Compito di Robotica I – 27 Gennaio 2010

1) Seguendo la via diretta e senza l'impiego delle matrici elementari di rotazione, si ricavi la matrice di rotazione generale associata alla rappresentazione asse/angolo.

2) Si enuncino e discutano accuratamente tutti passi della procedura di applicazione della convenzione di Denavit-Hartenberg alla parametrizzazione di una struttura cinematica seriale. La si applichi alla parametrizzazione del manipolatore *DLR Lightweight III* riportato in Fig. 1. Scelta una configurazione di riferimento, si calcolino in essa la postura dell'end-effector ${}^0A_e$ ed il Jacobiano ${}^0J_{O_e}$. Si discuta come può essere determinata la versione del Jacobiano ${}^eJ_{O_e}$ e cosa rappresenta. Come si modifica il Jacobiano se il link di base (0) viene montato su una piattaforma mobile che può traslare e ruotare liberamente sul piano del pavimento?

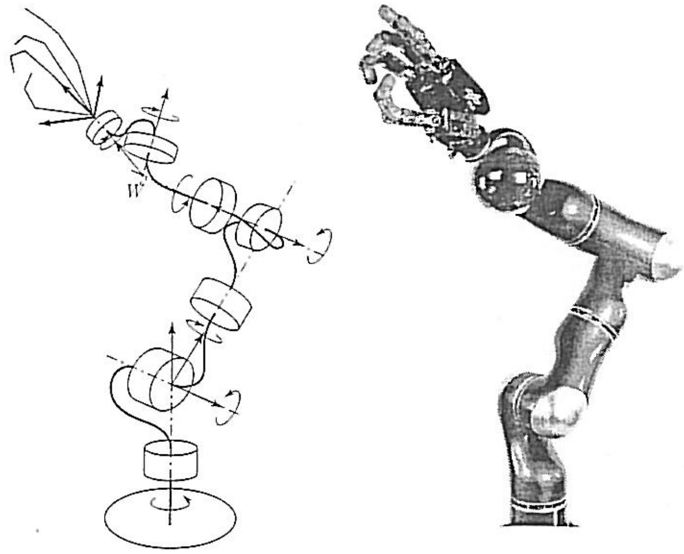


Figura 1: DLR Lightweight III e suo schema cinematico.

3) La Fig. 2 mostra un braccio seriale RRR che afferra un disco di raggio a con metodologia *whole-arm*, ossia sia ha contatto sui link prossimale e mediale oltre che su quello distale. La configurazione del robot è descritta da $q = [q_1 \;\; q_2 \;\; q_3]^T$, mentre le coppie ai giunti sono $\tau = [\tau_1 \;\; \tau_2 \;\; \tau_3]$. I vincoli in corrispondenza dei contatti sono tutti di tipo Point Contact With Friction (PCWF) e tutti i giunti sono sia attuati che sensorizzati. Nella configurazione di figura (e solo in essa!) si ricavino: l'opportuna matrice Jacobiana J da impiegarsi nell'analisi; la matrice di Grasp G; la matrice dei vincoli H; la forma Pfaffiana delle equazioni globali di vincolo. Si discutano, corredandole con soluzioni numeriche, le seguenti proprietà del sistema: ridondanza, difettività, esistenza di moti labili dell'oggetto, esistenza di forze interne, iperstaticità. (*Suggerimenti: (i) si noti che l'introduzione di contatti multipli su uno stesso braccio rende, di fatto, parallela la struttura del meccanismo e quindi analizzabile con le tecniche studiate; (ii) ci si limiti alla sola forma 2D delle equazioni*).

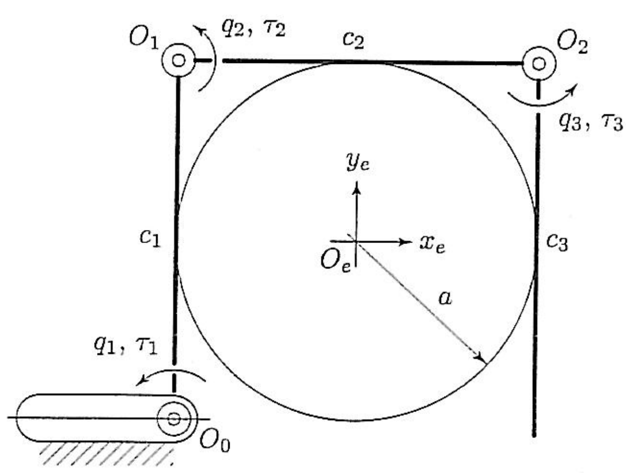
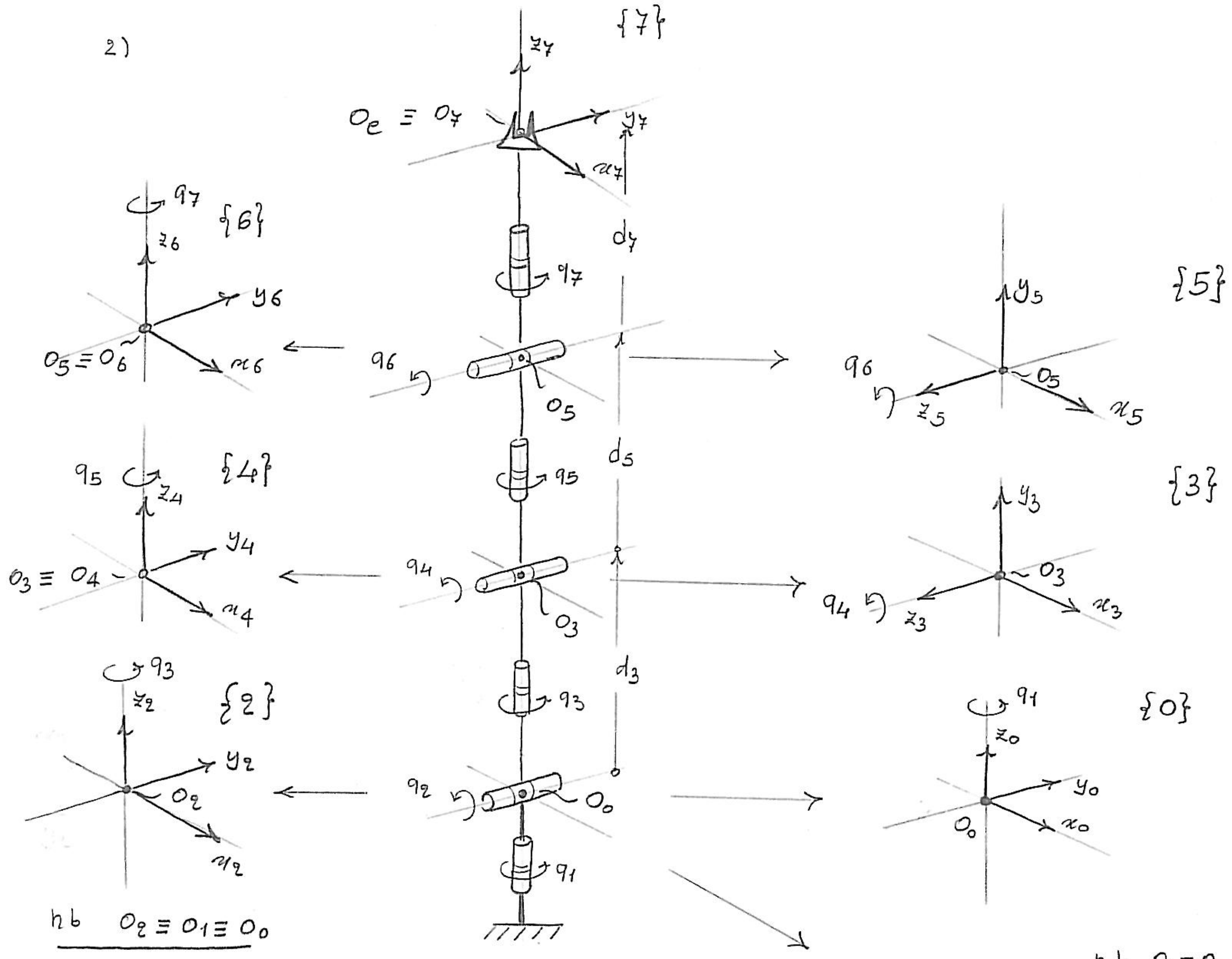


Figura 2: Afferraggio *whole-arm* di un disco con manipolatore RRR .

1) Soluzione diretta con esponenziale di matrici, slide 02.pdf, p.33

" " con costruzione geometrica, slide 02.pdf, p.36

2)



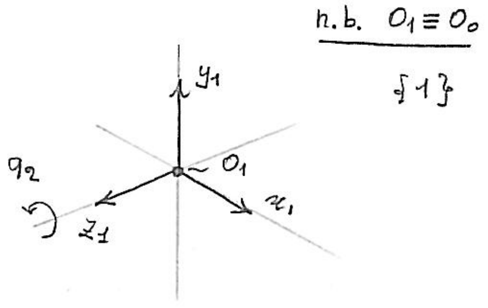


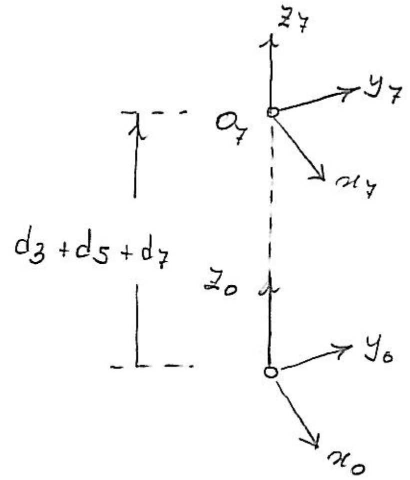
tabella DH per DLR Lightweight III

	link	a_i	α_i	d_i	q_i
$\{0\} \to \{1\}$	1	0	$\pi/2$	0	q_1^*
$\{1\} \to \{2\}$	2	0	$-\pi/2$	0	q_2^*
$\{2\} \to \{3\}$	3	0	$\pi/2$	d_3	q_3^*
$\{3\} \to \{4\}$	4	0	$-\pi/2$	0	q_4^*
$\{4\} \to \{5\}$	5	0	$\pi/2$	d_5	q_5^*
$\{5\} \to \{6\}$	6	0	$-\pi/2$	0	q_6^*
$\{6\} \to \{7\}$	7	0	0	d_7	q_7^*

$*$ = attuato

Applicando la forma generica della matrice omogenea di D.-H. a ciascuna riga della tabella si hanno le varie ${}^{i-1}A_i$ che assemblate forniscono ${}^{0}A_7(\underline{q}) = {}^{0}A_1(q_1) \dots {}^{6}A_7(q_7)$

Dato che si chiede la ${}^{0}A_7$ in una config. a piacere, si sceglie quella di rif in figura. Essendo $\{0\}$ e $\{7\}$ così:



si ha banalmente e <u>senza dover fare prodotti matriciali</u>

$$ {}^{0}A_7(\underline{0}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3+d_5+d_7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

Calcolo del Jacobiano ${}^{0}J_{O_e}$ $\quad (O_7 \equiv O_e)$

$$ {}^{0}J_{O_e} = \begin{bmatrix} \hat{z}_0(O_e - O_0) & \hat{z}_1(O_e - O_0) & \hat{z}_2(O_e - O_0) & \hat{z}_3(O_e - O_3) & \hat{z}_4(O_e - O_3) & \dots \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & \dots \end{bmatrix} $$

$$ \begin{bmatrix} \dots & \hat{z}_5(O_e - O_5) & \hat{z}_6(O_e - O_5) & \hat{z}_7(O_e - O_7) \\ & z_5 & z_6 & z_7 \end{bmatrix} $$

facendo gli opportuni calcoli al volo (guardando fig. pag 1)

$$ {}^{0}J_{O_e} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} & -\begin{pmatrix}d_3+d_5+d_7\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} & -\begin{pmatrix}d_5+d_7\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-d_7\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{bmatrix} $$

${}^{e}J_{O_e}$ è il Jacob. scritto in componenti $\{E\} \equiv \{7\}$ in questo caso con ancora polo $O_e \equiv O_7$ per la velocità lineare.

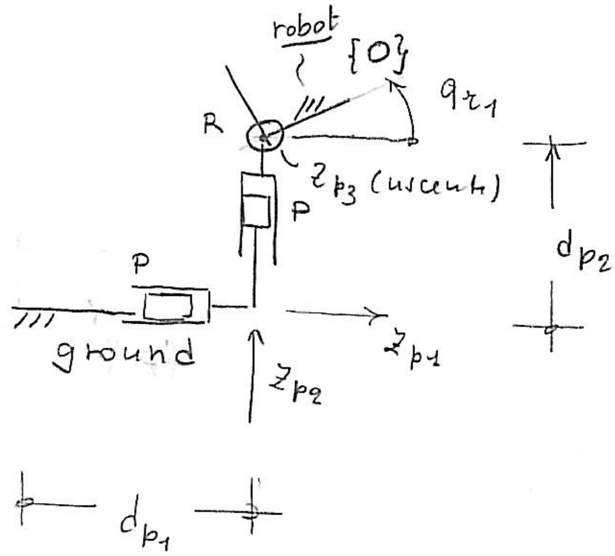
In base a slide 05.pdf si ha

$$ {}^{e}\mathcal{J}_{oe} = \begin{bmatrix} {}^{e}R_{o} & O_{3\times3} \\ O_{3\times3} & {}^{e}R_{o} \end{bmatrix} {}^{o}\mathcal{J}_{oe} $$

In questo caso, nella config. scelta, ${}^{e}R_{o} = {}^{7}R_{o} = I_{3\times3}$.

Quindi per $\underline{q} = \underline{0} \in \mathbb{R}^7$, ${}^{e}\mathcal{J}_{oe} \equiv {}^{o}\mathcal{J}_{oe}$.

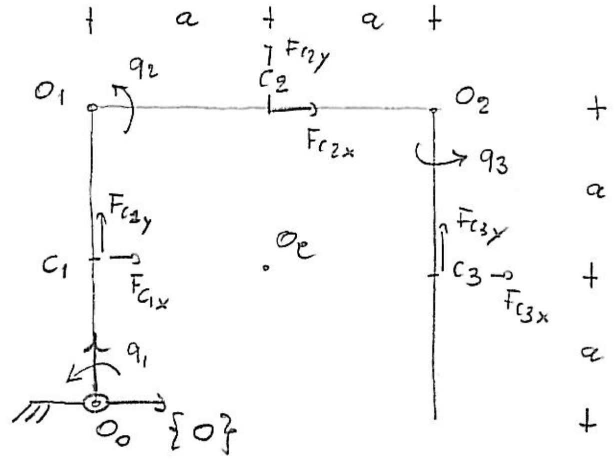
Se $\{O\}$ è in movimento su piattaforma si può pensare che vi sia a monte una catena cinematica virtuale che fornisce 3 gdl in più così:



posso con DH parametrizzare questa catena cin virtuale ed aggiungere a monte della mia vecchia tabella le 3 righe corrisp. ai 3 gdl. in più.

In tal modo il nuovo Jacobiano risentirà anche del moto della piattaforma. etc...

3) Parallelo whole-limb



Dato che mi interessano solo le componenti di forza nel contatto a causa del vincolo PCWF allora calcolo solo i Jacobiani di posizione per i punti di contatto. Inoltre rendo coerenti le dims dei Jacobiani aggiungendo # colonne opportuno (compon. sempre in {0})

$$v_{c1} = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \longrightarrow J_{c1} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{c2} = \begin{bmatrix} -2a \\ a \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} \dot{q}_2 \longrightarrow J_{c2} = \begin{bmatrix} -2a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{c3} = \begin{bmatrix} -a \\ 2a \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_3 \longrightarrow J_{c3} = \begin{bmatrix} -a & a & a \\ 2a & 2a & 0 \end{bmatrix}$$

Dunque se agisce forza F_{c1} di compon. F_{c1x} ed F_{c1y} la coppia causate sui giunti vale

$$\tau^{(1)} = \begin{bmatrix} \tau_1^{(1)} \\ \tau_2^{(1)} \\ \tau_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{c1x} \\ F_{c1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{c1x}\, a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si noti l'effetto di filtro delle 2ª e 3ª colonne di J_{c1}

ancora es. effetto di F_{c2}

$$\tau^{(2)} = \begin{bmatrix} \tau_1^{(2)} \\ \tau_2^{(2)} \\ \tau_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a & a \\ 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{c2x} \\ F_{c2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{c2x}\, 2a + F_{c2y}\, a \\ F_{c2y}\, a \\ 0 \end{bmatrix}$$

Allora quando le F_{c_i} $(i=1,2,3)$ agiscono di concerto l'effetto che hanno è pari alla somma degli effetti che ciascuna ha avuto singolarmente dunque

$$\tau = \tau^{(1)} + \tau^{(2)} + \tau^{(3)} = J_{c_1}^T F_{c_1} + J_{c_2}^T F_{c_2} + J_{c_3}^T F_3$$

da cui

$$\tau = \begin{bmatrix} J_{c_1}^T & J_{c_2}^T & J_{c_3}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{c_1} \\ F_{c_2} \\ F_{c_3} \end{bmatrix} =: J_c^T \underbrace{F}_{\text{wrench esercitabile in tutti i punti}}$$

allora

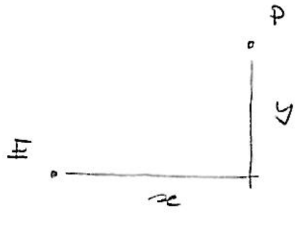
$$J_c^T = \begin{bmatrix} -a & 0 & -2a & a & -a & 2a \\ 0 & 0 & 0 & a & a & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

n.b. che J_c ha l'effetto di mappare le $\dot{q}$ in tutte le direzioni di velocità nei vari C_i in cui può essere esercitata forza

$$\begin{bmatrix} v_{c_1} \\ v_{c_2} \\ v_{c_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{c_1} \\ J_{c_2} \\ J_{c_3} \end{bmatrix} \dot{q}$$

Per quanto riguarda la matrice di Grasp ci si ricorda che nel 2D

$$\underline{w}_E = \begin{bmatrix} F_{Ex} \\ F_{Ey} \\ m_{Ez} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{I_{2\times 2}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline -y & x & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} F_{Px} \\ F_{Py} \\ m_{Pz} \end{bmatrix}$$



essendo i contatti tutti PCWF $H_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$H_i^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Allora la generica $G_{c_i} := G_i H_i^T = \begin{bmatrix} I_{2\times 2} & \underline{0} \\ -y \quad x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2\times 2} \\ \underline{0}^T \end{bmatrix}$

ovvero (la G_i che tiene conto già del tipo di contatto)

$$G_{c_i} = \begin{bmatrix} I_{2\times 2} + \underline{0}\,\underline{0}^T \\ -y \qquad x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -y & x \end{bmatrix}$$

allora

$$G_c \triangleq [\, G_{c_1} \quad G_{c_2} \quad G_{c_3} \,]$$

$$G_{c_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \qquad G_{c_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -a & 0 \end{bmatrix} \qquad G_{c_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

ossia

$$G_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & -a & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

forma Pfaffiana

$$\begin{bmatrix} J_{c_1} & \vdots & -G_{c_1}^T \\ J_{c_2} & \vdots & -G_{c_2}^T \\ J_{c_3} & \vdots & -G_{c_3}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ --- \\ \nu_e \end{bmatrix} = \underline{0} \qquad \begin{bmatrix} \tau \\ --- \\ w_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_c^T \\ -G_c \end{bmatrix} F_c$$

Analisi delle proprietà

1) <u>Ridondanza</u> : $\mathrm{rank}(J_c) = 3$ dunque

$\dim(R(J_c)) = \dim(R(J_c^T)) = 3$

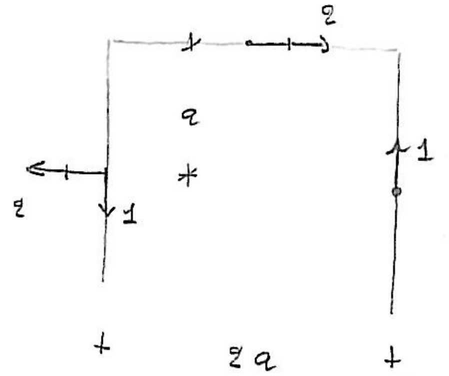
da cui $\dim(N(J_c)) = 0$ NO MOTI RIDON.

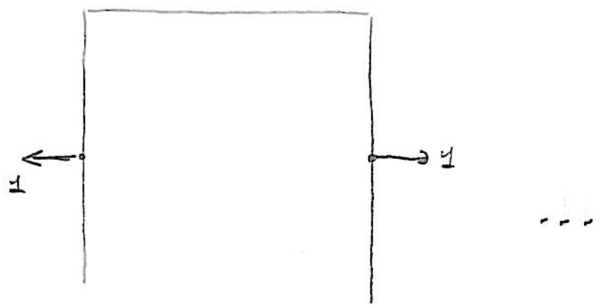
2) <u>Esistenza forze interne</u> : $\in N(G_c)$; $\dim N(G_c) = 3$

Base del $N(G_c)$ è dato da:

$$\text{span}\left(\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$$

ossia es. per la prima, seconda etc...





forze interne nel grasp dell'oggetto

3) Difettività: è difettivo poiché no. righe di J_c è maggiore rank (J_c)

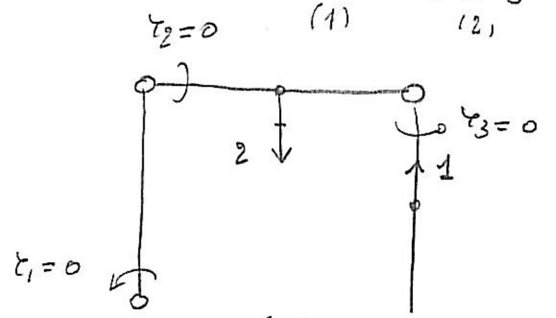
dunque esistono forze strutturali.

Queste stanno nel $N(J_c^T)$

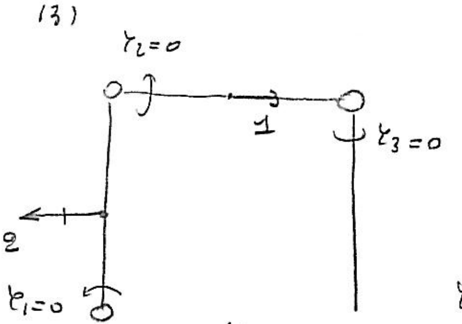
Base del $N(J_c^T)$ è dato da:

$$\text{span}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right)$$

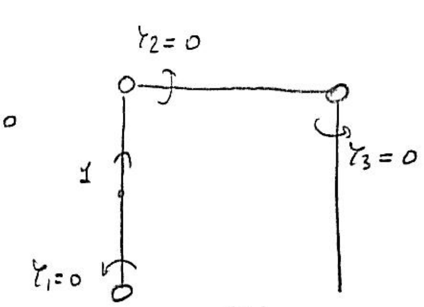
(1) (2) (3)



(1)



(2)



(3)

Nessuna di queste richiede coppia ai giunti per essere equilibrate

4) <u>Iperstaticità</u>: si ha se $N(A^T) \neq 0$ ossia se

$N(G_c) \cap N(J_c^T) \neq 0$ ovvero esistono

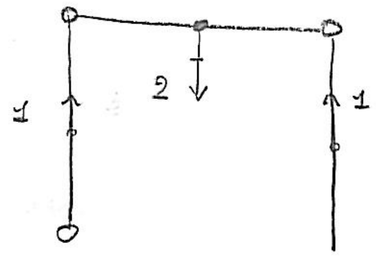
forze strutturali interne

$$A^T = \begin{bmatrix} J_c^T \\ G_c \end{bmatrix}$$

base del $N(A^T)$ è data da:

$$\text{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

e rappresentano forze interne all'oggetto che non possono essere controllate dai giunti.



5) Labilità oggetto: essendo G_c rango pieno righe $\dim(N(G_c^T)) = 0$, dunque no moti labili oggetto.