Cinematica diretta / inversa.

Con Denavit-Hartenberg definiamo

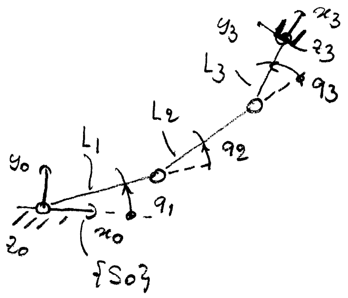
$$T_{0,n}(\underline{q}) = T_{0,n}(q_1, q_2, \dots, q_n) = T_{0,1}(q_1)\,T_{1,2}(q_2)\cdots T_{n-1,n}(q_n)$$

con $q_i = \begin{cases} \theta_i, & \text{giunto R} \\ d_i, & \text{giunto P} \end{cases}$ in modo indistinto.

Se vogliamo aggiustare terna su E-E possiamo introdurre una $T_{n,e}$ (costante), mentre volendo cambiare postura in blocco (globalmente) ad un robot possiamo introdurre una $T_{b,0}$ (costante) tali che:

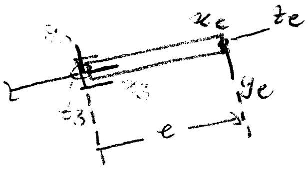
nuova matrice omogenea per descrivere robot risulta $\rightarrow$ $T_{b,e}(\underline{q}) = \underbrace{T_{b,0}}_{\text{globale}}\, T_{0,n}(\underline{q})\, \underbrace{T_{n,e}}_{\text{locale rispetto a link } n}$

es.

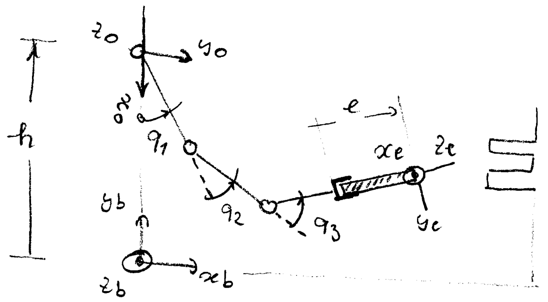


ho una $T_{0,3}(q_1, q_2, q_3)$

eventualmente



Se voglio descrivere una catena cinematica così:



allora $T_{b,0} = \begin{bmatrix} R_z(-\pi/2) & \begin{matrix} 0 \\ h \\ 0 \end{matrix} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$

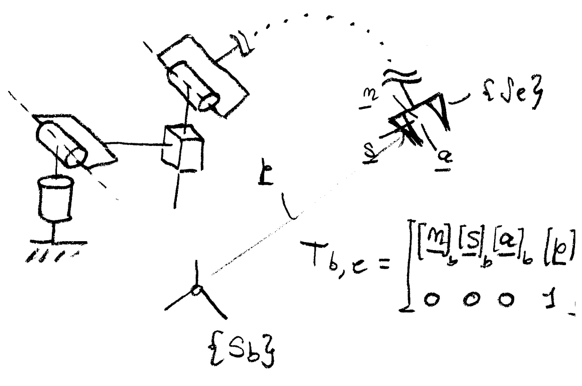
$T_{3,e} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} e \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$

Quindi $T_{b,e}(q_1, q_2, q_3) = T_{b,0}\, T_{0,3}(\underline{q})\, T_{3,e}$.

||| Allora pb. cinematico diretto è di fatto det. una fne $\underline{\Lambda}(\underline{q})$ per passare dalle variabili di giunto $\underline{q} \in \mathbb{R}^n$ (n. g.d.l. o dof del manip.) a posizione/orientaz. dell'E.-E., ossia $T_{b,e}(\underline{q})$. Se si parametrizza la $T_{b,e}$ ossia si usano param. quali traslazione origine terne {S_e} rispetto a {S_b} si scrive che

$\underline{\Lambda} : Q \rightarrow SE(3)$

$\underline{q} \mapsto \underline{\Lambda}(\underline{q}) = \underbrace{\underline{x}}_{\text{parametrizzazione}} \in SE(3)$ con $\underline{q} \in Q$



$T_{b,e} = \begin{bmatrix} [\underline{n}]_b & [\underline{s}]_b & [\underline{a}]_b & [\underline{p}] \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

||| Problema cinem. inverso sarà descrivibile come

$\underline{\Lambda}^{-1} : SE(3) \rightarrow Q$

$\underline{x} \mapsto \underline{\Lambda}^{-1}(\underline{x}) = \underline{q} \in Q$

Il problema cin diretto per una catena cin. seriale si riduce al calcolo della $T_{b,e}(\underline{q})$. o $T_{0,m}(\underline{q})$ se $T_{b,0} = T_{m,e} = I_{4\times4}$.

Pb. cin. inverso in generale dice: data una $H \in \mathbb{R}^{4\times4}$ omogenea tale che $H \in SE(3)$

$$H = \begin{bmatrix} R & d \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

trovare (se esiste/esistono) le soluzioni di questo set di equazioni non lineari nelle $\underline{q}$

$$T_{0,m}(q_1, q_2, \dots, q_m) = \underbrace{H}_{\text{assegnata}}$$

allora

$$\begin{cases} R_{0,m}(\underline{q}) = R \quad \text{sono 9 equazioni} \\ d_{0,m}(\underline{q}) = d \end{cases}$$

sono in generale 12 eq.ni <u>non lineari</u> nelle $\underline{q} \in \mathbb{R}^m$

Soluzioni possono essere: una unica, nessuna, no. finito, no. infinito.

<u>Approccio</u> <u>numerico</u> (se uno non ha altre risorse) <u>è scrivere</u>

$$\underline{F}(\underline{q}) = \underline{0} \in \mathbb{R}^6$$

consideriamo un caso semplice in cui $\underline{q} \in \mathbb{R}^6$ (es. manip. di Stanford) allora numericamente uno parte da un "initial guess" $\underline{q_0}$ e dice

$$\underline{F}(\underline{q_0} + \Delta\underline{q}) \simeq \underline{F}(\underline{q_0}) + \left.\frac{\partial \underline{F}(\underline{q})}{\partial \underline{q}}\right|_{\underline{q_0}} \Delta\underline{q} \qquad \text{con} \quad \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{q}} =: \underline{F}_{,\underline{q}} \in \mathbb{R}^{6\times6}$$

e cerca dove questa approx si annulla cioè

$$\underline{F}(\underline{q_0}) + \underline{F}_{,\underline{q}}(\underline{q_0})\Delta\underline{q} = \underline{0} \longrightarrow \Delta\underline{q} = -\left[\underline{F}_{,\underline{q}}(\underline{q_0})\right]^{-1} \underline{F}(\underline{q_0})$$

questo $\Delta\underline{q}$ è tale che posso scrivere $\underline{q_1} = \underline{q_0} + \Delta\underline{q}$

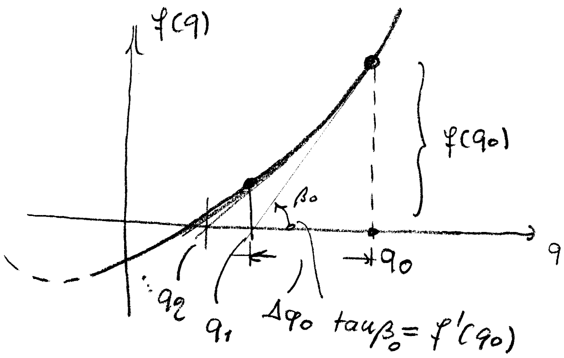
Dato che ho annullato l'approx. lineare, $\underline{F}(\underline{q_1}) \neq \underline{0}$ ed allora ripeto la procedura per cui al passo generico k, partendo da $\underline{q_k}$

$$\Delta\underline{q_k} = -\left[\underline{F}_{,\underline{q}}(\underline{q_k})\right]^{-1} \underline{F}(\underline{q_k})$$

$$\underline{q_{k+1}} = \underline{q_k} + \Delta\underline{q_k}$$

con $k = 0, 1, \dots, \infty$ fino a convergenza

in 1D, $\underline{q} = q \in \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



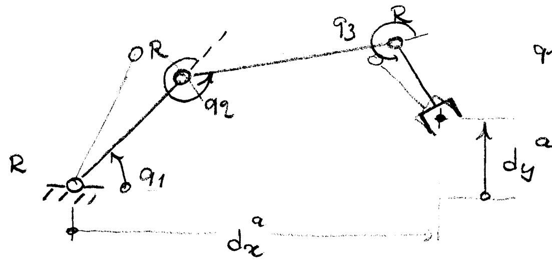
$$f(q + \Delta q) \simeq f(q_0) + f'(q_0)\Delta q_0 = 0$$

$$\hookrightarrow \Delta q_0 = -\frac{f(q_0)}{f'(q_0)}$$

metodo di <u>Newton</u> - <u>Raphson</u>.

Nota bene che c'è influenza della scelta dell'initial guess sulla soluzione trovata.
Inoltre potrebbero esistere soluzioni multiple in numero finito o infinito.

es. RRR con solo vincolo di posizione su EE



quadrilatero articolato

$$\begin{cases} d_x(q_1,q_2,q_3) = d_x^a \\ d_y(q_1,q_2,q_3) = d_y^a \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} d_x(q_1,q_2,q_3) - d_x^a =: F_1(q_1,q_2,q_3) = 0 \\ d_y(q_1,q_2,q_3) - d_y^a =: F_2(q_1,q_2,q_3) = 0 \end{cases}$$

ossia diventa una

$\underline{F}(\underline{q}) = \underline{0}$ con $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$\underline{q} \in \mathbb{R}^3$

allora uno si chiede ad esempio, data una soluzione, come trovare (se esistono) altre soluzioni vicine. Qui interviene teorema di Dini. Cosa dice, come si applica?

Consideriamo $\underline{F}(q_1,q_2,q_3) = \underline{0}$ alla fine vorremo pilotare le soluzioni, cioè il movimento dell'RRR a posizione di EE fermo muovendo q_1.

allora chiamiamo

$\mathbb{R}^1 \ni \overset{x_1}{\overset{\shortparallel}{x}} = q_1$; $\underline{y} = (q_2, q_3) = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$F: \mathbb{R}^{1+2} \to \mathbb{R}^2$ derivabile con continuità ed $\mathbb{R}^{1+2}$ ha coords. (x_1, y_1, y_2)

e sia $x \in \mathbb{R}^1$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^2$ e $(x^0, \underline{y}^0)$: $\underline{F}(x^0, \underline{y}^0) = \underline{0}$

Allora se $\underline{F}_{,\underline{y}}(x^0, \underline{y}^0) = \left.\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}}\right|_{(x^0, \underline{y}^0)} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ è invertibile

esiste aperto $U \subset \mathbb{R}$ contenente x^0 ed aperto $V \subset \mathbb{R}^2$ conten. $\underline{y}^0$ ed una $\underline{g}: U \to V$ tale che

$$\{(x, \underline{g}(x))\} = \{(x,\underline{y}) : \underline{F}(x,\underline{y}) = \underline{0}\} \cap (U \times V)$$

ossia che la f. ne implicita def dip funz $\underline{y} = \underline{g}(x)$ in $U \times V$

Poi essendo

$\underline{F}(x, \underline{y}(x)) = \underline{0}$ allora derivando $\frac{D}{Dx}$ si ha:

$$\frac{D\underline{F}}{Dx} = \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}} \frac{d\underline{y}}{dx} = \underline{0} \rightarrow \frac{d\underline{y}}{dx} = -\left[\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}}\right]^{-1} \frac{\partial \underline{F}}{\partial x}$$

$\frac{d\underline{y}}{dx} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$
$\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
$\frac{\partial \underline{F}}{\partial x} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$

Esempio:

$$a_1\begin{bmatrix} cq_1\\ sq_1\end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} c(q_1+q_2)\\ s(q_1+q_2)\end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} c(q_1+q_2+q_3)\\ s(q_1+q_2+q_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x\\ d_y\end{bmatrix}$$

$$\underline{F}(\underset{x}{q_1}, \underbrace{\overset{y_1}{q_2}, \overset{y_2}{q_3}}_{\underline{y}}) = \begin{bmatrix} a_1 cq_1 + a_2\, c(q_1+q_2) + a_3\, c(q_1+q_2+q_3) - d_x\\ a_1 sq_1 + a_2\, s(q_1+q_2) + a_3\, s(q_1+q_2+q_3) - d_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\underline{F}(x, y_1, y_2) = \begin{bmatrix} a_1\cos x + a_2\cos(x+y_1) + a_3\cos(x+y_1+y_2) - d_x\\ a_1\sin x + a_2\sin(x+y_1) + a_3\sin(x+y_1+y_2) - d_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\end{bmatrix}$$

allora:

$$\frac{\partial \underline{F}}{\partial x} = \begin{bmatrix} -a_1\sin x - a_2\sin(x+y_1) - a_3\sin(x+y_1+y_2)\\ a_1\cos x + a_2\cos(x+y_1) + a_3\cos(x+y_1+y_2)\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\\ \hline \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\end{array}\right]$$

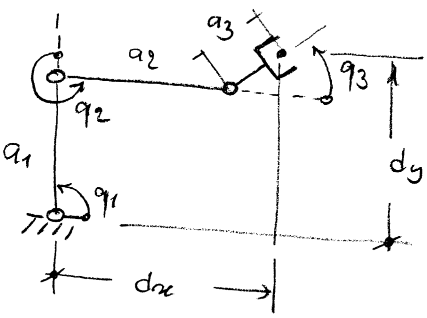
$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} = -a_2\sin(x+y_1) - a_3\sin(x+y_1+y_2)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_2} = -a_3\sin(x+y_1+y_2)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1} = a_2\cos(x+y_1) + a_3\cos(x+y_1+y_2)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2} = a_3\cos(x+y_1+y_2)$$

Allora



$$\left.\begin{aligned} d_x &= a_2 + a_3\cos(\pi/4)\\ d_y &= a_1 + a_3\sin(\pi/4)\end{aligned}\right\}\ \underline{\text{costanti}}$$

$$x^\circ = q_1^\circ = \pi/2$$

$$\underline{y}^\circ = \begin{bmatrix} y_1^\circ\\ y_2^\circ\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2^\circ\\ q_3^\circ\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi/2\\ \pi/4\end{bmatrix}$$

allora

$$\begin{cases} d_x = a_2 + a_3\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ d_y = a_1 + a_3\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

è chiaro che $\underline{F}\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \underline{0}$. Inoltre $\left.\dfrac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}}\right|_{\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)} = \begin{bmatrix} -a_3/\sqrt{2} & -a_3/\sqrt{2}\\ a_2 + \dfrac{a_3}{\sqrt{2}} & \dfrac{a_3}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}}\Big|_{(\pi/2,\,-\pi/2,\,\pi/4)}\right) = \frac{a_2 a_3}{\sqrt{2}} \neq 0 \qquad \text{con } a_2, a_3 > 0.$$

Quindi localmente (intorno a $(\pi/2, -\pi/2, \pi/4)$) si ha una dip. funzionale di $\underline{y}$ da x ovvia si ha $\underline{y} = \underline{y}(x)$, ovvia $q_2(q_1)$ e $q_3(q_1)$.

Inoltre
$$\frac{d\underline{y}}{dx} = -\left[\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}}\right]^{-1} \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a_2 + a_1 \csc(y_2)\sin(y_1+y_2)}{a_2} \\ a_1 \csc(y_2)\left(\dfrac{\sin y_1}{a_3} + \dfrac{\sin(y_1+y_2)}{a_2}\right) \end{bmatrix}$$

e localmente

$$\frac{d\underline{y}}{dx}\Big|_{(\pi/2,-\pi/2,\pi/4)} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a_2 - a_1}{a_2} \\ -\sqrt{2}\, a_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\, a_2} + \dfrac{1}{a_3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2'(q_1) \\ q_3'(q_1) \end{bmatrix}_{(\pi/2,-\pi/2,\pi/4)}$$

|| Nota bene che questo teorema ci dice che le $q_2(q_1)$ e $q_3(q_1)$ esistono ma non ci dice come trovarle!

Numericamente posso trovare $q_2(q_1)$ e $q_3(q_1)$ con Newton-Raphson.
es. partendo da $x^0 = \pi/2$, cambio x (var. indip.) e voglio che valga $\bar{x} = 110° \simeq 1.91$
Allora bloccato $\bar{x}$ itero così

$$\underline{y}^0 = \begin{bmatrix} -\pi/2 \\ \pi/4 \end{bmatrix} \qquad \Delta \underline{y}_k = -\left[\underline{F}_{,\underline{y}}(\bar{x}, \underline{y}_k)\right]^{-1} \underline{F}(\bar{x}, \underline{y}_k)$$

$$\underline{y}_{k+1} = \underline{y}_k + \Delta \underline{y}_k \qquad , k = 0, 1, \dots, \dots \text{ fino a convergenza}$$

es. di iterazione

partendo da $\underline{y}^0 = \begin{bmatrix} -\pi/2 \\ \pi/4 \end{bmatrix}$ che è soluzione di $\underline{F}(x^0, \underline{y}^0) = \underline{0}$ con $x = x^0$, cerco quale $\bar{\underline{y}}$ è associato a $\bar{x}$ e trovo:

$$\underline{y}^0 = \begin{bmatrix} -1.5708 \\ 0.7853 \end{bmatrix}; \quad \underline{y}^1 = \underline{y}^0 + \Delta\underline{y}^0 = \begin{bmatrix} -1.57402 \\ 0.449354 \end{bmatrix}; \quad \underline{y}^2 = \underline{y}^1 + \Delta\underline{y}^1 = \begin{bmatrix} -1.54184 \\ 0.314061 \end{bmatrix};$$

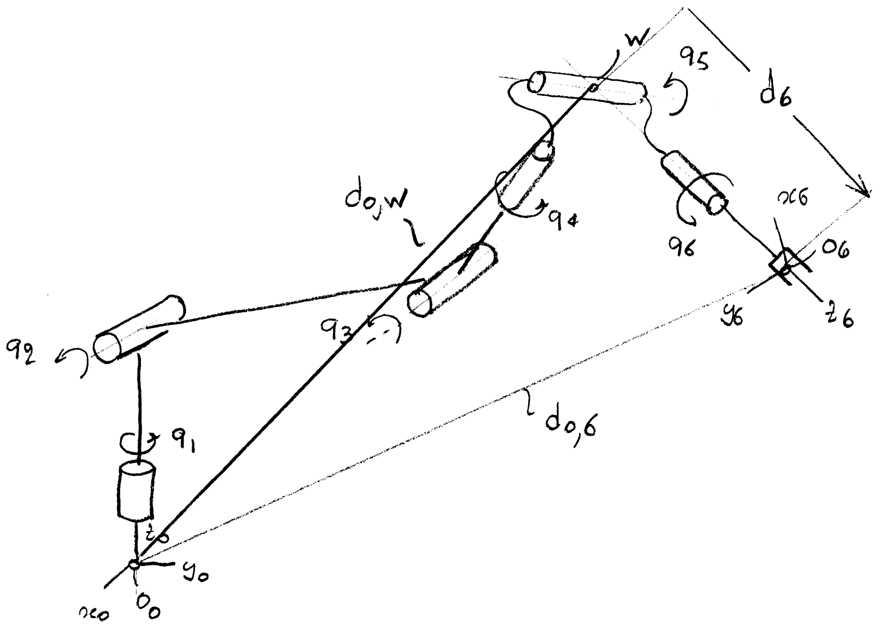
$$\underline{y}^3 = \begin{bmatrix} -1.53563 \\ 0.285526 \end{bmatrix}; \quad \underline{y}^4 = \begin{bmatrix} -1.53568 \\ 0.284194 \end{bmatrix}; \quad \underline{y}^5 = \begin{bmatrix} -1.53567 \\ 0.284120 \end{bmatrix}$$

con $\underline{F}(\bar{x}, \underline{y}^0) = \begin{bmatrix} -0.0632005 \\ 0.059875 \end{bmatrix}; \quad \underline{F}(\bar{x}, \underline{y}^1) = \begin{bmatrix} -0.0107429 \\ -0.00950795 \end{bmatrix}$

$$\dots\ \underline{F}(\bar{x}, \underline{y}^5) = \begin{bmatrix} -1.10068 \cdot 10^{-12} \\ -3.56043 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix}$$

Questo per ciò che concerne soluzioni numeriche del problema cinematico inverso. Per particolari situazioni si riesce a determinare una soluzione analitica ovvero in forma chiusa (closed form)

Caso particolare è quando si ha un robot a 6 g.d.l. con polso sferico
esempio un robot antropomorfo con polso sferico



In generale si deve imporre che, data postura della terna EE

$H = \left[\begin{array}{c|c} R & d \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right]$, ossia R e d desiderate, sia

$$\begin{cases} R_{0,6}(q_1,\dots,q_6) = R \\ d_{0,6}(q_1,\dots,q_6) = d \end{cases} \qquad R = [\underset{x_6}{n} \ \ \underset{y_6}{s} \ \ \underset{z_6}{a}]$$

1) Si calcola posizione del centro del polso che deriva da aver specificato la terna EE
questa sarà $p_w = d - a d_6$;

2) Dato che gli angoli del polso q_4, q_5 e q_6 non influenzano la posizione del centro del polso p_w, allora p_w lo devo ottenere mediante la struttura portante perciò risolvo $p_w = d_{0,3}(q_1, q_2, q_3)$ e determino $\bar{q}_1, \bar{q}_2$ e $\bar{q}_3$

3) Questa soluzione causa anche una orientazione associata che è
$R_{0,3}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3)$.

4) Dato che alla fine devo avere $R_{0,6}(q_1,\dots,q_6) = R$ ma

$\underbrace{R_{0,3}(\bar{q}_1,\bar{q}_2,\bar{q}_3)}_{\substack{d \\ \text{è già bloccata}}} R_{3,6}(q_4, q_5, q_6) = R \longrightarrow$ determino rotazione residua da far eseguire al polso

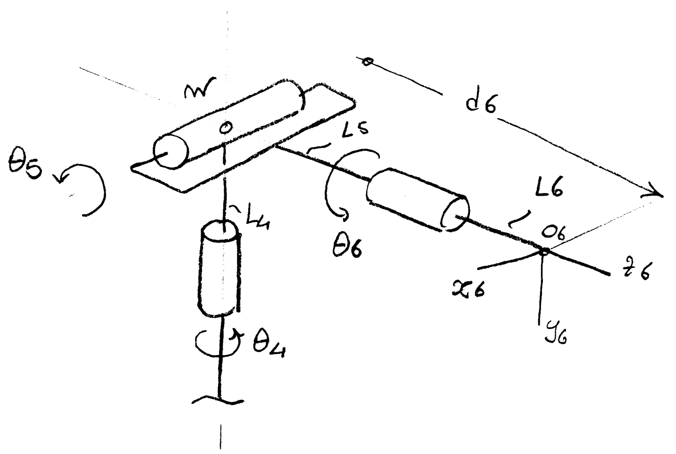
$$R_{3,6}(q_4, q_5, q_6) = R^T_{0,3}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3) R$$

e determino $\bar{q}_4, \bar{q}_5, \bar{q}_6$

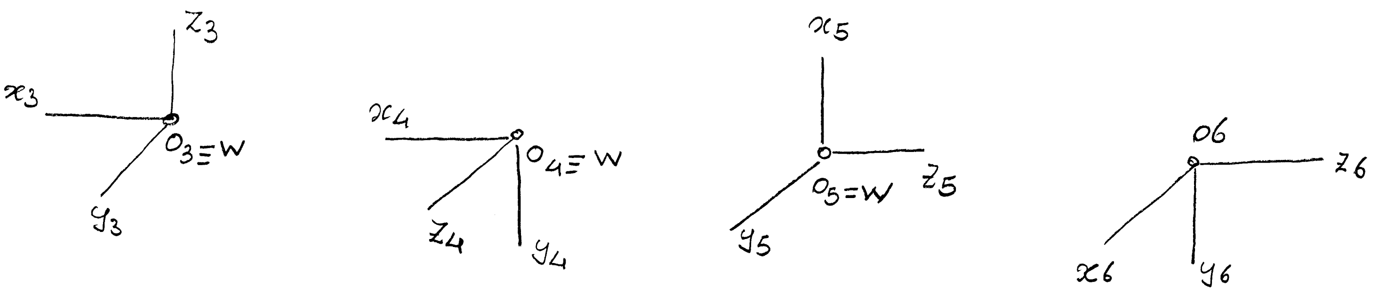
Allora problema risulta disaccoppiato poi risolvo prima nelle (q_1, q_2, q_3) per posizionare il centro del polso e poi determino le (q_4, q_5, q_6) della rotazione residua del polso per avere complessivamente la postura cercata

Soluzione posizionamento del polso sferico p_w per manip. antropomorfo (vedi slide)
soluzione (a valle) del polso sferico una volta nota la $R_{3,6}$ da ottenere.
Notare che la $R_{3,6}(q_4, q_5, q_6)$ è equivalente alla $R_{ZYZ}(q_4, q_5, q_6)$ per convenzione di D.-H. quindi le formule della cinematica inversa sono quelle viste quando è stata fatta param. di SO(3).

Attenzione: discorso su convenzione D.-H. e config. iniziale è quello che NON c'è scritto sui libri



con scelta

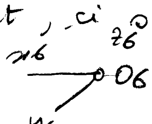


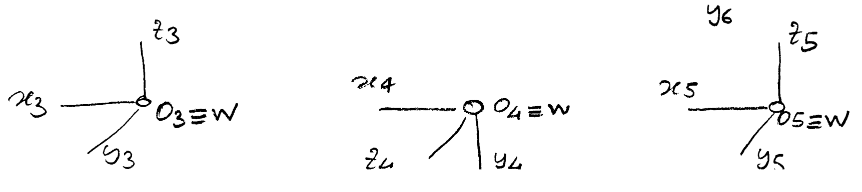
e tabella così

Link	a	α	d	θ	θrif.
4	0	$-\pi/2$	0	θ_4	0
5	0	$\pi/2$	0	θ_5	$-\pi/2$
6	0	0	d_6	θ_6	$\pi/2$

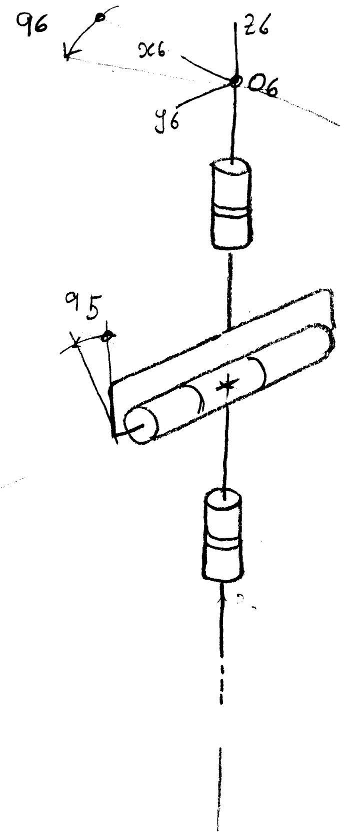
aggiungo una colonna alla tabella per ricordarmi che nella config. disegnata, con quei θ senza offset, ci sono per $\theta = \theta_{rif}$.

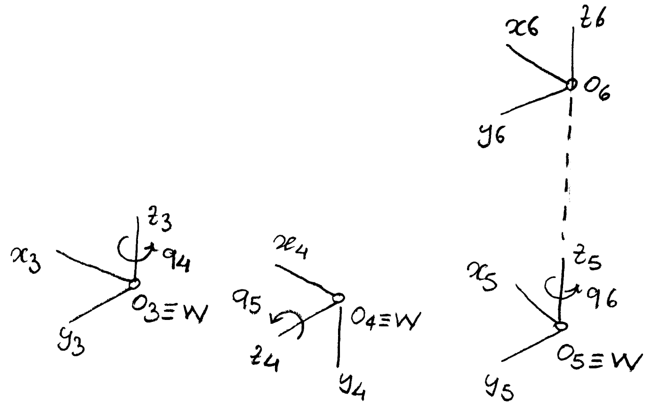
Per $\theta = 0$ sono messo così:





Cioè per $\theta = 0$ il polso è in questa config.





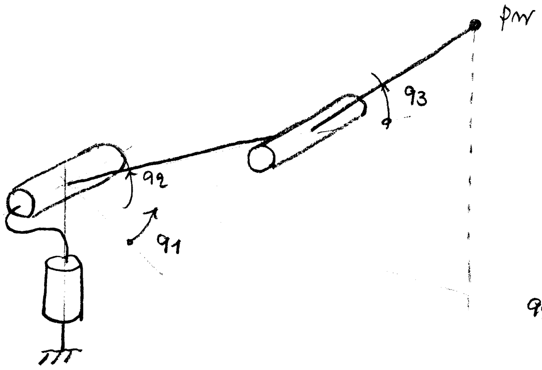
Infatti in questa configurazione tutti gli assi x sono allineati.

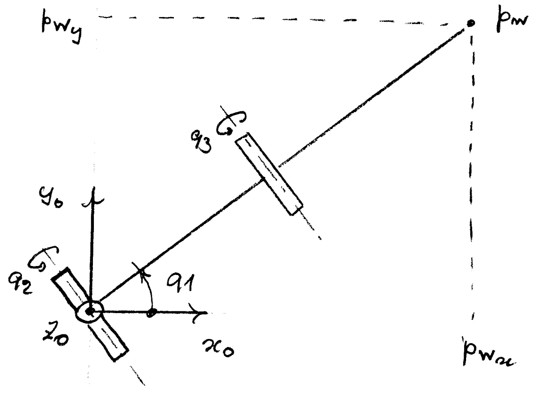
Notare che le rotazioni attorno agli assi z_3, z_4 e z_5 degli angoli q_4, q_5 e q_6 ossia la

$$R_{3,6}(q_4, q_5, q_6) = R_{3,4}(q_4)\, R_{4,5}(q_5)\, R_{5,6}(q_6)$$

corrisponde ad una $R_{ZYZ}(q_4, q_5, q_6)$ ossia attorno ad assi correnti 3, 2, 3 se letti nella terna $\{S_3\}$.

Posizionamento del centro del polso p_W per manipolatore antropomorfo.

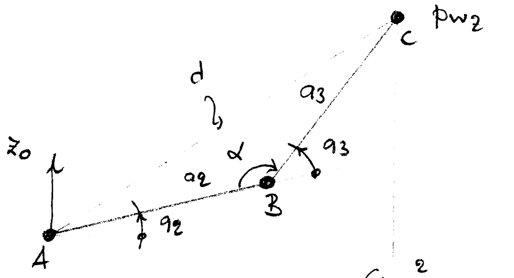




Dalle proiezione sul piano x_0, y_0 si ha

$$q_1 = \text{atan2}(p_{Wy}, p_{Wx}) \quad \text{oppure} \quad q_1' = q_1 + \pi .$$

Una volta determinata soluzione per q_1, la struttura risulta planare negli angoli q_2 e q_3.
Ossia determinare q_2 e q_3 tali per cui:



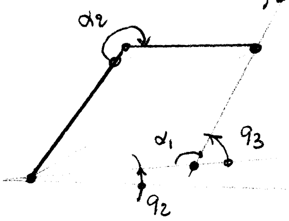
$$(p_{wx}^2 + p_{wy}^2)^{1/2} = r$$

La distanza $d = (r^2 + p_{wz}^2)^{1/2} = (p_{wx}^2 + p_{wy}^2 + p_{wz}^2)^{1/2} \rightsquigarrow d^2 = p_{wx}^2 + p_{wy}^2 + p_{wz}^2$

Da teorema di Carnot $\quad d^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2 a_2 a_3 \cos\alpha$

da cui $\cos\alpha = \dfrac{a_2^2 + a_3^2 - d^2}{2 a_2 a_3} \rightsquigarrow \alpha = \arccos\left(\dfrac{a_2^2 + a_3^2 - d^2}{2 a_2 a_3}\right)$

Soluzioni $\alpha_{1,2}$ che corrispondono a $(q_2, q_3)_1$ e $(q_2, q_3)_2$



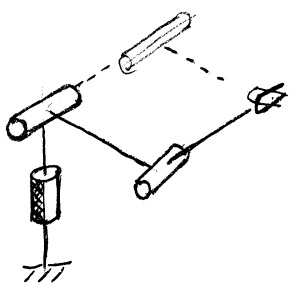
Questo poiché dato un certo valore per α, $q_3 = \pi - \alpha$.

A questo punto conosco dove è posizionato il gomito, ossia deve essere che

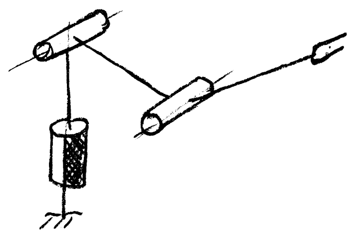
$$\begin{cases} a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2 + q_3) = r \\ a_2 \sin q_2 + a_3 \sin(q_2 + q_3) = p_{wz} \end{cases} \quad \text{con } q_3 = \pi - \alpha \ (\text{noto})$$

$\rightsquigarrow$ isolo $\sin q_2$ e $\cos q_2$ e poi $q_2 = \mathrm{atan2}(\sin q_2, \cos q_2)$

In definitiva, le soluzioni sono 4 ossia



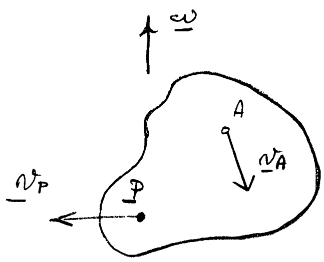
spalla destra –
gomito alto/basso



spalla sinistra –
gomito alto/basso.

Cinematica differenziale

Alcuni richiami di cin. differenziale 3D.

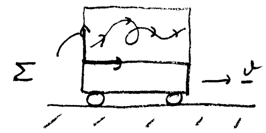


1) Legge fondamentale della cinematica rigida

$$\underline{v}_P = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{AP}$$

$\underline{\omega}$ vettore velocità angolare con tre componenti non nulle in generale

2) Legge di composizione dei moti relativi (veloc.)



$$\underline{v}_P = \underline{v}_P^{(tr)} + \underline{v}_P^{(rel)}$$

composizione delle velocità con osservatore ausiliario

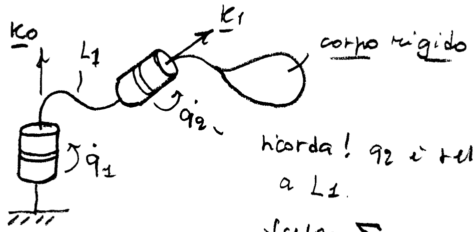
$\underline{v}_P^{(tr)}$ velocità del corpo mobile (del suo punto P!) pensato solidale al riferimento

$\underline{v}_P^{(rel)}$ velocità del punto P nel suo moto relativo rispetto all'osservatore Σ.

Questa legge vale anche per le velocità angolari (che non si riferiscono ad un punto ma ad un corpo nel suo complesso)

$$\underset{\dot{q}_1 \underline{k}_0}{\underline{\omega}^{(tr)}} \quad \underline{\omega} = \underline{\omega}^{(tr)} + \underline{\omega}^{(rel)} \quad \underset{\dot{q}_1 \underline{k}_1}{\underline{\omega}^{(rel)}}$$

es.



ricorda! q_2 è relativa a L_1.

Scelgo Σ osserv. $\in L_1$

3) Teorema di Rivals

$$\underset{\text{acc di P}}{\underline{a}_P} = \underset{\text{acc. d'A}}{\underline{a}_A} + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{AP} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{AP})$$

$\dot{\underline{\omega}}$ = accelerazione angolare

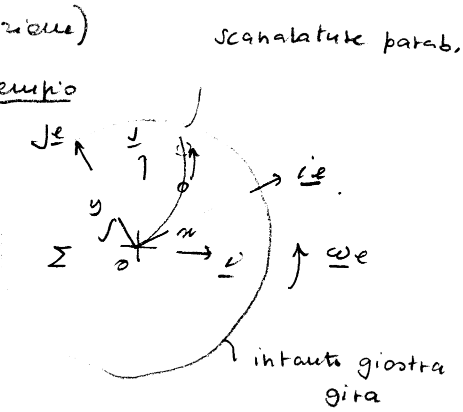
$\underline{\omega}$ = velocità angolare

4) Legge di composizione dei moti relativi (accelerazione)

$$\underline{a}_P = \underline{a}_P^{(rel)} + \underline{a}_P^{(tr)} + \underline{a}_P^{(Co)}$$

$$\underline{a}_P^{(Co)} \rightarrow 2\,\underline{\omega}^{(tr)} \times \underline{v}^{(rel)}$$

esempio



es. una particella segue traiettoria parabolica

$$y = ax^2 \longrightarrow \begin{cases} x = ct \\ y = ax^2 = ac^2t^2 \end{cases}, \; t > 0$$

giostra gira con $\underline{\omega}_e = \omega_e \underline{k}$ e $\dot{\underline{\omega}}_e = \dot{\omega}_e \underline{k}$

Calcoliamo velocità particella

$$\underline{v}_P = \underline{v}_P^{(tr)} + \underline{v}_P^{(rel)}$$

$$\underline{v}_P^{(tr)} = \omega_e \underline{k} \times \underline{OP} = \omega_e \underline{k}_e \times [x\,\underline{i}_e + y\,\underline{j}_e]$$

$$= \omega_e \underset{ct}{x}\,\underline{j}_e - \omega_e \underset{ac^2t^2}{y}\,\underline{i}_e$$

$$\underline{v}_P^{(rel)} = \dot{x}\,\underline{i}_e + \dot{y}\,\underline{j}_e$$

$$= c\,\underline{i}_e + 2ac^2t\,\underline{j}_e$$

$$\longrightarrow \underline{v}_P = (c - \omega_e a c^2 t^2)\,\underline{i}_e + (2ac^2t + \omega_e c t)\,\underline{j}_e$$

Calcoliamo accelerazione della particella

$$\underline{a}_P = \underline{a}_P^{(tr)} + \underline{a}_P^{(rel)} + \underline{a}_P^{(Co)}$$

$\underline{a}_P^{(tr)}$ = (blocco particella rispetto a scanalature) = $\underbrace{\dot{\omega}_e \underline{k}_e \times \underline{OP}}_{\text{acc. tang.}} - \underbrace{\omega_e^2 \underline{OP}}_{\text{acc. centripeta}}$

che accelerazione residua di trasc ha?

$$= \dot{\omega}_e \underline{k}_e \times [x \underline{i}_e + y \underline{j}_e] - \omega_e^2 [x \underline{i}_e + y \underline{j}_e] =$$
$$= -\dot{\omega}_e y \underline{i}_e + \dot{\omega}_e x \underline{j}_e - \omega_e^2 x \underline{i}_e - \omega_e^2 y \underline{j}_e =$$
$$= (-\dot{\omega}_e y - \omega_e^2 x) \underline{i}_e + (\dot{\omega}_e x - \omega_e^2 y) \underline{j}_e$$

$\underline{a}_P^{(rel)}$ = (guardo solo ciò che avviene rispetto a Σ sulla giostra) = $\ddot{x} \underline{i}_e + \ddot{y} \underline{j}_e = 0 \underline{i}_e + 2ac^2 \underline{j}_e$

$$= 2ac^2 \underline{j}_e$$

$\underline{a}_P^{(Co)}$ = (c'è se Σ ha moto rotatorio e $\underline{v}^{(rel)} \neq \underline{0}$) $= 2\underline{\omega}^{(tr)} \times \underline{v}_P^{(rel)} = 2\omega_e \underline{k}_e \times [c \underline{i}_e + 2ac^2 t \underline{j}_e]$

$$= 2\omega_e [c \underline{j}_e - 2ac^2 t \underline{i}_e]$$

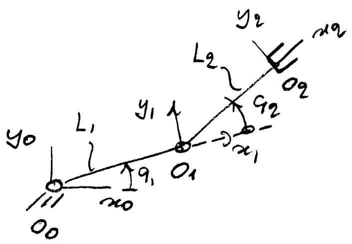
<u>In definitiva</u>:

$$\underline{a}_P = (-\dot{\omega}_e y - \omega_e^2 x - 4ac^2 \omega_e t) \underline{i}_e + (\dot{\omega}_e x - \omega_e^2 y + 2ac^2 + 2\omega_e c) \underline{j}_e$$

con $x(t) = ct$
$y(t) = ac^2 t^2$

Ritorniamo sui <u>manipolatori</u>

<u>esercizio test</u>



Vogliamo arrivare a determinare $\underline{v}_{O_2}$ e $\underline{\omega}_2$.

•) Partiamo dal link L1

$$\begin{cases} \underline{v}_{O_1} = \underline{v}_{O_0} + \underline{\omega}_1 \times \underline{O_0O_1} = \underline{0} + \dot{q}_1 \underline{k}_0 \times \underline{O_0O_1} \\ \underline{\omega}_1 = \dot{q}_1 \underline{k}_0 \end{cases}$$

•) Consideriamo link L_2

$$\begin{cases} \underline{v}_{O_2} = \underline{v}_{O_1} + \underline{\omega}_2 \times \underline{O_1O_2} \\ \underline{\omega}_2 = \underline{\omega}_2^{(tr)} + \underline{\omega}_2^{(rel)} = \dot{q}_1 \underline{k}_0 + \dot{q}_2 \underline{k}_1 \end{cases}$$ (da f.f cinematica) (formula fondamentale della cinem.)

Quindi, concatenando le espressioni,

$$\underline{v}_{O_2} = \dot{q}_1 \underline{k}_0 \times \underline{O_0O_1} + (\dot{q}_1 \underline{k}_0 + \dot{q}_2 \underline{k}_1) \times \underline{O_1O_2} =$$
$$= \dot{q}_1 \underline{k}_0 \times (\underline{O_0O_1} + \underline{O_1O_2}) + \dot{q}_2 \underline{k}_1 \times \underline{O_1O_2} = \dot{q}_1 \underline{k}_0 \times \underline{O_0O_2} + \dot{q}_2 \underline{k}_1 \times \underline{O_1O_2}$$

Per la velocità angolare semplicemente:

$$\underline{\omega}_3 = \dot q_1 \underline{k}_0 + \dot q_2 \underline{k}_1 + \dot q_3 \underline{k}_2$$

Allora troviamo agilmente

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_{O3} \\ \underline{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_0 \times \underline{O_0 O_3} & \underline{k}_1 \times \underline{O_1 O_3} & \underline{k}_2 \times \underline{O_2 O_3} \\ \underline{k}_0 & \underline{k}_1 & \underline{k}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \\ \dot q_3 \end{bmatrix} =: J(\underline{q})\, \dot{\underline{q}}$$

$J(\underline{q})$ è detto Jacobiano geometrico della trasformazione

in generale $J(\underline{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ con 6 no. di righe

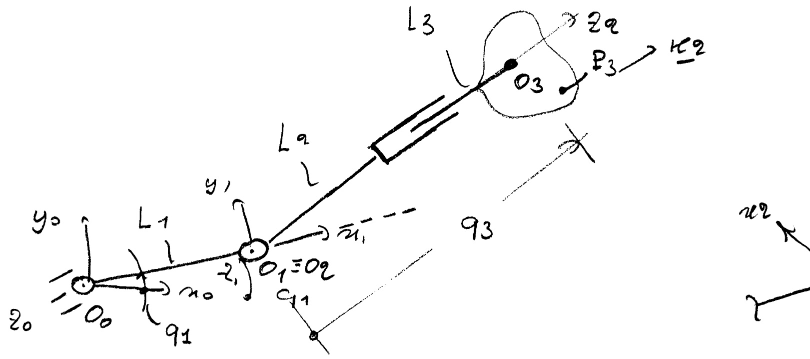
n no. di colonne corrisp. al no. di g.d.l. della catena cinematica

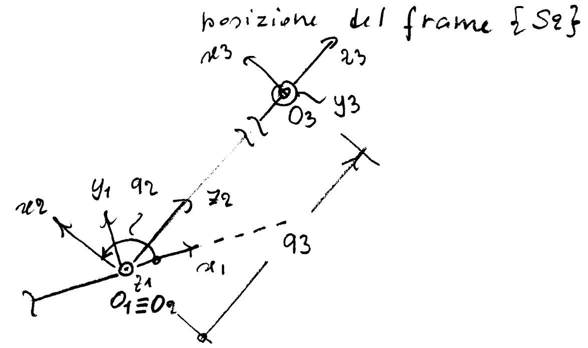
$$J(\underline{q}) = \begin{bmatrix} J_P(\underline{q}) \\ J_O(\underline{q}) \end{bmatrix}$$ con

•) $J_P \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ jacobiano di posizione (lega $\underline{v}_{On}$ a $\dot{\underline{q}}$);

•) $J_O \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ jacobiano di orientaz. (lega $\underline{\omega}_n$ a $\dot{\underline{q}}$).

Consideriamo adesso questa catena cin.





dato che ultima coppia è prismatica la terna $\{S_2\}$ ha ancora origine in O_1, ossia $O_2 \equiv O_1$, perché z_1 e z_2 sono incid. in O_1.

allora: (anche se non necessario esplicitarli i frame sono come in fig.)

$O_2 \equiv O_1$; $\underline{v}_{O2} = \underline{v}_{O1}$; $\underline{\omega}_2 = \dot q_1 \underline{k}_0 + \dot q_2 \underline{k}_1$

L'elemento 3 viene guardato dal link 2 e si può scrivere

$$\underline{v}_{O3} = \underline{v}_{O3}^{(rel.)} + \underline{v}_{O3}^{(tr)} = (\dot q_3 \underline{k}_2) + (\underline{v}_{O1} + \underline{\omega}_2 \times \underline{O_1 O_3}) =$$

$$= \dot q_1 \underline{k}_0 \times \underline{O_0 O_1} + (\dot q_1 \underline{k}_0 + \dot q_2 \underline{k}_1) \times \underline{O_1 O_3} + \dot q_3 \underline{k}_2 =$$

$$= \dot q_1 \underline{k}_0 \times (\underline{O_0 O_3}) + \dot q_2 \underline{k}_1 \times \underline{O_1 O_3} + \dot q_3 \underline{k}_2$$

É Importante osservare che il vettore $\underline{\xi}_{O_3}$ caratterizza univocamente l'atto di moto di L_3. Infatti, nota $\underline{v}$ lineare di un punto di un corpo rigido e la velocità angolare la $\underline{v}$ lineare di un qualsiasi altro punto è nota, infatti

da $\underline{v}_{O_3}$ e $\underline{\omega}_3$; $P_3 \in L_3$

$$\underline{v}_{P_3} = \underline{v}_{O_3} + \underline{\omega}_3 \times \underline{O_3 P_3}$$
$$= \underline{v}_{O_3} - \widehat{\underline{O_3 P_3}}\,\underline{\omega}_3$$

La velocità angolare è invece una proprietà globale del corpo rigido, indip. dal punto, che non ha proprio nessun ruolo.

Allora lo stesso atto di moto (dello stesso corpo rigido) può essere espresso da twist differenti, che differiscono solo per la scelta del punto rispetto al quale si è espresso la velocità lineare

Quindi il modo di variare di un twist di uno stesso atto di moto al variare del "polo" di rappresentazione risulta (in forma matriciale)

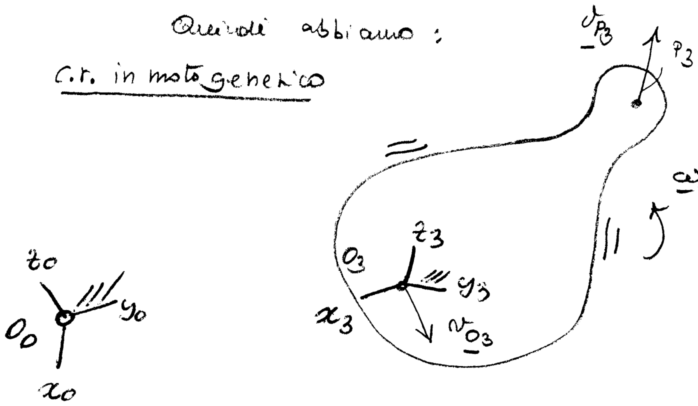
$$\underline{\xi}_{P_3} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{P_3} \\ \hline \underline{\omega}_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_{3\times 3} & -\widehat{O_3 P_3} \\ \hline O_{3\times 3} & I_{3\times 3} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_3} \\ \hline \underline{\omega}_3 \end{bmatrix} =: M_{P_3 O_3}\, \underline{\xi}_{O_3}$$

l'inversa è data da: (ribaltando i ruoli di O_3 e P_3 nella f.f. della cin)

$$\underline{\xi}_{O_3} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_3} \\ \hline \underline{\omega}_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_{3\times 3} & \widehat{O_3 P_3} \\ \hline O_{3\times 3} & I_{3\times 3} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \underline{v}_{P_3} \\ \hline \underline{\omega}_3 \end{bmatrix} =: M_{O_3 P_3}\, \underline{\xi}_{P_3}$$

Quindi abbiamo:

c.r. in moto generico



x definire uno atto di moto uso equivalentemente $\underline{\xi}_{O_3}$ o $\underline{\xi}_{P_3}$. Questi sono legati dalla trasformazione $M_{P_3 O_3}$

Inoltre se uso due sistemi di riferimento diversi, ad esempio $\{S_3\} \in L_3$ e $\{S_0\}$ fisso rispetto al terreno allora posso scrivere, semplicemente cambiando le componenti di vettori velocità (n.b. sentono solo cambiam di orientazione)

$${}^0[\underline{v}_{O_3}] = {}^0R_3\,[\underline{v}_{O_3}]_3$$
$${}^0[\underline{\omega}_3] = {}^0R_3\,[\underline{\omega}_3]_3$$

da cui
$${}^0[\underline{\xi}_{O_3}] = \begin{bmatrix} {}^0[\underline{v}_{O_3}] \\ \hline {}^0[\underline{\omega}_3] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} {}^0R_3 & O_{3\times 3} \\ \hline O_{3\times 3} & {}^0R_3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^3[\underline{v}_{O_3}] \\ \hline {}^3[\underline{\omega}_3] \end{bmatrix} = {}^0L_3\, {}^3[\underline{\xi}_{O_3}]$$

Allora se ad esempio dalla rappresentazione dell'atto di moto ${}^0[\underline{\xi}_{O_3}]$ voglio passare alla rappresentazione ${}^3[\underline{\xi}_{P_3}]$ si può usare le precedenti leggi di trasformazione

Ossia voglio determinare $\;^3[\underline{\zeta}_{P_3}] = [\;\underset{\text{matrice}}{,}\;]\;^0[\underline{\zeta}_{O_3}]$

Posso ragionare così:

1) Prima, a parità di polo O_3, cambio le coordinate da $\{S_0\}$ e $\{S_3\}$ così:

$$^3[\underline{\zeta}_{O_3}] = {}^3L_0\;{}^0[\underline{\zeta}_{O_3}] \qquad \text{con} \qquad {}^3L_0 = \left[\begin{array}{c|c} {}^3R_0 & 0 \\ \hline 0 & {}^3R_0 \end{array}\right]$$

2) Poi, a parità di sistema di rif $\{S_3\}$, cambio polo da O_3 a P_3 così:

$$^3[\underline{\zeta}_{P_3}] = {}^3M_{P_3O_3}\;{}^3[\underline{\zeta}_{O_3}] \qquad \text{con} \qquad {}^3M_{P_3O_3} = \left[\begin{array}{c|c} I_{3\times3} & -{}^3(\widehat{\underline{O_3}P_3}) \\ \hline 0 & I_{3\times3} \end{array}\right]$$

Allora si ottiene, concatenando le equazioni da sopra

$$^3[\underline{\zeta}_{P_3}] = {}^3M_{P_3O_3}\;{}^3L_0\;{}^0[\underline{\zeta}_{O_3}] = {}^{3,0}M_{P_3,O_3}\;{}^0[\underline{\zeta}_{O_3}]$$

dove

$$^{3,0}M_{P_3,O_3} = \left[\begin{array}{c|c} I & -{}^3(\widehat{\underline{O_3}P_3}) \\ \hline 0 & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} {}^3R_0 & 0 \\ \hline 0 & {}^3R_0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} {}^3R_0 & -{}^3(\widehat{\underline{O_3}P_3})\,{}^3R_0 \\ \hline 0 & {}^3R_0 \end{array}\right]$$

<u>nota bene</u>: il prodotto $-{}^3(\widehat{\underline{O_3}P_3})\,{}^3R_0$ è coerente poiché compare in queste espressione

$$^3[\underline{v}_{P_3}] = {}^3R_0\;{}^0[\underline{v}_{O_3}] - {}^3(\widehat{\underline{O_3}P_3})\,{}^3R_0\;{}^0[\underline{\omega}_3]$$

${}^3(\underline{O_3}P_3)$ è costante poiché O_3, $P_3 \in L_3$ e $\{S_3\}$ solidale a L_3.

Il secondo blocco di eq.ni invece fornisce

$$^3[\underline{\omega}_3] = {}^3R_0\;{}^0[\underline{\omega}_3]$$

ed è un semplice cambiam. di componenti poiché non ha senso cambiare polo alla velocità angolare.

Avrei potuto anche ragionare <u>in ordine inverso</u>, ossia

1) Prima, a parità di sistema di riferimento $\{S_0\}$, cambio polo da O_3 a P_3:

$$^0[\underline{\zeta}_{P_3}] = {}^0M_{P_3O_3}\;{}^0[\underline{\zeta}_{O_3}] \qquad \text{con} \qquad {}^0M_{P_3O_3} = \left[\begin{array}{c|c} I_{3\times3} & -{}^0(\widehat{\underline{O_3}P_3}) \\ \hline 0 & I_{3\times3} \end{array}\right]$$

2) Poi, a parità di polo P_3, cambio sistema di riferimento da $\{S_0\}$ a $\{S_3\}$:

$$^3[\underline{\zeta}_{P_3}] = {}^3L_0\;{}^0[\underline{\zeta}_{P_3}] \qquad \text{con} \quad {}^3L_0 \text{ come visto prima}$$

Allora, di nuovo concatenando le espressioni come prima si ottiene stavolta:

$$ {}^{3}[\underline{\mathcal{g}}_{P_3}] = {}^{3}L_{0}\; {}^{0}M_{P_3 O_3}\; {}^{0}[\underline{\mathcal{g}}_{O_3}] = (\text{di nuovo}) = {}^{3,0}M_{P_3,O_3}\; {}^{0}[\underline{\mathcal{g}}_{O_3}] $$

dove si ha questa forma alternativa, ma equivalente,

$$ {}^{3,0}M_{P_3,O_3} = \left[\begin{array}{c|c} {}^{3}R_{0} & 0 \\ \hline 0 & {}^{3}R_{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_{3\times 3} & -{}^{0}(\widehat{\underline{O_3P_3}}) \\ \hline 0 & I_{3\times 3} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} {}^{3}R_{0} & -{}^{3}R_{0}\,{}^{0}(\widehat{\underline{O_3P_3}}) \\ \hline 0 & {}^{3}R_{0} \end{array}\right] $$

il primo blocco di equ.' risulta adesso

$$ {}^{3}[\underline{v}_{P_3}] = {}^{3}R_{0}\,{}^{0}[\underline{v}_{O_3}] - {}^{3}R_{0}\,{}^{0}(\widehat{\underline{O_3P_3}})\,{}^{0}[\underline{\omega}_3] $$

che è identico a prima poiché

$$ -{}^{3}(\widehat{\underline{O_3P_3}})\;{}^{3}R_{0}\,{}^{0}[\underline{\omega}_3] = -{}^{3}(\underline{O_3P_3}) \times [{}^{3}R_{0}\,{}^{0}[\underline{\omega}_3]] = $$

$$ = -{}^{3}R_{0}\,{}^{0}R_{3}\,{}^{3}(\underline{O_3P_3}) \times [{}^{3}R_{0}\,{}^{0}[\underline{\omega}_3]] = -{}^{3}R_{0}\left\{+{}^{0}R_{3}\,{}^{3}(\underline{O_3P_3}) \times {}^{0}[\underline{\omega}_3]\right\} = $$

$$ = -{}^{3}R_{0}\left\{{}^{0}(\underline{O_3P_3}) \times {}^{0}[\underline{\omega}_3]\right\} = -{}^{3}R_{0}\,{}^{0}(\widehat{\underline{O_3P_3}})\,{}^{0}[\underline{\omega}_3] \qquad \text{c.v.d.} $$

anche dalla identità $(R\underline{a})^{\wedge} = R\,\hat{\underline{a}}\,R^T \qquad R \in SO(3),\ \hat{a} = -\hat{a}^T$

questa viene da

$$ (R\underline{a})^{\wedge}\,\underline{b} = (R\underline{a}) \times \underline{b} = R\underline{a} \times (RR^T\underline{b}) = R(\underline{a} \times R^T\underline{b}) = R\,\hat{\underline{a}}\,R^T\underline{b} $$

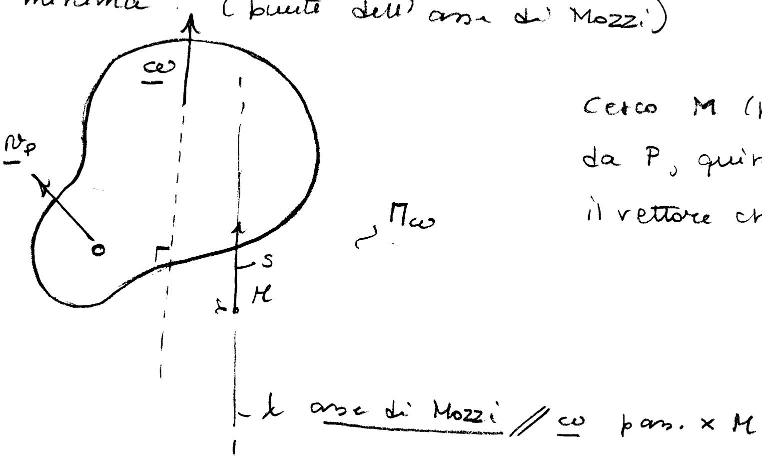
per arbitrarietà di $\underline{b}$

$$ (R\underline{a})^{\wedge} = R\,\hat{\underline{a}}\,R^T. $$

Qual'è la forma più semplice per un twist? Ovvero qual'è polo rispetto al quale assume forma "minima"? (punti dell' asse di Mozzi)

atto di moto con polo P.

$$ \underline{\mathcal{g}}_P = \begin{bmatrix} \underline{v}_P \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} $$



Cerco M (punto) partendo da P, quindi $\underline{PM}$ sarà il vettore che punta M a P.

$\exists\, M:\ \underline{v}_M \,/\!/\, \underline{\omega}$ e

$\underline{v}_M = h\,\underline{\omega}$?

$$ \underline{v}_M = h\,\underline{\omega} = \underline{v}_P + \underline{\omega} \times \underline{PM} $$

$$ \underline{\omega} \times \underline{v}_M = \underline{\omega} \times (h\,\underline{\omega}) = \underline{0} = \underline{\omega} \times \underline{v}_P + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{PM}) $$

$$ \underline{\omega} \times \underline{v}_P + (\underline{\omega} \cdot \underline{PM})\,\underline{\omega} - \|\underline{\omega}\|^2\,\underline{PM} = \underline{0} $$

(M) Lo cerco a partire da P in giacitura perpendicolare a $\underline{\omega}$ cosicché $\underline{\omega} \cdot \underline{PM} = 0$

Dunque su Π_ω (giacitura ortogonale a $\underline{\omega}$)

$$\underline{\omega} \times \underline{v}_P - \|\underline{\omega}\|^2 \underline{PM} = \underline{0} \iff \underline{PM} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{v}_P}{\|\underline{\omega}\|^2} = \frac{\cancel{\|\underline{\omega}\|}\, \underline{\omega}^u \times \underline{v}_P}{\cancel{\|\underline{\omega}\|}\, \|\underline{\omega}\|} = \frac{\underline{\omega}^u \times \underline{v}_P}{\|\underline{\omega}\|}$$

Poi i punti della retta l passante per M e // a $\underline{\omega}^u$ hanno tutte $\underline{v}_l = \underline{v}_M$ infatti

$$\underline{v}_l = \underline{v}_M + \underline{\omega} \times (s\, \underline{\omega}^u) = \underline{v}_M + \|\underline{\omega}\|\, \underline{\omega}^u \times (\underline{\omega}^u s) = \underline{v}_M$$

Quanto vale $\underline{v}_M = h\underline{\omega}$? ossia quanto vale h?

$$\underline{\omega} \cdot \underline{v}_M = \underline{\omega} \cdot h\underline{\omega} = \|\underline{\omega}\|^2 h \iff h = \frac{\underline{\omega} \cdot \underline{v}_M}{\|\underline{\omega}\|^2} = \frac{\cancel{\|\underline{\omega}\|}\, \underline{\omega}^u \cdot \underline{v}_M}{\cancel{\|\underline{\omega}\|}\, \|\underline{\omega}\|}$$

N.B. che dato che $\underline{v}_P = \underline{v}_M + \underline{\omega} \times \underline{MP}$ con P generico

$$\underline{\omega} \cdot \underline{v}_P = \underline{\omega} \cdot (\underline{v}_M) + \underbrace{\underline{\omega} \cdot (\underline{\omega} \times \underline{MP})}_{\text{sempre } = 0}$$

allora qualsiasi punto ha la stessa proiezione lungo asse di Mozzi di M.

Allora atto di moto generico in forma minima è rispetto a polo $\in$ asse di Mozzi. Rispetto ad un tale polo

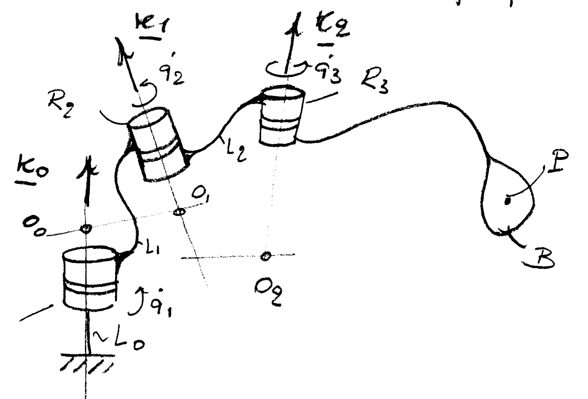
$$\underline{\xi}_M = \begin{bmatrix} \underline{v}_M \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\underline{\omega} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix}$$

Qual'è il twist in forma minima per una coppia rotoidale?

E per una coppia prismatica?

Si possono sommare twist? Sì, se sono scritte rispetto allo stesso polo (ovviam. poi nello stesso sistema di rif. quando si calcoli con le componenti)

$\underline{B}$.



applichiamo principio sovrapp. effetti ovvero composizione moti relativi

Nel moto di corpo B (body) secondo 1ª coppia rotoidale: quanto vale twist?

Lo scrivo rispetto a polo O_0

$$\underline{\xi}_{O_0}^{R_1} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_0} \\ \dot q_1 \underline{k}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \dot q_1 \underline{k}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_0 \end{bmatrix} \dot q_1$$

Nel moto di B secondo 2ª coppia rotoidale: quanto vale twist?

Lo scrivo rispetto a polo O_1

$$\underline{\mathcal{V}}_{O_1}^{R_2} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_1} \\ \dot{q}_2 \underline{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_1 \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_1 \end{bmatrix} \dot{q}_2$$

Attorno a R_3

$$\underline{\mathcal{V}}_{O_2}^{R_3} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_2} \\ \dot{q}_3 \underline{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_2 \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{k}_2 \end{bmatrix} \dot{q}_3$$

Li posso sommare? Così no!, poiché sono atti di moto di corpo rispetto a poli differenti. Li devo prima rendere coerenti scrivendoli tutte e 3 rispetto ad uno stesso polo, es. P se poi mi interessa avere una $\underline{\mathcal{V}}_P = \begin{bmatrix} \underline{v}_P \\ \underline{\omega} \end{bmatrix}$

Allora

$$\underline{\mathcal{V}}_P^{R_1} = M_{PO_0} \underline{\mathcal{V}}_{O_0}^{R_1} \; ; \; \underline{\mathcal{V}}_P^{R_2} = M_{PO_1} \underline{\mathcal{V}}_{O_1}^{R_2} \; ; \; \underline{\mathcal{V}}_P^{R_3} = M_{PO_2} \underline{\mathcal{V}}_{O_2}^{R_3}$$

$$M_{PO_x} = \left[\begin{array}{c|c} I & -(O_x \hat{P}) \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

e poi posso fare

$$\underline{\mathcal{V}}_P = \underline{\mathcal{V}}_P^{R_1} + \underline{\mathcal{V}}_P^{R_2} + \underline{\mathcal{V}}_P^{R_3} = M_{PO_0} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{k}_0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + M_{PO_1} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{k}_1 \end{bmatrix} \dot{q}_2 + M_{PO_2} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{k}_2 \end{bmatrix} \dot{q}_3$$

$$= \left[M_{PO_0} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \hline \underline{k}_0 \end{bmatrix} \,\vdots\, M_{PO_1} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \hline \underline{k}_1 \end{bmatrix} \,\vdots\, M_{PO_2} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \hline \underline{k}_2 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} I & -(O_0 P)\times \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \hline \underline{k}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_0 \times \underline{O_0 P} \\ \hline \underline{k}_0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} I & -(O_1 P)\times \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \hline \underline{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_1 \times \underline{O_1 P} \\ \hline \underline{k}_1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} I & -(O_2 P)\times \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \hline \underline{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_2 \times \underline{O_2 P} \\ \hline \underline{k}_2 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$\underline{\mathcal{V}}_P = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{k}_0 \times \underline{O_0 P} & \underline{k}_1 \times \underline{O_1 P} & \underline{k}_2 \times \underline{O_2 P} \\ \underline{k}_0 & \underline{k}_1 & \underline{k}_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \hline \dot{q}_2 \\ \hline \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

contrib. 1° giunto R_1 — 2° giunto R_2 — 3° giunto R_3

Attenzione al fatto che questa relazione $\underline{\xi}_P = J_P(\underline{q})\dot{\underline{q}}$ è espressa in forma invariante, nel senso che noi abbiamo scelto il polo (punto P in questo caso) di cui guardiamo la velocità lineare (come rappresentativa dell'atto di moto) ma non si è ancora stabilito in quale sistema di riferimento esprimere le componenti.

Perciò possiamo usare le trasformazioni viste prima.

Quindi potremo usare ${}^0[\underline{\xi}_P] = {}^0[J_P(\underline{q})]\,\dot{\underline{q}}$ o, ad esempio, un ${}^2[\underline{\xi}_{O_2}]$ che avrà associata una opportuna ${}^2[J_{O_2}(\underline{q})]$ con ${}^2[\underline{\xi}_{O_2}] = {}^2[J_{O_2}(\underline{q})]\,\dot{\underline{q}}$

Allora stante le relazioni fra i twist

$${}^0[\underline{\xi}_P] = {}^{0,2}M_{P,O_2}\,{}^2[\underline{\xi}_{O_2}] \quad \text{allora} \quad {}^0[J_P(\underline{q})]\,\dot{\underline{q}} = {}^{0,2}M_{P,O_2}\,{}^2[J_{O_2}(\underline{q})]\,\dot{\underline{q}}$$

Dato che tale relazione deve essere vera $\forall \dot{\underline{q}}$ allora si ha che i Jacobiani si trasformano nel seguente modo:

$${}^0[J_P(\underline{q})] = {}^{0,2}M_{P,O_2}\,{}^2[J_{O_2}(\underline{q})]$$, ossia esattamente come si trasformano i twist.

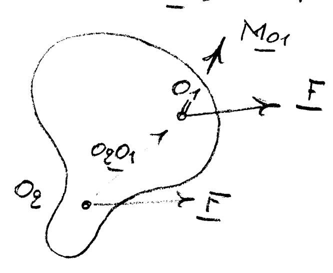
Adesso entriamo nel dominio della statica

Un sistema di forze agenti su un corpo rigido è equivalente alla risultante $\underline{F}$ applicata in un punto O_1 ed al momento risultante $\underline{M}_{O_1}$ rispetto a tale polo.

Questo sistema di forze è altresì rappresentabile con un sistema equivalente con stessa risultante applicata nel punto O_2 e momento risultante $\underline{M}_{O_2}$ diverso in generale da $\underline{M}_{O_1}$

Allora in questo nuovo sistema risultante è ancora $\underline{F}$ ma $\underline{M}_{O_2}$ è tale che

$$\begin{cases} \underline{F}_{O_2} = \underline{F}_{O_1} = \underline{F} \\ \underline{M}_{O_2} = \underline{M}_{O_1} + \underline{O_2O_1} \times \underline{F} = \underline{M}_{O_1} + \widehat{\underline{O_2O_1}}\,\underline{F} \end{cases}$$



ossia anche

$$\underline{M}_{O_2} = \underline{M}_{O_1} + \underline{F} \times \underline{O_1O_2}$$

Allora si nota che queste legge di variazione al variare del polo è identica a quella della velocità lineare di un punto sullo stesso corpo rigido. Allora, introducendo il wrench, che impila risultante e momento risultante rispetto ad un polo si scrive

$$\underline{w}_{O_1} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \hline \underline{M}_{O_1} \end{bmatrix}$$, wrenches equivalenti (o meglio equipollenti) si trovano

mediante la legge:

$$\underline{w}_{O_2} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \hline \underline{M}_{O_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & O_{3\times3} \\ \hline \widehat{\underline{O_2O_1}} & I_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \hline \underline{M}_{O_1} \end{bmatrix} = W_{O_2O_1}\, \underline{w}_{O_1}$$

the other way around is

$$\underline{w}_{O_1} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \hline \underline{M}_{O_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & O_{3\times3} \\ \hline \widehat{\underline{O_1O_2}} & I_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \hline \underline{M}_{O_2} \end{bmatrix} = W_{O_1O_2}\, \underline{w}_{O_2}$$

nota bene che $W_{O_2O_1} = (W_{O_1O_2})^{-1}$. Facile da verificare anche sfruttando la struttura a blocchi della W e che $\hat{(\;)}$ è antisimmetrica.

Per le velocità invece si ha che:

$$\underline{\xi}_{O_2} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_2} \\ \hline \underline{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & \widehat{\underline{O_2O_1}} \\ \hline O_{3\times3} & I_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_1} \\ \hline \underline{\omega} \end{bmatrix} = M_{O_2O_1}\, \underline{\xi}_{O_1}$$

$$\underline{\xi}_{O_1} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_1} \\ \hline \underline{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & \widehat{\underline{O_1O_2}} \\ \hline O_{3\times3} & I_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{O_2} \\ \hline \underline{\omega} \end{bmatrix} = M_{O_1O_2}\, \underline{\xi}_{O_2}$$

N.b. fra i twist non è definito un prodotto scalare (non avrebbe senso fisico poiché sommerei prodotti scalari di $\underline{v}$ lineari a prodotti scalari di $\underline{\omega}$ angolari. Stessa cosa fra i wrench, in cui sommerei p.s. di forze e p.s. di coppie. Tuttavia, se effettuo p.s. fra 1 twist ed 1 wrench descritti rispetto al medesimo polo sto calcolando la potenza che il sistema di forze di risultante $\underline{w}_{O_1}$ (ad es.) sviluppa nell'atto di moto descritto dal twist $\underline{\xi}_{O_1}$

ossia $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{scalare}}}{P} = \underline{w}_{O_1}^T\, \underline{\xi}_{O_1}$

Adesso, dato che $\underline{w}_{O_2}$ è equipollente a $\underline{w}_{O_1}$ e $\underline{\xi}_{O_2}$ descrive lo stesso atto di moto di $\underline{\xi}_{O_1}$ allora deve essere

$$P = \underline{\xi}_{O_1}^T\, \underline{w}_{O_1} = \underline{\xi}_{O_2}^T\, \underline{w}_{O_2}$$

Se conosco la legge di variazione di twist "congruenti" nell'esprimere lo stesso atto di moto, deve essere che

$$\underline{\xi}_{O_1}^T\, \underline{w}_{O_1} = \underline{\xi}_{O_2}^T\, \underline{w}_{O_2} \qquad \text{ma} \qquad \underline{\xi}_{O_2} = M_{O_2O_1}\, \underline{\xi}_{O_1}, \quad \underline{\xi}_{O_2}^T = \underline{\xi}_{O_1}^T\, M_{O_2O_1}^T$$

allora

$$\underline{\xi}_{O_1}^T\, \underline{w}_{O_1} = \underline{\xi}_{O_1}^T\, M_{O_2O_1}^T\, \underline{w}_{O_2} \quad \text{ossia}$$

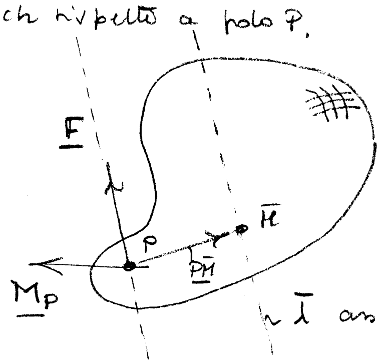
$$\underline{\xi}_{O_1}^T \left(\underline{w}_{O_1} - M_{O_2O_1}^T\, \underline{w}_{O_2} \right) = \underline{0} \iff \underline{w}_{O_2} = (M_{O_2O_1})^{-T}\, \underline{w}_{O_1}$$

Ed infatti si verifica facilmente che $W_{O_2O_1} = (M_{O_2O_1})^{-T}$; $W_{O_1O_2} = (M_{O_1O_2})^{-T}$.

A questo punto ci si può chiedere qual'è l'espressione minima di un wrench, ossia se $\exists$ un polo rispetto a cui assume la forma più semplice.
(questi saranno i punti dell'asse centrale)
Dim. formalmente analoga a prima stante l'esatta equivalenza delle leggi di trasf fra cinematica e statica (cin $\rightarrow$ statica se : $\underline{\omega} \rightarrow \underline{F}$, $\underline{v} \rightarrow \underline{M}$)

sistema di forze con wrench rispetto a polo P.

$$\underline{w}_P = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{M}_P \end{bmatrix}$$



$\exists\, \bar{M}$: $\underline{M}_{\bar{M}} \parallel \underline{F}$ e $\underline{M}_{\bar{M}} = \bar{h}\, \underline{F}$?

$$\underline{M}_{\bar{M}} = \bar{h}\, \underline{F} = \underline{M}_P + \underline{F} \times \underline{P\bar{M}}$$

$$\underline{F} \times \underline{M}_{\bar{M}} = \underline{F} \times (\bar{h}\, \underline{F}) = \underline{0} = \underline{F} \times \underline{M}_P + \underline{F} \times (\underline{F} \times \underline{P\bar{M}})$$

ossia

$$\underline{0} = \underline{F} \times \underline{M}_P + (\underline{F} \cdot \underline{P\bar{M}})\, \underline{F} - (\underline{P\bar{M}})\, \|\underline{F}\|^2$$

Cerco $\bar{M}$ (punto) partendo da P su piano ortogonale a $\underline{F}$ passante per P
Allora $\underline{F} \cdot \underline{P\bar{M}} = 0$ e perciò

$$\underline{F} \times \underline{M}_P - \|\underline{F}\|^2\, \underline{P\bar{M}} = \underline{0} \iff \underline{P\bar{M}} = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_P}{\|\underline{F}\|^2} = \frac{\cancel{\|\underline{F}\|}\, \underline{F}^u \times \underline{M}_P}{\|\underline{F}\|^{\cancel{2}}} = \frac{\underline{F}^u \times \underline{M}_P}{\|\underline{F}\|}$$

Poi i punti della retta $\bar{\lambda}$ passante per $\bar{M}$ e // a $\underline{F}$ hanno tutte
$\underline{M}_{\bar{\lambda}} = \underline{M}_{\bar{M}}$ infatti

$$\underline{M}_{\bar{\lambda}} = \underline{M}_{\bar{M}} + \underline{F} \times (s\, \underline{F}^u) = \underline{M}_{\bar{M}} + \|\underline{F}\|\, \underline{F}^u \times (\underline{F}^u s) = \underline{M}_{\bar{M}}$$

Quanto vale $\underline{M}_{\bar{M}} = \bar{h}\, \underline{F}$? ossia quanto vale $\bar{h}$?

$$\underline{F} \cdot \underline{M}_{\bar{M}} = \underline{F} \cdot (\underline{M}_P + \underline{F} \times \underline{P\bar{M}}) = \underline{F} \cdot \underline{M}_P + \underline{F} \cdot \overbrace{(\cancel{\underline{F}} \times \underline{P\bar{M}})}^{0} = \underline{F} \cdot \underline{M}_P$$

$$\parallel$$

$$\bar{h}\, \|\underline{F}\|^2 \iff \bar{h} = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_P}{\|\underline{F}\|^2} = \frac{\cancel{\|\underline{F}\|}\, \underline{F}^u \cdot \underline{M}_P}{\|\underline{F}\|^{\cancel{2}}} = \frac{\underline{F}^u \cdot \underline{M}_P}{\|\underline{F}\|}$$

Dunque qualsiasi punto ha associato un momento la cui proiezione lungo $\underline{F}^u$, il versore della risultante, ha sempre lo stesso valore.
Il rapporto tra il valore di tale proiezione e $\|\underline{F}\|$ è il fattore di scala, o passo, $\bar{h}$.
E se non capite, seguite questo motto:
"Ask an impertinent question, and you are on the way to a pertinent answer"