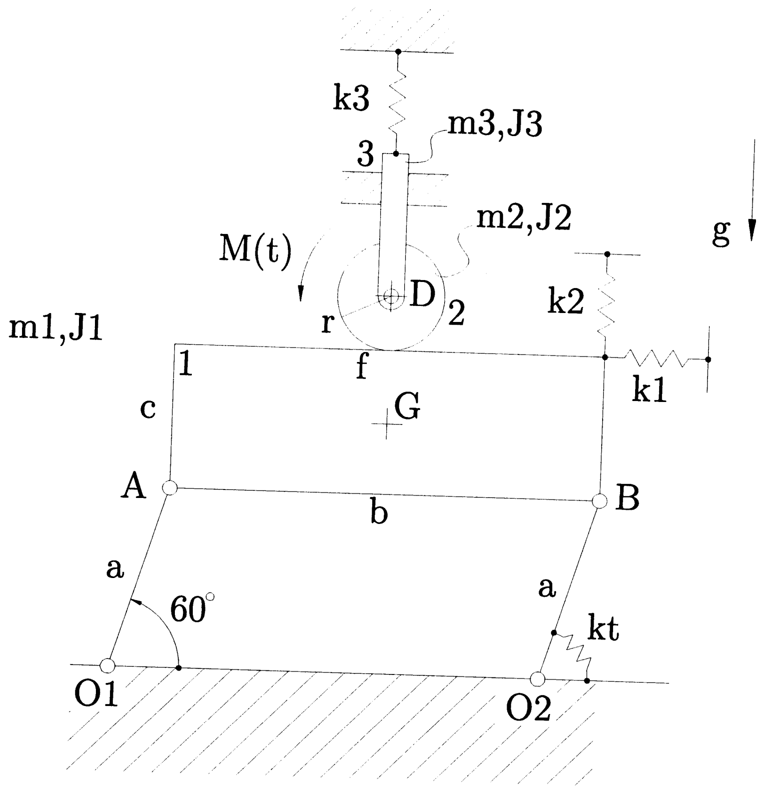
ESAME DI MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE – APPELLO DEL 18/02/2005



Descrizione del sistema:

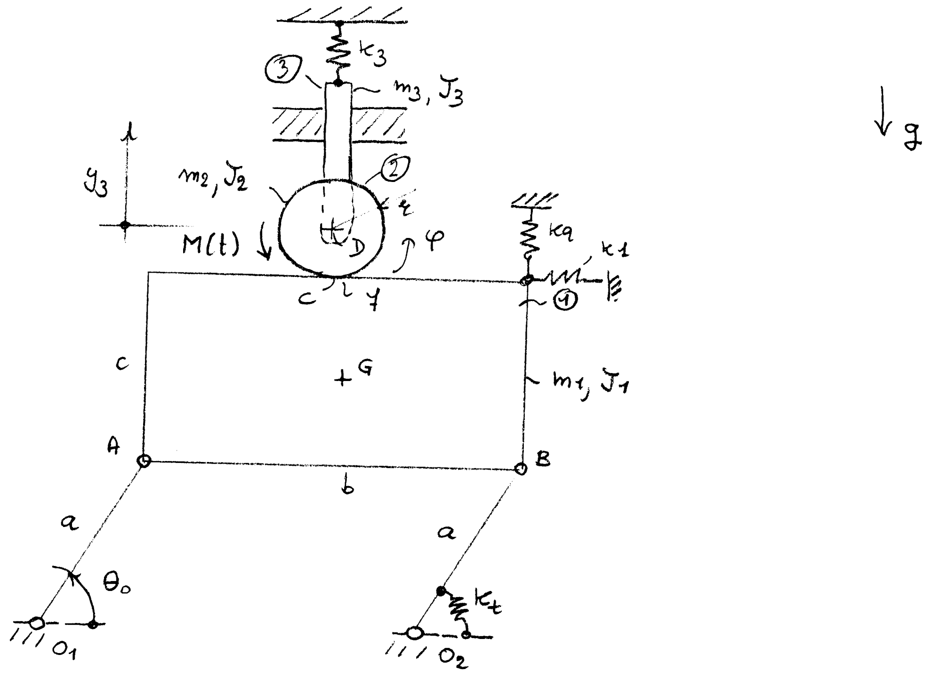
Nel meccanismo in figura il corpo 1 è incernierato alle aste O1A e O2B di ugual lunghezza a e prive di massa. Il disco 2 è incernierato al corsoio 3 in D e rotola senza strisciare su 1. Nella configurazione indicata, con l'angolo di 60°, le molle di costanti elastiche k1 e k2 sono scariche e la molla k3 è precaricata. La molla di torsione di costante kt è a riposo quando O2B è verticale.
Per t>0, agisce sul disco 2 un momento esterno di entità $M(t)=M_0\sin(\Omega t)$ e verso come in figura.
Il sistema si trova in un piano verticale.

Dati numerici:

a=0.25 m; b=0.4 m; c=0.20 m; r=0.10 m;
m1=1.5 kg; m2=1.2 kg; m3=0.75 kg; J1=0.1668 kgm^2; J2=0.006 kgm^2; J3=0.003 kgm^2;
k1=2000 N/m; k2=2500 N/m; k3=3000 N/m; kt=200 Nm/rad;
M_0=10 Nm; Ω=38 rad/s; f=0.1.

Domande:

1. Determinare all'istante t=0, il precarico della molla di costante k3 necessario affichè quella rappresentata in figura sia una configurazione di equilibrio.
2. Si scrivano le espressioni delle velocità dei punti A, B, D e delle velocità angolari dei corpi 1, 2 e 3.
3. Per t>0, si determinino le oscillazioni forzate del sistema (piccole oscillazioni).
4. Si verifichi se si ha perdita di contatto fra i corpi 1 e 2 per t>0.
5. Si verifichi se il coefficiente d'attrito f assegnato è sufficiente a garantire il vincolo di rotolamento senza strisciamento fra i corpi 1 e 2 per t>0.



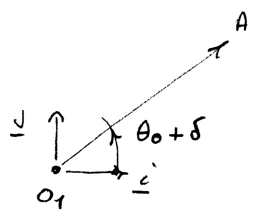
Dati: aste alla base prive di massa. Nella config. disegnata $\theta_0 = 60°$, k_1 e k_2 sono scariche, mentre k_3 è precaricata. La molla di torsione k_t è a riposo quando O_2B è verticale. Per $t>0$ agisce sul disco un momento $M(t) = M_0 \sin(\Omega t)$.

Domande: det. a $t=0$ precarico della molla k_3 per avere equilibrio a $\theta_0 = 60°$ indicata in figura.

velocità di A, B e D ed angolari di ①, ② e ③.

oscillazioni forzate (piccole). Verifica distacco fra ① e ②. Verif. strisciam. fra ① e ②.

Analisi di posizione. Vediamo cosa fa il punto A. Allora scriviamo il vettore $\underline{O_1A}$ in config. generica. Questo poiché poi anche lo spostamento di B e G sarà analogo dato che il corpo ① trasla.



$$\underline{O_1A} = a\cos(\theta_0+\delta)\,\underline{i} + a\sin(\theta_0+\delta)\,\underline{j}$$

se sviluppo $\underline{O_1A}$ al $O(\delta^2)$ ottengo: (per δ piccoli, quindi intorno a $\delta=0$, ossia $\theta=\theta_0$)

$$\underline{O_1A} \simeq a\left[\left(\cos\theta_0 - \sin\theta_0\,\delta - \cos\theta_0\frac{\delta^2}{2}\right)\underline{i} + \left(\sin\theta_0 + \cos\theta_0\,\delta - \sin\theta_0\frac{\delta^2}{2}\right)\underline{j}\right]$$

N.B. che $\underline{O_1A} \simeq \underline{O_1A}(0) + \overbrace{\underline{O_1A}(\delta) + \underline{O_1A}(\delta^2)}^{\Delta \underline{O_1A}(\delta,\delta^2)}$

con $\underline{O_1A}(0) = a(\cos\theta_0\,\underline{i} + \sin\theta_0\,\underline{j})$; $\underline{O_1A}(\delta) = a\left(-\sin\theta_0\,\delta\,\underline{i} + \cos\theta_0\,\delta\,\underline{j}\right)$

$$\underline{O_1A}(\delta^2) = a\left(-\cos\theta_0\frac{\delta^2}{2}\,\underline{i} - \sin\theta_0\frac{\delta^2}{2}\,\underline{j}\right)$$

Termini quadratici debbono essere conservati nell'espressione dello spostam., poiché entreranno nella quota della energia pot. gravitazionale e forniranno termini lineari nella equazione del moto

Spostamento del punto D: sarà dato solo da $y_3 = \Delta \underline{OA}\cdot \underline{j} = a\cos\theta_0\,\delta - a\sin\theta_0\,\frac{\delta^2}{2}$

perché la rotazione del disco attorno a D filtra via la componente orizzontale.

Rotazione del disco (2): per il vincolo di RSS si ha $r\varphi = \Delta \underline{OA}\cdot \underline{i}$ ossia

$$r\varphi = -a\sin\theta_0\,\delta - a\cos\theta_0\,\frac{\delta^2}{2} \rightsquigarrow \varphi = -\frac{a}{r}\sin\theta_0\,\delta - \frac{a}{r}\cos\theta_0\,\delta^2$$

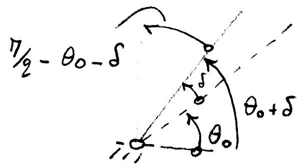
vediamo poi se ci è comodo mantenere termini quadratici o meno

Risolviamo il primo quesito, det. precarico delle molle di k_3.

Uso energia potenziale totale del sistema, con $U(\delta=0)=0$, scrivo $U(\delta)$

$$U(\delta) = (m_1+m_2+m_3)\,g\,\Delta\underline{OA}\cdot\underline{j} + \frac{1}{2}k_1\left[\Delta\underline{OA}\cdot\underline{i}\right]^2 + \frac{1}{2}k_2\left[\Delta\underline{OA}\cdot\underline{j}\right]^2 +$$

$$+ P_3\,\Delta\underline{OA}\cdot\underline{j} + \frac{1}{2}k_3\left[\Delta\underline{OA}\cdot\underline{j}\right]^2 + \frac{1}{2}k_t\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0-\delta\right)^2$$



N.B. In termini en. pot. gravitazionale e precarico P_3 spostam. non sono elev. al quadrato → ok termini quadratici in δ

In termini en. pot. elastico termini elev. al quadrato → ok solo parte lineare.

$$\Delta\underline{OA}\cdot\underline{j} = a\cos\theta_0\,\delta - a\sin\theta_0\,\frac{\delta^2}{2} \quad ; \quad \Delta\underline{OA}\cdot\underline{i} = -a\sin\theta_0\,\delta - a\cos\theta_0\,\frac{\delta^2}{2}$$

allora

$$U(\delta) = (m_1 g + m_2 g + m_3 g + P_3)\,a\left[\cos\theta_0\,\delta - \sin\theta_0\frac{\delta^2}{2}\right] + \frac{1}{2}(k_2+k_3)(a\cos\theta_0\,\delta)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}k_1(a\sin\theta_0\,\delta)^2 + \frac{1}{2}k_t\left(\pi/2 - \theta_0 - \delta\right)^2$$

Cerco equilibrio statico dove $\frac{dU(\delta)}{d\delta} = 0$ (da Lagrange $\cancel{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\delta}\right)} - \cancel{\frac{\partial T}{\partial\delta}} + \frac{\partial U}{\partial\delta} = 0$)

$$\frac{dU(\delta)}{d\delta} = \left[(m_1+m_2+m_3)g + P_3\right]a\left(\cos\theta_0 - \sin\theta_0\,\delta\right) + \frac{1}{\cancel{2}}(k_2+k_3)\,\cancel{2}\,a^2\cos^2\theta_0\,\delta +$$

$$+ \frac{1}{\cancel{2}}k_1\,\cancel{2}\,a^2\sin^2\theta_0\,\delta + \frac{1}{\cancel{2}}k_t(-\cancel{2})\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0-\delta\right) =$$

$$= \left[(m_1+m_2+m_3)g + P_3\right]a\left(\cos\theta_0 - \sin\theta_0\,\delta\right) + (k_2+k_3)\,a^2\cos^2\theta_0\,\delta +$$

$$+ k_1 a^2\sin^2\theta_0\,\delta - k_t\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0-\delta\right) = 0$$

Imponendo che $\left.\frac{dU(\delta)}{d\delta}\right|_{\delta=0} = 0$ (ossia $\theta=\theta_0$ è di equilibrio) allora

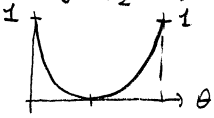
$$\left[(\quad)g + P_3\right]a\cos\theta_0 = k_t\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)$$

$$\Rightarrow \quad P_3 = \frac{k_t}{a\cos\theta_0}\left(\pi/2-\theta_0\right) - (m_1+m_2+m_3)\,g$$

precarico necessario

É equilibrio stabile? $\dfrac{d^2 U}{d\delta^2} > 0$?

$f(\theta) = 1 - (\operatorname{tg}\theta)\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$



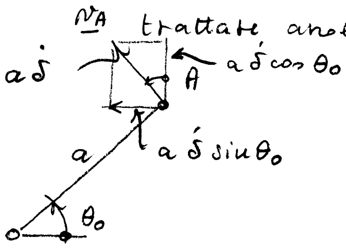
$$\frac{d^2 U}{d\delta^2} = \underbrace{\left(k_1 a^2 \sin^2\theta_0 + (k_2+k_3) a^2 \cos^2\theta_0\right)}_{\text{q.tà sempre } > 0} + k_t \underbrace{\left(1 - \operatorname{tg}\theta_0 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)\right)}_{\text{quantità } > 0}$$

dunque

$$\left.\frac{d^2 U(\delta)}{d\delta^2}\right|_{\delta=0} > 0 \rightarrow \underline{\text{equilibrio stabile}}$$

<u>Equazioni del moto del sistema</u> (alla Lagrange)

<u>Velocità</u> (linearizzate, ossia approx. al 1° ordine di Taylor, tanto appaiono al ^2 nella T: altrimenti consideriamo anche termini non lineari che non sappiamo trattare analiticamente)



$$\underline{v}_A = \underline{v}_B = \underline{v}_C = \underline{v}_G = -a\sin\theta_0\,\dot\delta\,\underline{i} + a\cos\theta_0\,\dot\delta\,\underline{j}$$

$$\underline{v}_D = (\underline{v}_C \cdot \underline{j})\,\underline{j} = a\cos\theta_0\,\dot\delta\,\underline{j} \quad ; \quad \underline{v}_D \cdot \underline{j} = \dot y_3$$

$$r\dot\varphi = -a\sin\theta_0\,\dot\delta \rightsquigarrow \dot\varphi = -\frac{a}{r}\sin\theta_0\,\dot\delta$$

Note le velocità interessanti f.ni solo di $\dot\delta$ allora scrivo energia cinetica $T(\dot\delta)$

$$T(\dot\delta) = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 (a\dot\delta)^2}_{m_1,\ tot} + \underbrace{\frac{1}{2}(m_2+m_3)(a\dot\delta\cos\theta_0)^2}_{m_2+m_3,\ trasl} + \underbrace{\frac{1}{2} J_2 \left(\frac{a}{r}\sin\theta_0\,\dot\delta\right)^2}_{m_2,\ rot} ; \quad \frac{\partial T}{\partial\delta} = 0 \text{ con velocità linearizz.}$$

$U(\delta)$ è quella vista prima

<u>Equazioni del moto</u> (coordinata Lagrangiana è δ)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot\delta}\right) + \frac{dU}{d\delta} = Q_\delta \quad ; \quad Q_\delta = M_2\underline{k} \cdot \frac{\partial \underline{\varepsilon}_2}{\partial\delta} \quad \text{con} \quad M_2 = M(t)$$

n.b. che da prima $\qquad \underline{\varepsilon}_2 = \varphi\underline{k}$

$$\varphi = -\frac{a}{r}\sin\theta_0\,\delta - \frac{a}{r}\cos\theta_0\,\delta^2$$

se prendo anche parte quadratica $\rightarrow \dfrac{\partial\underline{\varepsilon}_2}{\partial\delta} = \dfrac{\partial\varphi\underline{k}}{\partial\delta} = \left(-\dfrac{a}{r}\sin\theta_0 - 2\dfrac{a}{r}\cos\theta_0\,\delta\right)\underline{k}$

e $Q_\delta = M(t)\cdot\left(-\dfrac{a}{r}\sin\theta_0 - 2\dfrac{a}{r}\cos\theta_0\,\delta\right)$ non ci piace poiché NON LINEARE

solo parte lineare $\rightarrow \dfrac{\partial\underline{\varepsilon}_2}{\partial\delta} = \dfrac{\partial\varphi\underline{k}}{\partial\delta} = -\dfrac{a}{r}\sin\theta_0\,\underline{k}$

e $Q_\delta = M(t)\cdot\left(-\dfrac{a}{r}\sin\theta_0\right)$ che sappiamo trattare

Allora scrivendo le eq.ni del moto si ottiene:

$$m_1 a^2 \ddot{\delta} + (m_2+m_3)\, a^2 \cos^2\theta_0\, \ddot{\delta} + J_2 \left(\frac{a}{r}\sin\theta_0\right)^2 \ddot{\delta} +$$

$$+ \left[k_t + a^2\left((k_2+k_3)\cos^2\theta_0 + k_1 \sin^2\theta_0\right) - \frac{1}{2} k_t (\pi - 2\theta_0)\tan\theta_0\right]\delta = -\frac{a}{r}\sin\theta_0\, M(t)$$

Allora se definisco

$$J_{eq} = m_1 a^2 + (m_2+m_3)\, a^2\cos^2\theta_0 + J_2\left(\frac{a}{r}\sin\theta_0\right)^2 ;$$

$$k_{eq} = k_t + a^2\left((k_2+k_3)\cos^2\theta_0 + k_1\sin^2\theta_0\right) - \frac{1}{2}k_t(\pi-2\theta_0)\tan\theta_0$$

$$M_{eq}(t) = -\frac{a}{r}\sin\theta_0\, M(t) = \underbrace{-\frac{a}{r}\sin\theta_0\, M_0}_{\overline{M_{eq}}}\sin(\Omega t) = \overline{M_{eq}}\sin(\Omega t)$$

ottengo una eq.ne del tipo:

$$J_{eq}\ddot{\delta} + k_{eq}\delta = \overline{M_{eq}}\sin(\Omega t)$$

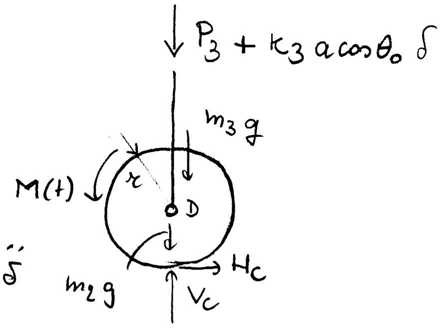
Allora la soluzione è del tipo:

$$\delta(t) = \bar{\delta}\sin(\Omega t - \psi)$$

con:

- $\bar{\delta} = \left|\dfrac{\overline{M_{eq}}}{(k_{eq} - \Omega^2 J_{eq})}\right|$
- $\psi = 0, \quad \Omega < \omega_n = \left[\dfrac{k_{eq}}{J_{eq}}\right]^{1/2}$
- $\psi = \pi, \quad \Omega > \omega_n$

<u>Calcolo della forza di contatto in C</u>



Guardo l'equilibrio verticale di sottosistema ② + ③ (dinamico)

$$V_c(t) - \left(P_3 + k_3 a\cos\theta_0\,\delta - (m_2+m_3)g\right) = (m_2+m_3)\, a\cos\theta_0\,\ddot{\delta}$$

↳ da cui ho una $V_c(t)$

Guardo eq. alla rotazione di ② attorno a punto D

$$H_c(t)\cdot r + M(t) = J_2\ddot{\varphi} \qquad \text{con } \ddot{\varphi} \simeq -\frac{a}{r}\sin\theta_0\,\ddot{\delta}$$

con $\delta(t)$ nota una volta risolta din. del sistema

<u>Per avere contatto fra ① e ②</u> <u>occorrerà che $V_c(t) > 0$</u>,

$V_c = 0$ al limite del distacco. Se $V_c|_{min} > 0$ allora non si avrà distacco ed il sistema funzionerà come lo abbiamo modellato.

Per non avere slittamento fra 1 e 2 occorrerà che non si superi mai il limite di aderenza.

Se definisco $f_{rich} = \dfrac{|H_c(t)|}{V_c(t)}$ allora $f_{rich} \leq f_{rich}$

A questo punto si tratta di inserire la soluzione $\delta(t)$ trovata e fare le verifiche.