} \right] \left[\begin{array}{c|c} I_2 & J_{v\alpha} \\ \hline J_{v\alpha}^T & J_{v\alpha}^T J_{v\alpha} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \dot{\underline{x}} \\ \hline \dot{\alpha} \end{array} \right]
$$

$$
T^{(rot)} = \frac{1}{2} k \left[\dot{\underline{\varphi}}^T \; \dot{\alpha} \right] \left[\begin{array}{c} J_{\omega\varphi}^T \\ J_{\omega\alpha}^T \end{array} \right] \left[J_{\omega\varphi} \;\; J_{\omega\alpha} \right] \left[\begin{array}{c} \dot{\underline{\varphi}} \\ \dot{\alpha} \end{array} \right] = \frac{1}{2} k \left[\dot{\underline{\varphi}}^T \mid \dot{\alpha} \right] \left[\begin{array}{c|c} J_{\omega\varphi}^T J_{\omega\varphi} & J_{\omega\varphi}^T J_{\omega\alpha} \\ \hline J_{\omega\alpha}^T J_{\omega\varphi} & J_{\omega\alpha}^T J_{\omega\alpha} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \dot{\underline{\varphi}} \\ \hline \dot{\alpha} \end{array} \right]
$$

Allora la forma finale della T risulta

$$
T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \dot{\alpha}) = \frac{1}{2} \left[\dot{\underline{x}}^T \; \dot{\underline{\varphi}}^T \mid \dot{\alpha} \right] \left[\begin{array}{cc|c} B_{xx} & B_{x\varphi} & B_{x\alpha} \\ B_{\varphi x} & B_{\varphi\varphi} & B_{\varphi\alpha} \\ \hline B_{\alpha x} & B_{\alpha\varphi} & B_{\alpha\alpha} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{\varphi}} \\ \hline \dot{\alpha} \end{array} \right]
$$

dove

$B_{xx} = m I_2$; $B_{x\varphi} = O$; $B_{x\alpha} = m J_{v\alpha}$;

$B_{\varphi x} = O^T$; $B_{\varphi\varphi} = k J_{\omega\varphi}^T J_{\omega\varphi}$; $B_{\varphi\alpha} = k J_{\omega\varphi}^T J_{\omega\alpha}$;

$B_{\alpha x} = m J_{v\alpha}^T$; $B_{\alpha\varphi} = k J_{\omega\alpha}^T J_{\omega\varphi}$; $B_{\alpha\alpha} = k J_{\omega\alpha}^T J_{\omega\alpha} = k$.

Le equazioni del moto risultano da

$$
\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \underline{q}} \right]^T + A^T \underline{\lambda} = \underline{\xi}_q \qquad (\underline{\xi}_q \equiv \underline{0})
$$

eq.ni del moto che ci dicono come evolve la config. della sfera sulla tavola rotante (vi rientra $\alpha(t)$ e sue derivate)

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \underbrace{\cancel{\frac{\partial T}{\partial \alpha}}}_{0} = \xi_\alpha
$$

con $\alpha(t)$ assegnato, questa è eq.ne algebrica di din. inversa che ci dice che coppia applicare alla tavola rotante per ottenere il moto specificato

$+$

$$
A(\underline{q}) \, \dot{\underline{q}} = \underline{0} \qquad \text{(eq.ni di vincolo)}
$$