Meccanica dei Robot – 19 Giugno 2013

1) La Figura 1 mostra un disco in moto 3D su di un piano orizzontale. Il disco, che può essere ritenuto di spessore trascurabile, è costituito di materiale omogeneo, ha raggio r, massa m e tensore d'inerzia baricentrico ${}^{l}\mathbb{I}_G = \mathrm{diag}(I_x, I_y, I_z)$, dove $I_x = I_z = (mr^2)/4$ ed $I_y = (mr^2)/2$ sono i momenti d'inerzia rispetto alla terna locale $\{L\}$ baricentrica e principale d'inerzia (da definire).

i) Impiegando una parametrizzazione di $SO(3)$ di $\{L\}$ consistente con gli angoli ψ, θ e φ mostrati in Figura 1 e con la definizione dei momenti principali d'inerzia, si determini la matrice di rotazione ${}^{s}\boldsymbol{R}_l$ fra il frame inerziale $\{S\}$ e quello locale $\{L\}$. **ii)** Si scriva poi l'espressione della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{sl}$, sia in componenti $\{S\}$ che $\{L\}$ in f.ne degli angoli e delle loro derivate. **iii)** Si determini poi una parametrizzazione della traslazione del disco. **iv)** Nell'ipotesi che il disco sia permanentemente in contatto con il piano nel punto C in cui *si può avere slittamento relativo*, si scrivano le equazioni di vincolo e se ne discuta l'integrabilità. **v)** Nell'ipotesi che il disco, ancora in contatto col piano, abbia in C stavolta *moto di rotolamento senza slittamento*, si scrivano le equazioni di vincolo e le si riportino in forma Pfaffiana.

♣ *Da questo punto in poi si consideri soltanto la condizione di rotolamento senza slittamento* ♣

vi) Si impostino le equazioni di Lagrange per la dinamica 3D del disco.

vii) Si scriva l'espressione dell'accelerazione $\boldsymbol{a}_G$ del baricentro del disco.

viii) Si scriva l'espressione dell'accelerazione angolare $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{sl}$ del disco.

ix) Si impostino le equazioni di Newton-Eulero per la dinamica 3D del disco.

x) Si indichi un metodo per il calcolo delle reazioni vincolari che il piano esercita sul disco in funzione del tempo.

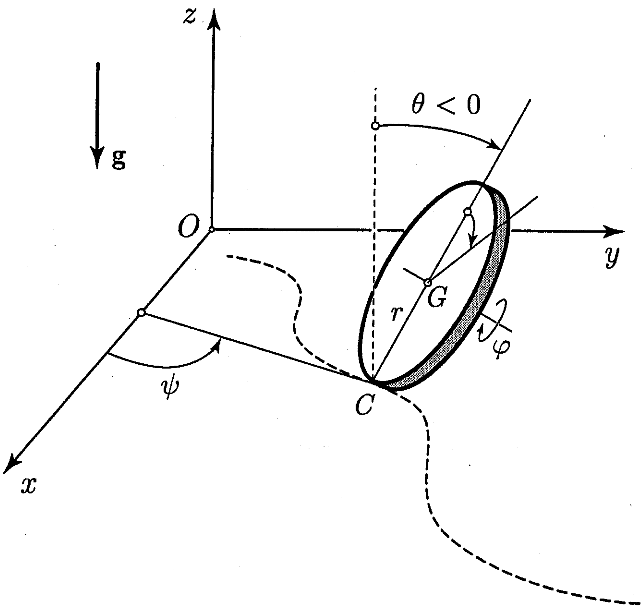
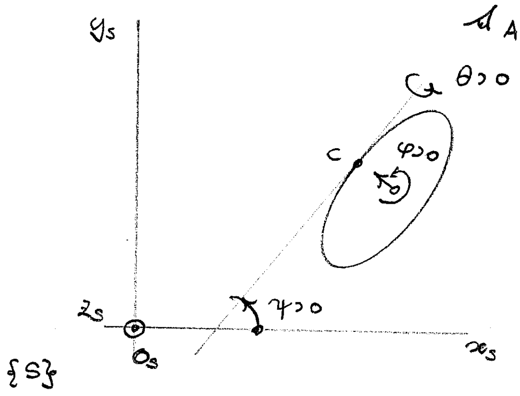


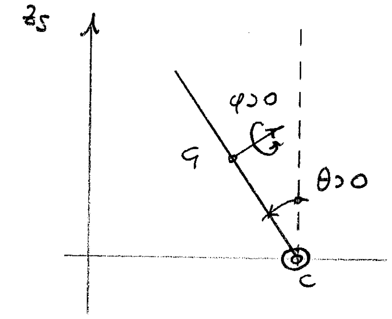
Figura 1: Disco in moto 3D su piano orizzontale.

Svolgimento Compito di Meccanica dei Robot

19 Giugno 2013

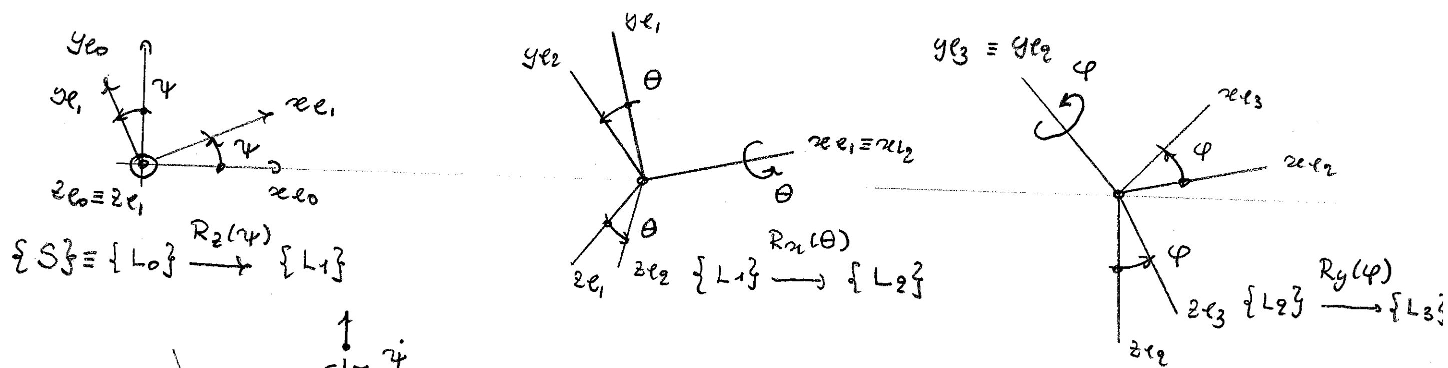


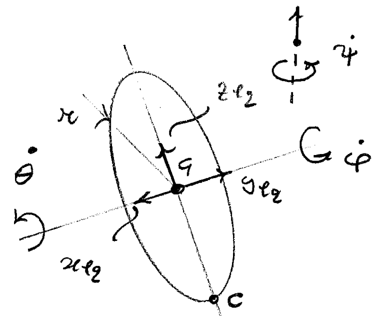
vista in pianta



vista da osservatore A

Introduzione parametrizzazione di SO(3) consistente con def.ni propr. inerziali del disco ed angoli introdotti. {S} frame inerziale (fisso) $\equiv$ $\{L_0\}$





{L2} non solidale al disco, che 'gli ruota sotto' attorno all'asse $y_{l_2} \equiv y_{l_3}$

Dunque se si parte dalla condizione in cui $\psi=\theta=\varphi=0$ con il disco 'immerso' nel piano $x_s z_s$, si effettua la sequenza: $R_z(\psi)$ (ψ imbardata) con cui si specifica direzione di marcia con disco ancora verticale, poi $R_x(\theta)$ (θ angolo di 'piega') con cui si tiene conto che il disco può inclinarsi come per adagiarsi sul piano, poi $R_y(\varphi)$ con cui si specifica angolo di rotazione φ attorno al suo asse di simmetria.

Dunque la sequenza scelta è una ZXY. Si noti che con tale scelta il frame solidale al disco {L3} ha assi x_{l_3} e z_{l_3} diametrali e y_{l_3} coincidente con asse del disco, il che risulta congruente con definizione che ${}^{l_3}\mathbb{I}_G = \mathrm{diag}(I_x, I_y, I_z)$ con $I_x = I_z = mr^2/4$ e $I_y = mr^2/2$. Definiamo $\{L_0\} \equiv \{S\}$ e $\{L_3\} \equiv \{L\}$

La matrice ${}^{S}R_{l} = {}^{S}R_{l}(\psi,\theta,\varphi) = \underbrace{{}^{l_0}R_{l_1}(\psi)}_{R_z(\psi)} \underbrace{{}^{l_1}R_{l_2}(\theta)}_{R_x(\theta)} \underbrace{{}^{l_2}R_{l_3}(\varphi)}_{R_y(\varphi)}$

risultando:

$$
{}^{S}R_{l}(\psi,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} c\varphi c\psi - s\theta s\varphi s\psi & -c\theta s\psi & c\psi s\theta + c\varphi s\theta s\psi \\ c\psi s\theta s\varphi + c\varphi s\psi & c\theta c\psi & -c\varphi c\psi s\theta + s\varphi s\psi \\ -c\theta s\varphi & s\theta & c\theta c\varphi \end{bmatrix}
$$

La velocità angolare del disco rispetto al piano è, in forma invariante, espressa da:

(1) $\underline{\omega}_{se} = \dot{\psi}\, \underline{k}_{e_0} + \dot{\theta}\, \underline{i}_{e_1} + \dot{\varphi}\, \underline{j}_{e_2}$ ovvero anche, data la sequenza delle rotazioni e quindi che $\underline{k}_{e_0} \equiv \underline{k}_{e_1}$, $\underline{i}_{e_1} \equiv \underline{i}_{e_2}$ e $\underline{j}_{e_2} \equiv \underline{j}_{e_3}$, a

(2) $\underline{\omega}_{se} = \dot{\psi}\, \underline{k}_{e_1} + \dot{\theta}\, \underline{i}_{e_2} + \dot{\varphi}\, \underline{j}_{e_3}$

Per le componenti ${}^{s}\omega_{se} = {}^{e_0}\omega_{se}$ posso scegliere la versione (1) ottenendo

$${}^{e_0}\omega_{se} = [\underline{\omega}_{se}]_{e_0} = \dot{\psi}\, \underbrace{{}^{e_0}k_{e_0}}_{\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}} + \dot{\theta}\, \underbrace{{}^{e_0}R_{e_1}\, {}^{e_1}i_{e_1}}_{R_z(\psi)\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}} + \dot{\varphi}\, \underbrace{{}^{e_0}R_{e_1}\, {}^{e_1}R_{e_2}\, {}^{e_2}j_{e_2}}_{R_z(\psi)R_x(\theta)\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}}$$

cosicché:

$${}^{s \equiv e_0}\omega_{se} = \begin{Bmatrix} 0 & \cos\psi & -\cos\theta\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\theta\cos\psi \\ 1 & 0 & \sin\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \triangleq {}^{s \equiv e_0}J_{se}(\psi, \theta)\, \underline{\dot{\varphi}}$$

con $\underline{\varphi} \triangleq [\psi \ \ \theta \ \ \varphi]^T$

Per le componenti ${}^{e}\omega_{se} = {}^{e_3}\omega_{se}$ posso scegliere la versione (2) ottenendo

$${}^{e_3}\omega_{se} = [\underline{\omega}_{se}]_{e_3} = \dot{\psi}\, \underbrace{{}^{e_3}R_{e_2}\, {}^{e_2}R_{e_1}\, {}^{e_1}k_{e_1}}_{R_y(-\varphi)R_x(-\theta)\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}} + \dot{\theta}\, \underbrace{{}^{e_3}R_{e_2}\, {}^{e_2}i_{e_2}}_{R_y(-\varphi)\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}} + \dot{\varphi}\, \underbrace{{}^{e_3}j_{e_3}}_{\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}}$$

cosicché:

$${}^{e \equiv e_3}\omega_{se} = \begin{Bmatrix} -\cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta & 0 & 1 \\ \cos\theta\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \triangleq {}^{e \equiv e_3}J_{se}(\theta, \varphi)\, \underline{\dot{\varphi}}$$

Quanto appena scritto risponde al punto ii)

Il centro di massa del disco G può essere parametrizzato definendo il vettore posizione $\underline{O_s O_e} = \underline{p}_G$ e prendendone le componenti in $\{S\}$, ossia $[\underline{p}_G]_s = {}^{s}p_G = [x \ \ y \ \ z]^T$ Dunque $\underline{p}_G = x\, \underline{i}_{e_0} + y\, \underline{j}_{e_0} + z\, \underline{k}_{e_0}$

Quanto appena scritto risponde alla domanda iii)

La condizione di vincolo sul solo contatto fra disco e piano in un punto del disco C risulta nella semplice richiesta che

(3) $\boxed{\underline{v}_C \cdot \underline{k}_{L_0} = 0}$ ossia che può succedere tutto purchè la $\underline{v}_C$ del punto di contatto appartenga al piano; in altre parole il disco nel punto di contatto col piano non può nè compenetrarlo nè staccarvisi.

Dato che C deve essere il punto di contatto geometrico fra disco e piano, indipendentemente dalla rotazione φ del disco, è comodo esprimerne la posizione da G in componenti da $\{L_2\}$, ossia $[\underline{GC}]_{e_2} = {}^{e_2}GC = [0 \quad 0 \quad -r]$

La velocità di $C \in \{L\}$ risulta da f.f. cinematica:

$$\underline{v}_C = \underline{v}_G + \underline{\omega}_{se} \times \underline{GC} \quad \rightsquigarrow \text{in compon. } \{S\} \equiv \{L_0\} \rightsquigarrow$$

$$ {}^{L_0}v_C = \underbrace{{}^{L_0}v_G}_{\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}} + \underbrace{{}^{L_0}\omega_{se}}_{\left[{}^{L_0}J_{se}(\psi,\theta)\,\underline{\dot{\varphi}}\right]^{\vee}} \times \underbrace{\left[{}^{L_0}R_{e_2}(\psi,\theta)\;{}^{e_2}GC\right]}_{R_z(\psi)\,R_x(\theta)\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{Bmatrix}} $$

Dunque si ha:

$$ {}^{L_0}v_C = \begin{Bmatrix} \dot{x} - r\left[\cos\psi(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta) + \dot{\theta}\cos\theta\sin\psi\right] \\ \dot{y} + r\left[\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi - \sin\psi(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta)\right] \\ \dot{z} + r\,\dot{\theta}\sin\theta \end{Bmatrix} $$

La condizione (3) risulta in ${}^{L_0}v_C^{T}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, ossia ${}^{L_0}v_C[[3]] = 0$

ovvero

$$\dot{z} + r\sin\theta\,\dot{\theta} = 0 \iff \boxed{\dot{z} = -r\sin\theta\,\dot{\theta}}$$

Questo vincolo in forma differenziale risulta banalmente la derivata temporale di $z = r\cos\theta$, infatti $\dot{z} = -r\sin\theta\,\dot{\theta}$, e prescrive che il baricentro del disco deve trovarsi ad una altezza dal piano (per starvi in contatto!) legata al raggio r ed alla inclinazione θ. (vedi vista da osservatore A, pag. 1)

Questo risponde al quesito al punto iv).

Se adesso il disco è vincolato a non strisciare nel contatto con il piano nel punto C, allora, oltre al vincolo precedente, si deve imporre anche che le componenti di $\underline{v}_C$ sul piano tangente (dunque lungo $\underline{i}_{e_0}$ e $\underline{j}_{e_0}$) siano nulle. Perciò

$$\underline{v}_C = \underline{0} \iff {}^{e_0}\underline{v}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ossia:

$$\begin{cases} \dot{x} - r\left[\cos\psi\,(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta) + \cos\theta\sin\psi\,\dot{\theta}\right] = 0 \\ \dot{y} + r\left[-\sin\psi\,(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta) + \cos\theta\cos\psi\,\dot{\theta}\right] = 0 \\ \dot{z} + r\dot{\theta}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Introducendo la config. $\underline{q} = [x \;\; y \;\; z \;\; \psi \;\; \theta \;\; \varphi]^T$, $\dot{\underline{q}} = [\dot{x} \;\; \dot{y} \;\; \dot{z} \;\; \dot{\psi} \;\; \dot{\theta} \;\; \dot{\varphi}]^T$ si ha:

$$\begin{cases} \dot{x} - r\cos\psi\,\dot{\varphi} - r\cos\psi\sin\theta\,\dot{\psi} - r\cos\theta\sin\psi\,\dot{\theta} = 0 \\ \dot{y} - r\sin\psi\,\dot{\varphi} - r\sin\psi\sin\theta\,\dot{\psi} + r\cos\theta\cos\psi\,\dot{\theta} = 0 \\ \dot{z} + r\sin\theta\,\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Dunque in forma Pfaffiana:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r\cos\psi\sin\theta & -r\cos\theta\sin\psi & -r\cos\psi \\ 0 & 1 & 0 & -r\sin\psi\sin\theta & r\cos\theta\cos\psi & -r\sin\psi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}}_{A(\underline{q})} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix}}_{\dot{\underline{q}}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\underline{0}}$$

Questo risponde al quesito punto v)

In ipotesi punto v) la dinamica Lagrangiana risulta da:

∘) $$T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \underbrace{\frac{1}{2} m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}_{T_{trasl}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,{}^{e}\underline{\omega}_{se}^{T}\;{}^{e}\underline{\underline{I}}_{G}\;{}^{e}\underline{\omega}_{se}}_{T_{rot}}$$

$${}^{e}\underline{\underline{I}}_G = {}^{e_3}\underline{\underline{I}}_G = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

Allora:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}[\dot\psi\ \dot\theta\ \dot\varphi]^T\ {}^{e}\mathcal{J}_{se}^T(\theta,\varphi)\ {}^{e}\mathbb{I}_G\ {}^{e}\mathcal{J}_{se}(\theta,\varphi)\begin{bmatrix}\dot\psi\\ \dot\theta\\ \dot\varphi\end{bmatrix}$$

con

$${}^{e}\mathcal{J}_{se}^T(\theta,\varphi)\ {}^{e}\mathbb{I}_G\ {}^{e}\mathcal{J}_{se}(\theta,\varphi) = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}[I_x+I_y+(I_x-I_y)\cos 2\theta] & 0 & I_y\sin\theta\\ 0 & I_x & 0\\ I_y\sin\theta & 0 & I_y\end{bmatrix},$$

Quindi la matrice $B(\underline{q})$ tale che $T(\underline{q},\underline{\dot q}) = \frac{1}{2}\underline{\dot q}^T B(\underline{q})\,\underline{\dot q}$ è data da:

$$B(\underline{q}) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} m & 0 & 0 & & & \\ 0 & m & 0 & & \emptyset_{3\times3} & \\ 0 & 0 & m & & & \\ \hline & & & \frac{1}{2}[I_x+I_y+(I_x-I_y)\cos2\theta] & 0 & I_y\sin\theta\\ & \emptyset_{3\times3} & & 0 & I_x & 0\\ & & & I_y\sin\theta & 0 & I_y\end{array}\right]$$

da cui con Christoffel calcolo matrice $C(\underline{q},\underline{\dot q})$ con procedure standard (vedi appunti)

∘) $U(\underline{q}) = mgz \rightsquigarrow$ da cui $\underline{G}(\underline{q}) = \left[\frac{\partial U}{\partial \underline{q}}\right]^T = \begin{bmatrix}0\\0\\mg\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

dato che sto usando $\underline{q}$ che sono diff dipendenti allora posso usare eq.ni dinamica vincolate ossia

$$\begin{cases} B(\underline{q})\underline{\ddot q} + C(\underline{q},\underline{\dot q})\underline{\dot q} + \underline{G}(\underline{q}) = A^T(\underline{q})\underline{\lambda} + \underline{\tau} \quad \} \text{ 6 eq.ni} \quad \underline{\lambda}\in\mathbb{R}^3;\ \underline{q}\in\mathbb{R}^6\\ A(\underline{q})\underline{\dot q} = \underline{0} \quad \} \text{ 3 eq.ni}\end{cases}$$

Nel nostro caso, dato che le forze vincolari nel contatto C scaturiscono da $A^T(\underline{q})\underline{\lambda}$ e la gravità è in $\underline{G}(\underline{q})$, non vi sono forze attive non conservative ulteriori, quindi $\underline{\tau} \equiv \underline{0}$.

Questo risponde al punto vi)

$${}^{lo}[\underline{a}_G] = {}^{lo}a_G = [\ddot x\ \ \ddot y\ \ \ddot z]^T$$ banalmente, questo è punto vii)

Accelerazione angolare del disco $\dot{\underline{\omega}}_{se}$ calcolo da (1)

$$\dot{\underline{\omega}}_{se} = \ddot{\psi}\,\underline{k}_{e_0} + \ddot{\theta}\,\underline{i}_{e_1} + \dot{\theta}\,\frac{d\,\underline{i}_{e_1}}{dt} + \ddot{\varphi}\,\underline{j}_{e_2} + \dot{\varphi}\,\frac{d\,\underline{j}_{e_2}}{dt}$$

da formule di Poisson:

$$\frac{d\,\underline{i}_{e_1}}{dt} = \underbrace{\underline{\omega}_{e_0 e_1}}_{\dot{\psi}\,\underline{k}_{e_0}} \times \underline{i}_{e_1} \quad ; \quad \frac{d\,\underline{j}_{e_2}}{dt} = \underbrace{\underline{\omega}_{e_0 e_2}}_{(\dot{\psi}\,\underline{k}_{e_0} + \dot{\theta}\,\underline{i}_{e_1})} \times \underline{j}_{e_2} \;;$$

Dunque ad esempio in $\{S\}$

$$[\dot{\underline{\omega}}_{se}]_{\substack{S\\ \equiv\\ e_0}} = \ddot{\psi}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \ddot{\theta}\begin{bmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\\ 0\end{bmatrix} + \ddot{\varphi}\begin{bmatrix}-\cos\theta\sin\psi\\ \cos\theta\cos\psi\\ \sin\theta\end{bmatrix} +$$

$$+\,\dot{\theta}\left(\dot{\psi}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\\ 0\end{bmatrix}\right) + \dot{\varphi}\left(\left[\dot{\psi}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \dot{\theta}\begin{bmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\\ 0\end{bmatrix}\right]\times\begin{bmatrix}-\cos\theta\sin\psi\\ \cos\theta\cos\psi\\ \sin\theta\end{bmatrix}\right)$$

etc...

questo risponde al punto viii)

Dato che il corpo è inerzialmente simmetrico rispetto all'asse $y_{e_2} \equiv y_{l_3}$, si possono usare le eq.ni di Newton-Eulero nella forma:

$$\begin{cases} {}^{l_2}\mathbb{I}_G\,{}^{l_2}\dot{\omega}_{se} + {}^{l_2}\hat{\omega}_{sl_2}\,{}^{l_2}\mathbb{I}_G\,\omega_{se} = {}^{l_2}M_G \\ m\,{}^{l_2}\dot{v}_G + {}^{l_2}\hat{\omega}_{sl_2}\,(m\,{}^{l_2}v_G) = {}^{l_2}F \end{cases} \qquad (*)$$

con ${}^{l_2}\dot{\omega}_{se}$ è derivata $\frac{d(\;)}{dt}$ di ${}^{l_2}\omega_{se}$, dunque derivata delle componenti in $\{L_2\}$

La regola è sempre quella della derivata totale come derivata relativa + derivata di trascinamento

$$\frac{d(\;)}{dt} = \frac{{}^{l_2}d(\;)}{dt} + {}^{l_2}\hat{\omega}_{sl_2}(\;)$$

|| questa parte risponde a ix) e x)

Inoltre, sfruttando il fatto che $\underline{v}_C = \underline{0}$ si possono eliminare $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ in f.ne degli angoli $\underline{\varphi}$ e loro derivate e dunque procedere con le sole variabili $\underline{\varphi}$. Dalle (*) abbiamo quindi 6 eq.ni diff nelle variabili $\underline{\varphi}$ e loro derivate e le componenti ${}^{l_2}F$ che sono 3.