Meccanica dei Robot

Docente: Ing. Marco Gabiccini (Dimnp)

Ricevimento: Giovedì pomeriggio 15 - 17.30, Dimnp, V piano

tel. ufficio 050 - 221.80.77 ; email: m.gabiccini@ing.unipi.it

Contenuti del corso:

- analisi di posizione ed orientazione (anche detta postura o posa): esprimere rotazioni 3D generiche e rototraslazioni di corpo rigido nello spazio, parametrizzazione di rotazioni, trasf. omogenee, convenzione di Denavit-Hartenberg, cinematica diretta ed inversa
- cinematica (differenziale): da conoscenze di meccanica (pre-requisiti) m. ff. cinematica, teo. Rivals, teorema di composizione $\underline{v}$ (veloc.) ed $\underline{a}$ (acceleraz.) estendiamo al caso generale usando un formalismo adeguato.
- statica: pre-requisiti di meccanica (eq. sistemi di corpi rigidi) con equazioni cardinali, principio dei lavori virtuali per arrivare a formulazioni compatte e sistematiche.
- dinamica: da equazioni di Newton - Eulero, Eulero - Lagrange (ossia da principio dei Lavori Virtuali Dinamico). Forme tipiche della dinamica di catene cinematiche seriali $B\ddot{q} + C\dot{q} + G = \tau$. Equazioni di sistemi con vincoli (ovvero catene cinematiche chiuse) e varie tecniche per la loro trattazione.

Alla fine del corso lo studente sarà in grado di modellare le equazioni che regolano la dinamica e saperle attaccare con tecniche di integrazione numerica) qualsiasi tipo di robot, nella sua accezione più ampia (veicoli su ruote, veicoli su gambe, velivoli, satelliti, robot seriali, paralleli, mani robotiche etc.)

Testi di riferimento:

- B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo "Robotica: modellistica, pianificaz. e controllo" 3a ed. McGraw-H. 2008
- Spong, Hutchinson, Vidyasagar "Robot Modeling and Control" Wiley
- Murray, Li, Sastry "A Mathematical Intro. to Robotic Manipulation", CRC press

•) J. Angeles "Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: theory, methods and algorithms", Springer, 2a edizione

•) Lung-Wen Tsai "Robot Analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators", Wiley-Interscience.

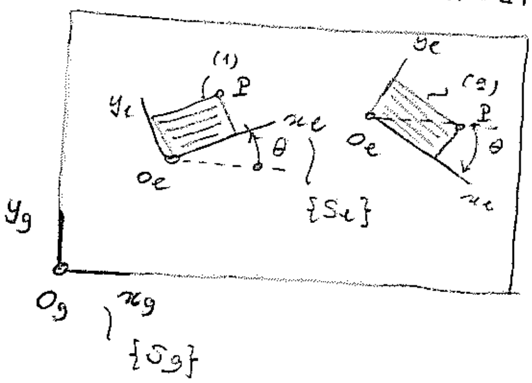
– Studio della postura di un corpo rigido –

Gradi di libertà: no. di movimenti – rotazioni e/o traslazioni – che il corpo rigido può compiere (corpo rigido = c.r.) = no di informazioni da dare per individuarne univocamente la postura

•) nel 2D: devo dare posizione di un punto (x, y) ed una rotazione θ rispetto ad una direzione nota

•) nel 3D: devo dare posizione di un punto (x, y, z) e tre angoli (es. angoli di Eulero $[\varphi, \theta, \psi]$ vedremo meglio in seguito)

Es. libro sulla cattedra



Procedura

1) Si definisce un sistema di rif globale $\{S_g\} = \{O_g ; x_g, y_g, z_g\}$ (fisso)

2) " " di rif locale $\{S_e\} = \{O_e ; x_e, y_e, z_e\}$ (solidale al corpo)

nota bene: dato che il corpo è RIGIDO, in questo sistema di riferimento le componenti sono costanti.

Prima questione: se conosco le coordinate di un punto P in $\{S_e\}$, quali coordinate vede un osservatore in $\{S_g\}$?

Ovvia se conosco (es. nel 2D) la $p_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix}$ come calcolo $p_g = \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \end{bmatrix}$?

Occorre quindi definire una trasformazione di coordinate

Facciamo quindi caso 2D con sola rotazione, poi estendiamo anche al 3D ed a traslazioni.

Fissiamo la notazione: P è un punto (generico)

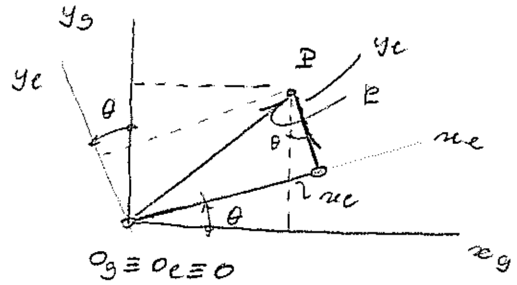
$O \equiv O_g \equiv O_e$ origini dei sistemi di riferimento (punti)

$OP = P - O \triangleq \underline{p}$ (uguale x definizione, anche

$\underline{p} := OP = P - O$

Questo $\underline{p}$ è vettore posizione del punto $\underline{P}$.

Es. sulla rotazione 2D



Definisco una sorta di "operatore" $[\circ]_j$ che estrae le componenti di un vettore preso in ingresso nel sistema di riferimento $\{S_j\}$.
Questo operatore può anche essere "sovraccaricato" (overloaded) e prendere in ingresso punti e restituire le loro coordinate

$[\underline{p}]_g$ = comp di $\underline{p}$ in $\{S_g\}$

$[\underline{P}]_g$ = coordinate di $\underline{P}$ in $\{S_g\}$

Nota bene che fra punti e vettori si scrive

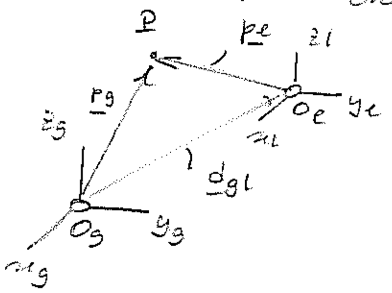
$\underline{P} = O + \underline{p}$ (deriva dalla definizione $\underline{p} := OP = P - O$)

Se applico l'operatore $[\cdot]_g$ ottengo:

$[P]_g = [O]_g + [\underline{p}]_g$ ma $O \equiv O_g$ ed $[O_g]_g = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ da cui

$\boxed{[P]_g = [\underline{p}]_g}$ quindi se $\underline{p}$ è spiccato dall'origine di $\{S_g\}$ le coord del punto $\underline{P}$ sono uguali alle compon. del vettore

Attenzione però che se ho shift (spostamento) dell'origine allora



fra punti posso scrivere:

$\underline{P} = O_g + \underline{p_g}$ o anche $\underline{P} = O_l + \underline{p_l}$

prendo le compon. in $\{S_g\}$

consideriamo che $\{S_l\}$ e $\{S_g\}$ siano paralleli

$[P]_g = \underset{=0}{[O_g]_g} + [\underline{p_g}]_g$ $\qquad [P]_g = [O_l]_g + [\underline{p_l}]_g$

$[P]_g = [\underline{p_g}]_g$

Dunque in generale le coordinate del punto sono diverse dalle componenti del vettore posizione. Sono uguali s.e.s. se ci si appoggia a punto che è origine del sistema di riferimento in cui si prendono coordinate/componenti

dalle (2) togliendo O_g:

$$\underbrace{P - O_g}_{\underline{p_g}} = \underbrace{O_l - O_g}_{\underline{d_{gl}}} + \underbrace{\underline{p_l}}_{\underline{p_l}}$$

anche relazione tutta fra vettori, ora differenze fra punti

Da analisi della figura p. 3 in alto $\quad P = \underline{p} + O_g \qquad O_g \equiv O_e \equiv O$

$[\underline{p}]_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix} \quad ; \quad [\underline{p}]_g = \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \end{bmatrix}$

$$x_g = x_e \cos\theta - y_e \sin\theta$$
$$y_g = x_e \sin\theta + y_e \cos\theta \iff \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta \\ s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix}$$

ossia

$$[\underline{p}]_g = R_{ge} [\underline{p}]_e$$ con, in questo caso, $R_{ge} = R_{2D}(\theta) := \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta \\ s\theta & c\theta \end{bmatrix}$

Quindi adesso abbiamo considerato come uno stesso vettore abbia componenti diverse in differenti sistemi di riferimento.

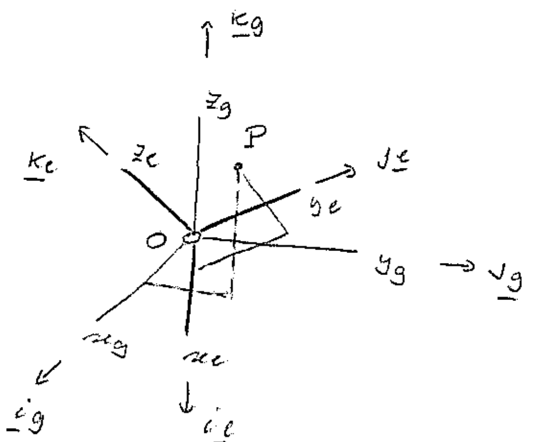
<u>Adesso consideriamo il caso di rotazione 3D generale</u>

- prendiamo un punto P nello spazio Euclideo $\mathbb{E}^3$;
- scelto un punto O, definiamo un vettore $\underline{p} \triangleq P - O$;
- introduciamo 2 frame (sistemi di riferimento) ortogonali di origine comune $O_g \equiv O_e \equiv O$ con $\{S_g\} = \{O; x_g, y_g, z_g\}$ e $\{S_e\} = \{O; x_e, y_e, z_e\}$. I due sistemi di riferimento hanno versori $\{\underline{i}_g, \underline{j}_g, \underline{k}_g\}$ e $\{\underline{i}_e, \underline{j}_e, \underline{k}_e\}$.

Posso scrivere che:

$$\underline{p} = x_g \underline{i}_g + y_g \underline{j}_g + z_g \underline{k}_g = x_e \underline{i}_e + y_e \underline{j}_e + z_e \underline{k}_e \quad (1)$$

nota bene che tutto deve cambiare (componenti e versori) perché tutto rimanga uguale



Troviamo la trasformazione che lega le componenti $[\underline{p}]_g$ alle componenti $[\underline{p}]_e$

ricordiamoci che $\underline{a} \cdot \underline{b} = \|\underline{a}\| \|\underline{b}\| \cos\theta$ dunque $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ se $\theta = \pi/2$

Ricordiamoci inoltre che le terne $\{S_g\}$ e $\{S_e\}$ sono ortogonali, ossia

$$\underline{i}_g \cdot \underline{j}_g = \underline{j}_g \cdot \underline{k}_g = \underline{k}_g \cdot \underline{i}_g = 0 \quad e \quad \underline{i}_g \cdot \underline{i}_g = \underline{j}_g \cdot \underline{j}_g = \underline{k}_g \cdot \underline{k}_g = 1$$

Allora moltiplicando scalarmente (1) per $\underline{i}_g$, $\underline{j}_g$ e $\underline{k}_g$ si ha

$$\underline{p}\cdot\underline{i}_g = x_g = \underline{i}_g\cdot\underline{i}_e\, x_e + \underline{i}_g\cdot\underline{j}_e\, y_e + \underline{i}_g\cdot\underline{k}_e\, z_e$$

$$\underline{p}\cdot\underline{j}_g = y_g = \underline{j}_g\cdot\underline{i}_e\, x_e + \underline{j}_g\cdot\underline{j}_e\, y_e + \underline{j}_g\cdot\underline{k}_e\, z_e$$

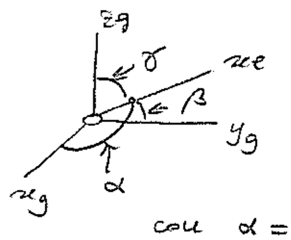
$$\underline{p}\cdot\underline{k}_g = z_g = \underline{k}_g\cdot\underline{i}_e\, x_e + \underline{k}_g\cdot\underline{j}_e\, y_e + \underline{k}_g\cdot\underline{k}_e\, z_e$$

da cui in base alle def.ne

$$[\underline{p}]_g = \left[\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix}\underline{i}_g\cdot\underline{i}_e\\ \underline{j}_g\cdot\underline{i}_e\\ \underline{k}_g\cdot\underline{i}_e\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\underline{i}_g\cdot\underline{j}_e\\ \underline{j}_g\cdot\underline{j}_e\\ \underline{k}_g\cdot\underline{j}_e\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\underline{i}_g\cdot\underline{k}_e\\ \underline{j}_g\cdot\underline{k}_e\\ \underline{k}_g\cdot\underline{k}_e\end{bmatrix}\end{array}\right][\underline{p}]_e$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{compon. di } \underline{i}_e \text{ in } \{S_g\} & \text{comp. di } \underline{j}_e \text{ in } \{S_g\} & \text{comp. di } \underline{k}_e \text{ in } \{S_g\} \end{array}$$

come coseni direttori



con $\alpha = x_g \hat{\ } x_e$

$\beta = y_g \hat{\ } x_e$

$\gamma = z_g \hat{\ } x_e$

ossia anche

$$\begin{bmatrix} \cos(x_g \hat{\ } x_e) & \cos(x_g \hat{\ } y_e) & \cos(x_g \hat{\ } z_e) \\ \cos(y_g \hat{\ } x_e) & \cos(y_g \hat{\ } y_e) & \cos(y_g \hat{\ } z_e) \\ \cos(z_g \hat{\ } x_e) & \cos(z_g \hat{\ } y_e) & \cos(z_g \hat{\ } z_e) \end{bmatrix}$$

Per lavorare in modo compatto posso definire:

$\underset{\sim}{e} = [\underline{i}\ \ \underline{j}\ \ \underline{k}]$ come le base in forma "invariante" ed in partic.

$\underset{\sim}{e}_g = [\underline{i}_g\ \ \underline{j}_g\ \ \underline{k}_g]$ di $\{S_g\}$

$\underset{\sim}{e}_e = [\underline{i}_e\ \ \underline{j}_e\ \ \underline{k}_e]$ di $\{S_e\}$

cosicché posso scrivere la (1) in modo compatto come

$$\underline{p} = \underset{\sim}{e}_g\,[\underline{p}]_g = \underset{\sim}{e}_e\,[\underline{p}]_e \qquad (2)$$

Se premoltiplico per $\underset{\sim}{e}_g^T$ entrambi i membri della eq.ne (2) si ha:

$$\underset{\sim}{e}_g^T\,\underset{\sim}{e}_g\,[\underline{p}]_g = \underset{\sim}{e}_g^T\,\underset{\sim}{e}_e\,[\underline{p}]_e$$

cosa sono?

$$\underset{\sim}{e}_g^T = \begin{bmatrix}\underline{i}_g^T\\ \underline{j}_g^T\\ \underline{k}_g^T\end{bmatrix}[\underline{i}_g\ \ \underline{j}_g\ \ \underline{k}_g] = \begin{bmatrix} \underline{i}_g^T\underline{i}_g & \underline{i}_g^T\underline{j}_g & \underline{i}_g^T\underline{k}_g \\ \underline{j}_g^T\underline{i}_g & \underline{j}_g^T\underline{j}_g & \underline{j}_g^T\underline{k}_g \\ \underline{k}_g^T\underline{i}_g & \underline{k}_g^T\underline{j}_g & \underline{k}_g^T\underline{k}_g \end{bmatrix} = I \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

L'altra invece risulta essere:

$$\underset{\sim}{e}_g^T \, \underset{\sim}{e}_e = \begin{bmatrix} \underline{i}_g^T \\ \underline{j}_g^T \\ \underline{k}_g^T \end{bmatrix} [\underline{i}_e \;\; \underline{j}_e \;\; \underline{k}_e] = \begin{bmatrix} \underline{i}_g^T \underline{i}_e & \underline{i}_g^T \underline{j}_e & \underline{i}_g^T \underline{k}_e \\ \underline{j}_g^T \underline{i}_e & \underline{j}_g^T \underline{j}_e & \underline{j}_g^T \underline{k}_e \\ \underline{k}_g^T \underline{i}_e & \underline{k}_g^T \underline{j}_e & \underline{k}_g^T \underline{k}_e \end{bmatrix} =: R_{ge}$$

ossia $\underset{\sim}{e}_g^T \, \underset{\sim}{e}_e =: R_{ge}$ è la proiezione della base $\underset{\sim}{e}_e$ sulla base $\underset{\sim}{e}_g$.

Quindi quello che si ha è:

$$\boxed{[\underline{p}]_g = \underset{\sim}{e}_g^T \, \underset{\sim}{e}_e [\underline{p}]_e = R_{ge} [\underline{p}]_e}$$

Attenzione che se invece proiettavo $\underset{\sim}{e}_g$ su $\underset{\sim}{e}_e$ avrei ottenuto

$$\boxed{[\underline{p}]_e = \underset{\sim}{e}_e^T \, \underset{\sim}{e}_g [\underline{p}]_g = R_{eg} [\underline{p}]_g}$$

dove

$$\underset{\sim}{e}_e^T \, \underset{\sim}{e}_g = \begin{bmatrix} \underline{i}_e^T \\ \underline{j}_e^T \\ \underline{k}_e^T \end{bmatrix} [\underline{i}_g \;\; \underline{j}_g \;\; \underline{k}_g] = \begin{bmatrix} \underline{i}_e^T \underline{i}_g & \underline{i}_e^T \underline{j}_g & \underline{i}_e^T \underline{k}_g \\ \underline{j}_e^T \underline{i}_g & \underline{j}_e^T \underline{j}_g & \underline{j}_e^T \underline{k}_g \\ \underline{k}_e^T \underline{i}_g & \underline{k}_e^T \underline{j}_g & \underline{k}_e^T \underline{k}_g \end{bmatrix} = R_{eg}$$

è evidente che $R_{eg} = R_{ge}^{-1} = R_{ge}^T$

Osservazioni:

1) Dato che $R_{eg} = R_{ge}^{-1} = R_{ge}^T$, ossia $R^{-1} = R^T$, ciò significa che la matrice R è una matrice ortogonale $RR^T = R^TR = I$ (attenzione che non tutte le matrici ortogonali sono rotazioni, anche le riflessioni sono ortogonali)

2) La matrice $R_{ge} = \overbrace{[\,[\underline{i}_e]_g \;\; [\underline{j}_e]_g \;\; [\underline{k}_e]_g\,]}^{\text{colonne}}$

3) La condizione (ulteriore) da richiedere perché la terna sia levogira è che $\underline{i}_e \times \underline{j}_e = \underline{k}_e$

che in componenti risulta

$[\underline{i}_e]_g \times [\underline{j}_e]_g = [\underline{k}_e]_g$ — se adesso moltiplico scalarmente per $[\underline{k}_e]_g$ si ha

$$([\underline{i}_e]_g \times [\underline{j}_e]_g) \cdot [\underline{k}_e]_g = [\underline{k}_e]_g \cdot [\underline{k}_e]_g = 1$$

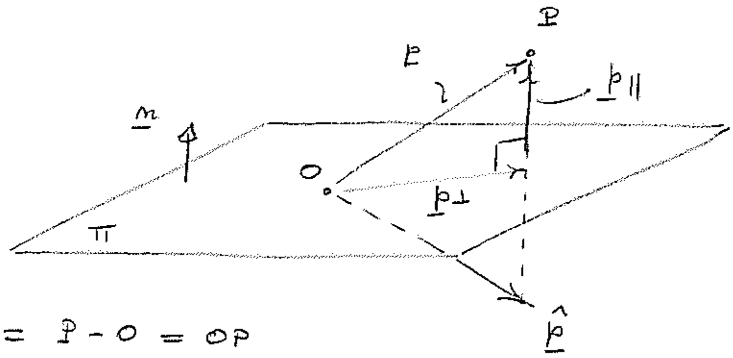
ma questo prodotto misto $\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c} = \det([\underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c}])$ è equiv. allo sviluppo del determinante della matrice che ha come colonne $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$

Allore la ulteriore condizione è che

$$([\underline{i}e]_g \times [\underline{j}e]_g) \circ [\underline{k}e]_g = \det(R_{ge}) = 1$$

Quindi la ulteriore condizione che $\det(R) = 1$ è quella che discrimina le sole rotazioni.

5. excursus sulle riflessioni



Consideriamo vettore $\underline{p} := P - O = OP$

versore $\underline{n}$ è normale al piano π

Decomposizione: $\underline{p} = \underline{p}_{\parallel} + \underline{p}_{\perp}$ con $\underline{p}_{\parallel}$ parallelo ad $\underline{n}$

$\underline{p}_{\perp}$ perpend ad $\underline{n}$ (ossia sul piano)

∘) $\underline{p}_{\parallel} = (\underline{p} \cdot \underline{n})\,\underline{n} =$

$= \underline{n}\,(\underline{n}^T \underline{p}) = (\underline{n}\,\underline{n}^T)\,\underline{p}$

∘) $\underline{p}_{\perp} = \underline{p} - \underline{p}_{\parallel} = (I - \underline{n}\,\underline{n}^T)\,\underline{p}$

il $\hat{\underline{p}}$ (riflesso) $= \underline{p}_{\perp} - \underline{p}_{\parallel} = (I - 2\,\underline{n}\,\underline{n}^T)\,\underline{p}$

Allora la matrice di riflessione H è data da

$H = (I - 2\,\underline{n}\,\underline{n}^T)$ n.b. che $H = H^T$

Anche H è ortogonale $H^{-1} = \underset{\underset{H}{\shortparallel}}{H^T}$ (se ci si riflette 2 volte si torna identici)

Verifica che $H^{-1} = H$ ossia che $H^{-1} H = H H = I$

Allora:

$$(I - 2\,\underline{n}\,\underline{n}^T)(I - 2\,\underline{n}\,\underline{n}^T) = I - 4\,\underline{n}\,\underline{n}^T + 4\,(\underline{n}\,\underline{n}^T)^2$$

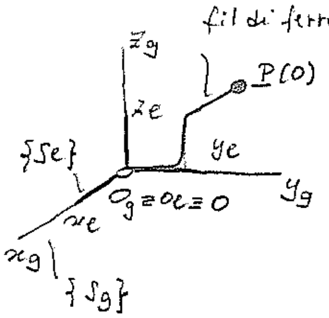
ma $\underline{n}\,\underline{n}^T$ è idempotente ossia $\underline{n}\,\underline{n}^T = (\underline{n}\,\underline{n}^T)^k$, $k \in \mathbb{N}$

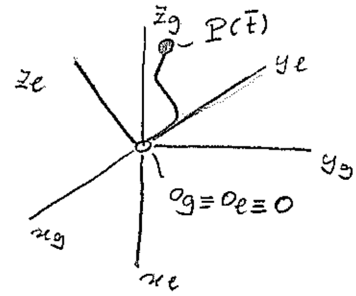
$= I \cancel{- 4\,\underline{n}\,\underline{n}^T} \cancel{+ 4\,\underline{n}\,\underline{n}^T} = I$ c.v.d.

Passaggio anche così $(\underline{n}\,\underline{n}^T)(\underline{n}\,\underline{n}^T) = \underline{n}\,\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{(\underline{n}^T\underline{n})}\,\underline{n}^T = \underline{n}\,\underline{n}^T$ ok

Guardiamo adesso alla matrice di rotazione come ad un modo per esprimere una rotazione rigida

fil di ferro collegato ad $\{Se\}$





a $t=0$: $\{Se(0)\} \equiv \{S_g\}$

$P \in \{Se\}$ (sempre)

$[OP(0)]_g = [OP(0)]_{e(0)}$

a $t = \bar{t}$ $\{Se(\bar{t})\} \neq \{S_g\}$

$P \in \{Se\}$ naturalmente

$OP(0)$ vettore iniziale

$OP(\bar{t})$ vettore finale (ruotato)

Ci chiediamo: che relazione c'è fra le componenti, sempre nello stesso $\{S_g\}$, di $OP(0)$ ed $OP(\bar{t})$?

Definisco $\underline{p} := OP$, da cui $\underline{p}(0) = OP(0)$, $\underline{p}(\bar{t}) = OP(\bar{t})$

Che relazione c'è fra $[\underline{p}(0)]_g$ e $[\underline{p}(\bar{t})]_g$?

Dato che $P \in \{Se\}$ allora $[\underline{p}(0)]_g = [\underline{p}(0)]_{e(0)} = [\underline{p}(t)]_{e(t)}$ $\forall t$ allora

(1) $\underline{p}(\bar{t}) = \underset{\sim}{e}_e(\bar{t}) [\underline{p}(\bar{t})]_{e(\bar{t})} = \underset{\sim}{e}_e(\bar{t}) [\underline{p}(0)]_g$ vers. e componenti in $\{Se(\bar{t})\}$

ma potrò esprimerlo anche con base + componenti in $\{S_g\}$, ossia

(2) $\underline{p}(\bar{t}) = \underset{\sim}{e}_g [\underline{p}(\bar{t})]_g$

Eguagliando (1) a (2) si ottiene:

$$\underset{\sim}{e}_e(\bar{t}) [\underline{p}(0)]_g = \underset{\sim}{e}_g [\underline{p}(\bar{t})]_g \quad , \text{ premoltipl. scalarmente per } \underset{\sim}{e}_g^T$$

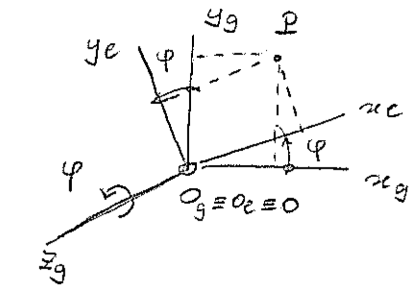
$$[\underline{p}(\bar{t})]_g = \underset{\sim}{e}_g^T \underset{\sim}{e}_e(\bar{t}) [\underline{p}(0)]_g =: R_{ge}(\bar{t}) [\underline{p}(0)]_g$$

dove ci si è ricondotti alla $R_{ge} := \underset{\sim}{e}_g^T \underset{\sim}{e}_e$

Dunque si è ottenuto el importante risultato che la matrice R_{ge} non gioca solo il ruolo di <u>matrice del cambiamento di coordinate</u> da $\{Se(\bar{t})\}$ a $\{S_g\}$, ma anche il ruolo di matrice che ci dice come una rotazione da una configurazione $\{S_g\}$ (iniziale) ad una configurazione $\{S_e(\bar{t})\}$ (finale) cambia le componenti del vettore che viene ruotato n.b. nello stesso sistema di riferimento di partenza $\{S_g\}$.

Dunque come

CAMBIAMENTO DI COORDINATE

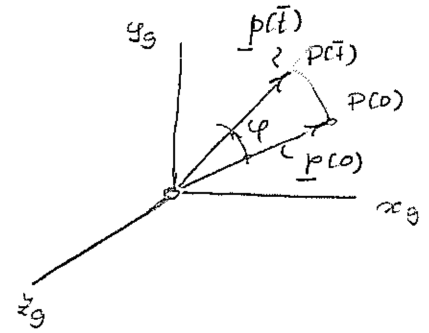


$$[\underline{P}]_g = R_{ge}(\varphi)[\underline{p}]_e$$

con $R_{ge}(\varphi) = R_z(\varphi)$

come

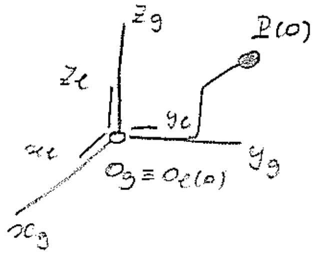
ROTAZIONE RIGIDA



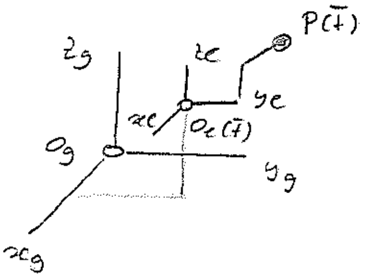
$$[\underline{p}(\bar{t})]_g = R_{ge}(\bar{t})\,[\underline{p}(0)]_g$$

In questo caso il sistema di riferimento locale serve solo per "esprimere" la rotazione che porta il vettore dalla config. iniziale a quella finale. Le componenti sono espresse nello stesso $\{S_g\}$ di partenza.

Solo shift origine come spostamento rigido



trasl. rigida $\longrightarrow$



$t = 0$: $O_e(0) \equiv O_g$

$\underset{\sim}{e}_e(0) = \underset{\sim}{e}_g$

$P \in \{S_e\}$

$t = \bar{t}$: $O_e(\bar{t}) \neq O_g$

$\underset{\sim}{e}_e(\bar{t}) = \underset{\sim}{e}_g$ (non ruota)

$P \in \{S_e\}$

Che relazione c'è fra le componenti, sempre in $\{S_g\}$, di $O_gP(0)$ e $O_gP(\bar{t})$?

Si definisce $O_gP(0) = \underline{p}_g(0)$; $O_gP(\bar{t}) = \underline{p}_g(\bar{t})$

Nella config. finale :
$$\underset{\underline{p}_g(\bar{t})}{\underset{\parallel}{O_gP(\bar{t})}} = \underset{d_{ge}(\bar{t})}{\underset{\parallel}{O_gO_e(\bar{t})}} + O_e(\bar{t})P(\bar{t}) = O_gO_e(\bar{t}) + O_gP(0)$$

$$\underline{p}_g(\bar{t}) \quad d_{ge}(\bar{t}) + \underline{p}_e(\bar{t}) = d_{ge}(\bar{t}) + \underline{p}_g(0)$$

da cui evidentemente

$$\underline{p}_g(\bar{t}) = d_{ge}(\bar{t}) + \underline{p}_g(0)$$

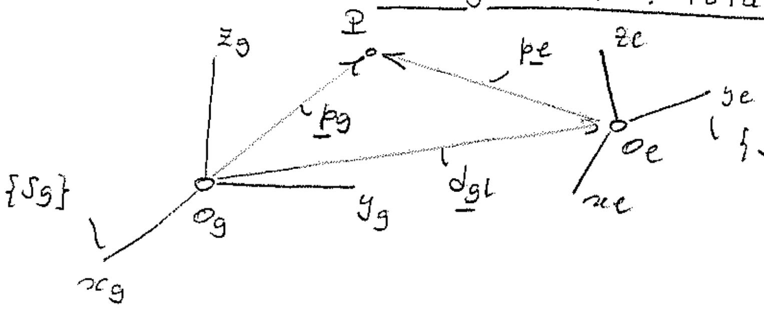
se quindi ne prendo le componenti in $\{S_g\}$ si ha:

$$[\underline{p}_g(\bar{t})]_g = [\underline{d}_{gl}(\bar{t})]_g + [\underline{p}_g(0)]_g$$

ovvia

$$\begin{bmatrix} x_g(\bar{t}) \\ y_g(\bar{t}) \\ z_g(\bar{t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{gl\,x}(\bar{t}) \\ d_{gl\,y}(\bar{t}) \\ d_{gl\,z}(\bar{t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_g(0) \\ y_g(0) \\ z_g(0) \end{bmatrix}$$

Caso generale : rotazione e shift dell'origine



relazione fra vettori in forma "invariante"

$$O_gP = O_gO_e + O_eP$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\underline{p}_g \qquad \underline{d}_{gl} \qquad \underline{p}_e$$

$$\underline{p}_g = \underline{d}_{gl} + \underline{p}_e$$

se ne prendo le componenti in $\{S_g\}$ mediante l'operatore $[\,\circ\,]_g$

$$\underbrace{[\underline{p}_g]_g}_{\text{comodo}} = \underbrace{[\underline{d}_{gl}]_g}_{\text{comodo}} + \underbrace{[\underline{p}_e]_g}_{\text{scomodo}}$$

scomodo → si può usare relazione viste verse shift origine da cui

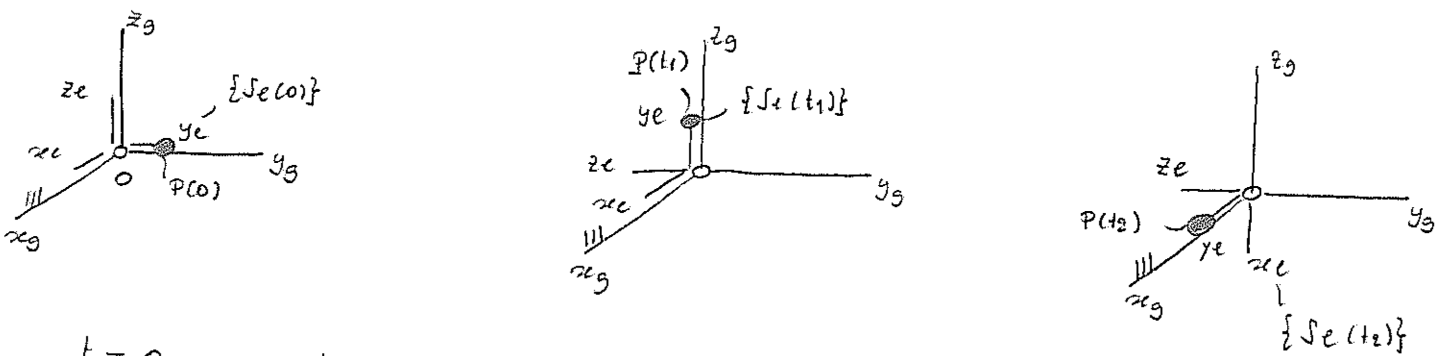
$$[\underline{p}_e]_g = R_{ge}\,[\underline{p}_e]_e$$

ottenendo infine:

$$[\underline{p}_g]_g = [\underline{d}_{gl}]_g + R_{gl}\,[\underline{p}_e]_e$$

relazione di trasformazione per le componenti di vettori posizione fra 2 sistemi di riferimento in config. generica

Composizione di rotazioni in assi fissi



$t = 0 \longrightarrow$ ruoto attorno a x_g di $\pi/2$ $\longrightarrow t = t_1 \longrightarrow$ ruoto a y_g di $\pi/2$ $\longrightarrow t = t_2$

come visto prima $OP(t) = \underline{p}(t)$

Effettuo la composizione di rotazioni in assi fissi

1ª rotazione $\quad [\underline{p}(t_1)]_g = [R_{e(0)e(t_1)}]_g [\underline{p}(0)]_g$;

2ª rotazione $\quad [\underline{p}(t_2)]_g = [R_{e(t_1)e(t_2)}]_g [\underline{p}(t_1)]_g$;

Dunque come unica trasformazione si ha:

$$[\underline{p}(t_2)]_g = \overset{\xleftarrow{\text{verso di composizione}}}{[R_{e(t_1)e(t_2)}]_g [R_{e(0)e(t_1)}]_g} [\underline{p}(0)]_g ;$$

↑ questa per seconda — ↑ questa è avvenuta per prima

attenzione che queste hanno tutte pedice "g" quindi sono tutte definite in assi fissi, ossia in $\{S_g\}$.

Quindi, se espresse in assi fissi, le rotazioni si "assemblano" da destra verso sinistra: man mano che si fanno rotazioni successive le si aggiungono a premoltiplicare, ossia a sinistra.

Nel caso di figura ad esempio

$$[R_{e(0)e(t_1)}]_g = R_x(\pi/2)$$

$$[R_{e(t_1)e(t_2)}]_g = R_y(\pi/2)$$

Ed in definitiva si ha

$$[\underline{p}(t_2)]_g = R_y(\pi/2)\, R_x(\pi/2)\, [\underline{p}(0)]_g$$

Composizione di rotazioni in assi locali (o mobili)

(facciamo ancora riferimento allo schema precedente)

Effettuo rotazioni in assi locali (o mobili, o correnti) ossia quelli sempre più aggiornati fino all'operazione in esame

1ª rotazione $[\underline{p}(t_1)]_g = [R_{e(0)e(t_1)}]_g [\underline{p}(0)]_g = [R_{e(0)e(t_1)}]_{e(0)} [\underline{p}(0)]_{e(0)}$

questo poiché $\{S_{e(0)}\} = \{S_g\}$ ed anche $[\underline{p}(0)]_g = [\underline{p}(0)]_{e(0)}$

Adesso la seconda rotazione voglio esprimerla in $\{S_{e(t_1)}\}$, ossia nel frame locale

Effettuo questa procedura:

a. cambio coordinate $[\underline{p}(t_1)]_{e(t_1)} = [R_{e(t_1)g}]_{e(t_1)} [\underline{p}(t_1)]_g$

b. scrivo la rotazione in coordinate $\{S_{e(t_1)}\}$, ossia:

$$[\underline{p}(t_2)]_{e(t_1)} = [R_{e(t_1)e(t_2)}]_{e(t_1)} [\underline{p}(t_1)]_{e(t_1)}$$

c. riporto le componenti di $\underline{p}(t_2)$ nel sistema di riferimento globale $\{S_g\}$

$$[\underline{p}(t_2)]_g = [R_{g\,e(t_1)}]_g [\underline{p}(t_2)]_{e(t_1)}$$

$$\Rightarrow \text{da b.} = [R_{g\,e(t_1)}]_g [R_{e(t_1)e(t_2)}]_{e(t_1)} [\underline{p}(t_1)]_{e(t_1)}$$

$$\Rightarrow \text{da c.} = [R_{g\,e(t_1)}]_g [R_{e(t_1)e(t_2)}]_{e(t_1)} [R_{e(t_1)g}]_{e(t_1)} [\underline{p}(t_1)]_g$$

$$\Rightarrow \text{da 1ª rot.} = [R_{g\,e(t_1)}]_g [R_{e(t_1)e(t_2)}]_{e(t_1)} [R_{e(t_1)g}]_{e(t_1)} [R_{e(0)e(t_1)}]_g [\underline{p}(0)]_g$$

Snellendo le espressioni $e(0) = g$; $e(t_1) = e_1$; $e(t_2) = e_2$

$$[\underline{p}(t_2)]_g = [R_{g e_1}]_g [R_{e_1 e_2}]_{e_1} \underbrace{[R_{e_1 g}]_{e_1} [R_{g e_1}]_g}_{I} [\underline{p}(0)]_g$$

ossia

$$[\underline{p}(t_2)]_g = \underbrace{[R_{g e_1}]_g}_{\text{avvenute per } 1^a} \underbrace{[R_{e_1 e_2}]_{e_1}}_{\text{avvenute per } 2^a} [\underline{p}(0)]_g$$

Le matrici associate a rotazioni successive espresse in frame locali si compongono per post moltiplicazione, ossia da sinistra a destra.

Riferendoci sempre alle fig. di pag. 11, in frame locale

$$[R_{g\ell_1}]_g = R_x(\pi/2)$$

$$[R_{\ell_1\ell_2}]_{\ell_1} = R_z(-\pi/2)$$

da cui

$$[p(t_2)]_g = R_x(\pi/2)\, R_z(-\pi/2)\, [p(0)]_g$$

Nota bene che dalle relazioni precedenti si evince che

$$[R_{g\ell_1}]_g\, [R_{\ell_1\ell_2}]_{\ell_1}\, \overbrace{[R_{\ell_1 g}]_{\ell_1}}^{=[R_{g\ell_1}]_g^T} = [R_{\ell_1\ell_2}]_g$$

che mi fornisce la legge di trasformazione (x congruenza) di una matrice ortogonale di rotazione

In generale si ha che

$$[R_{\ell_1\ell_2}]_i = [R_{ij}]_i\, [R_{\ell_1\ell_2}]_j\, [R_{ij}]_i^T$$

forma della $R_{\ell_1\ell_2}$ in $\{S_i\}$

mat. del pass. di coords da $\{S_j\}$ a $\{S_i\}$

forma di $R_{\ell_1\ell_2}$ in $\{S_j\}$

trasposta della $[R_{ij}]_i$

Schematicamente:

$$\begin{tikzcd}
\{S_i\} \arrow[d, shift right, "R_{ji}"'] & \{S_i\} \arrow[l, "{[R_{\ell_1\ell_2}]_i}"'] \arrow[d, shift right, "R_{ji}^T"'] \\
\{S_j\} \arrow[u, shift right, "R_{ij}"'] & \{S_j\} \arrow[l, "{[R_{\ell_1\ell_2}]_j}"] \arrow[u, shift right, "R_{ij}"']
\end{tikzcd}$$

con $[R_{ij}]_i^T = [R_{ji}]_j$

||| Percorso diretto: $[R_{\ell_1\ell_2}]_i$

||| Percorso indiretto: $[R_{ij}]_i\, [R_{\ell_1\ell_2}]_j\, [R_{ij}]_i^T$

Quindi riepilogo rotazioni:

Regole di composizione

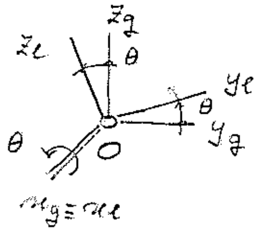
o) in assi fissi, ossia in $\{S_g\}$, assemblo da destra verso sinistra

$$\dots \quad \underbrace{(R_{l_1 l_2})_g}_{\text{avvenute per 2ª}} \quad \underbrace{(R_{l_0 l_1})_g}_{\text{avvenute per 1ª}} \qquad \text{n.b. } \{S_{l(0)}\} = \{S_g\}$$

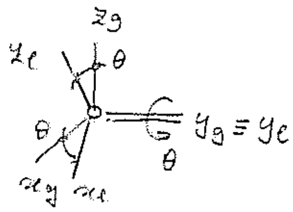
o) in assi locali, ossia di volta in volta nello $\{S_{l_i}\}$ corrente, assemblo da sinistra verso destra

$$\underbrace{(R_{l_0 l_1})_{l_0}}_{\text{aw. per 1ª}} \quad \underbrace{(R_{l_1 l_2})_{l_1}}_{\text{aw. per 2ª}} \quad \underbrace{(R_{l_2 l_3})_{l_2}}_{\text{terza}} \quad \dots \text{ etc...} \qquad \text{n.b. } \{S_{l(0)}\} = \{S_g\}$$

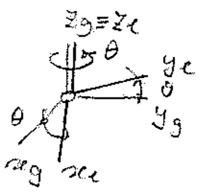
Matrici di rotazione elementari



$$\longrightarrow \quad R_x(\theta) = [R_{gl}]_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix}$$



$$\longrightarrow \quad R_y(\theta) = [R_{gl}]_g = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}$$



$$\longrightarrow \quad R_z(\theta) = [R_{gl}]_g = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Parametrizzazioni di una rotazione

Come si fa a scrivere la matrice di rotazione relativa ad una "rotazione rigida generale" in modo che la R (mat. di rotazione) verifichi:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot)\ R^T R = R R^T = I \\ \cdot)\ \det(R) = 1 \end{array}\right\} R \in SO(3) \text{ (gruppo speciale ortogonale)}$$

Infatti la R in generale è tale che: $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = [r_1 \ \ r_2 \ \ r_3]$

con vincoli che:

$$R^T R = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{bmatrix} [r_1 \ \ r_2 \ \ r_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(r_1 \times r_2) \cdot r_3 = 1$$

Se partiamo da due frame $\{S_g\}$ ed $\{S_e\}$ è naturale (e facile) definire $R_{ge} = \underset{\sim}{e_g}^T \underset{\sim}{e_e}$.

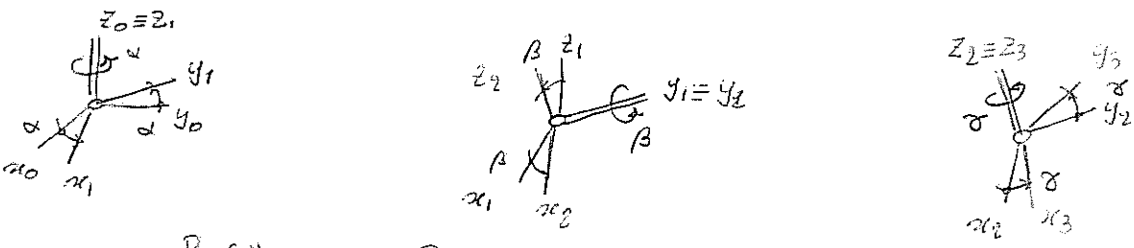
Tuttavia cerchiamo delle parametrizzazioni delle rotazioni (o di $SO(3)$) che ci permettano di definire una rotazione usando un numero minimo di parametri.

Per teorema di Eulero sappiamo che è possibile passare da una terna ad un'altra con 3 rotazioni elementari. Questa parametrizzazione è detta minima perché usa un no. di par. minimo, ossia solo 3.

Allora ad es. faccio 3 rotaz. successive attorno agli assi correnti.

Parametrizzazione di Eulero ZYZ

dati z_0 e z_3 definisco $y_1 \equiv y_2$ come



$$\underline{y_1} = \underline{y_2} = \frac{\underline{k_0} \times \underline{k_3}}{\sin(\beta)}$$

con $\underline{k_0} = \underline{k_1}$

$\underline{y_1} = \underline{y_2}$

$\underline{k_2} = \underline{k_3}$

$$\{S_0\} \xrightarrow{R_z(\alpha)} \{S_1\} \xrightarrow{R_y(\beta)} \{S_2\} \xrightarrow{R_z(\gamma)} \{S_3\}$$

come spostamento da $\{S_0\}$ a $\{S_1\}$

Allora $R_{ZYZ}(\alpha, \beta, \gamma) = \overrightarrow{R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z(\gamma)}$ (ZYZ o 323)

Sono assemblate pensando che siano avvenute rispetto agli assi locali e dunque da sinistra a destra.

Così come ho scelto ZYZ potevo scegliere altre sequenze: in quanti modi diversi?
La regola è che due rotazioni consecutive (adiacenti) avvengano attorno ad assi distinti, altrimenti sono la stessa rotazione.

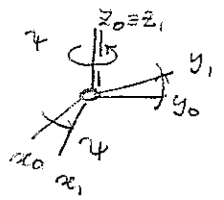
$\Rightarrow$ $R_x(\alpha)\, R_x(\beta) = R_x(\alpha+\beta) = R_x(\tilde{\alpha})$ conta come unica rotazione

Allora su X Y Z
1ª scelta su 3 assi $\Rightarrow$ ho scelto Z
2ª scelta su 2 assi (o X o Y) $\Rightarrow$ ho scelto Y
3ª scelta su 2 assi (o X o Z) $\Rightarrow$ ho scelto Z

Allora ci sono $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ parametrizzazioni possibili con rotazioni elementari

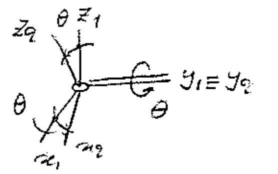
Sequenza ZYX o RPY (roll, pitch, yaw)

Se avessi scelto la sequenza ZYX avrei seguito



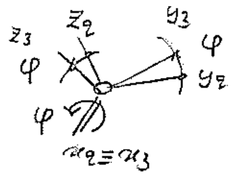
IMBARDATA = YAW

ψ



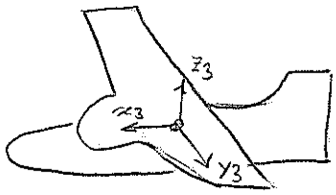
BECCHEGGIO = PITCH

θ



ROLLÌO = ROLL

φ



Allora $R_{RPY}(\psi, \theta, \varphi) = R_z(\psi)\, R_y(\theta)\, R_x(\varphi)$

(ZYX o 321)

Si parla di: angoli di Eulero quando la 1ª e la 3ª rotazione sono =
" di Cardano quando tutte e 3 le rotazioni sono $\neq$.

Esplicitamente per Eulero ZYZ

$$R_{ZYZ}(\varphi, \theta, \psi) = R_z(\varphi)\, R_y(\theta)\, R_z(\psi) =$$

$$= \begin{bmatrix} c\varphi\, c\theta\, c\psi - s\varphi\, s\psi & -c\varphi\, c\theta\, s\psi - s\varphi\, c\psi & c\varphi\, s\theta \\ s\varphi\, c\theta\, c\psi + c\varphi\, s\psi & -s\varphi\, c\theta\, s\psi + c\varphi\, c\psi & s\varphi\, s\theta \\ -s\theta\, c\psi & s\theta\, s\psi & c\theta \end{bmatrix}$$

osservazione: che succede per $\theta = 0$?

$$R_z(\varphi)\, \underbrace{R_y(0)}_{I}\, R_z(\psi) = \begin{bmatrix} c\varphi\, c\psi - s\varphi\, s\psi & -c\varphi\, s\psi - s\varphi\, c\psi & 0 \\ s\varphi\, c\psi + c\varphi\, s\psi & -s\varphi\, s\psi + c\varphi\, c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\varphi+\psi} & -s_{\varphi+\psi} & 0 \\ s_{\varphi+\psi} & c_{\varphi+\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Questa è una sola $R_z(\varphi+\psi)$. Dunque il pb è che se si deve risolvere il problema inverso, ossia data la R numerica (matrice con elementi numerici) e si devono trovare gli angoli della parametrizzazione, in questo caso si riesce solo a discriminare la somma $(\varphi + \psi)$ ma non φ e ψ singolarmente.

In generale invece (ossia se $\theta \neq 0$) se considero di avere in ingresso una R così fatta

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

si ha che: $r_{13} = c\varphi s\theta$; $r_{23} = s\varphi s\theta \longrightarrow r_{13}^2 + r_{23}^2 = s_\theta^2 \neq 0$

Allora definendo $\theta \in (0, \pi)$ (sin $\theta > 0$) allora

$$\varphi = \mathrm{atan2}\,(r_{23}, r_{13})$$

$$\theta = \mathrm{atan2}\,\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2},\ r_{33}\right)$$

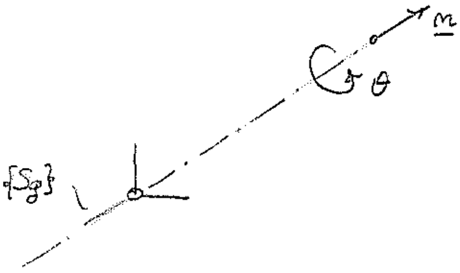
$$\psi = \mathrm{atan2}\,(r_{32}, -r_{31})$$

dove atan2(y, x) è f.ne arctan che fornisce angolo tenendo conto del quadrante in cui siamo sulla base dei segni di x ed y

Considerazioni analoghe possono farsi per tutte le altre parametrizzazioni, ad es. per RPY. La RPY ad es. ha singolarità per $\theta = \frac{\pi}{2}$, ovvero la condizione che fa in modo che l'asse x_2 sia allineato anche se con verso opposto all'asse z_1, ossia rende l'ultima rotazione dipendente dalla prima e quindi non è una vera rotazione 3D ma solo 2D. In questo caso nel pb. inverso si riesce solo a discriminare $\psi - \varphi$ ma non ψ e φ singolarmente

Altra via per scrivere una rotazione è ASSE-ANGOLO

Voglio esprimere la matrice di rotazione date le componenti del versore dell'asse e l'angolo di cui ruoto. Verso (pos.) di θ indotto dalla scelta di $\underline{n}$ sull'asse di rotazione

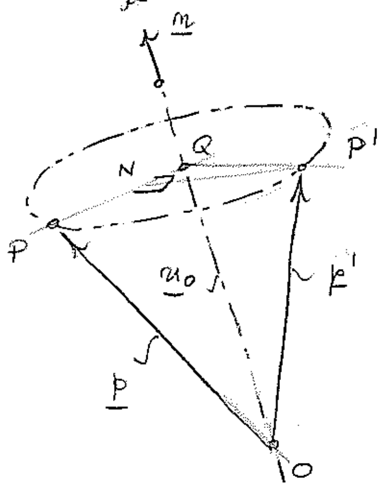


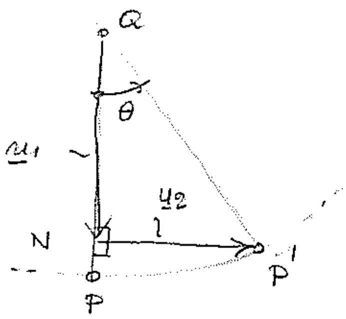
Fornisco $[\underline{n}] = n$ componenti di $\underline{n}$ in un qualche frame

θ angolo orientato

I parametri sono 4 $n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$ e θ con vincolo che $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ (versore)

Via diretta per la costruzione





allora: $OP = \underline{p}$; $O\hat{P} = \hat{\underline{p}}$

vett. iniz. — vettore ruotato

$OQ = \underline{u}_0$; $QN = \underline{u}_1$; $NP = \underline{u}_2$

$\underline{p}'' = OP' = OQ + QN + NP' = \underline{u}_0 + \underline{u}_1 + \underline{u}_2$

dove

$\underline{u}_0 = \underline{n}(\underline{n}^T \underline{p}) = (\underline{n}\,\underline{n}^T)\,\underline{p}$ con $\underline{n}\,\underline{n}^T$ mat di proiezione su asse $\underline{n}$

$QP = \underline{p} - (\underline{n}\,\underline{n}^T)\,\underline{p} = (I - \underline{n}\,\underline{n}^T)\,\underline{p}$

$QN = QP\cos\theta = \cos\theta\,(I - \underline{n}\,\underline{n}^T)\,\underline{p} = \underline{u}_1$

$NP' = \underline{n} \times QP\sin\theta = \underline{n} \times (I - \underline{n}\,\underline{n}^T)\,\underline{p}\sin\theta = \underline{n} \times \underline{p}\sin\theta = \underline{u}_2$

Poichè $\underline{n} \times (\underline{n}\,\underline{n}^T)\,\underline{p} = \underline{0} = \underbrace{(\underline{n} \times \underline{n})}_{\underline{0}}\,\underline{n}^T\,\underline{p} = \underline{0}$

Queste operazioni sono poi da effettuarsi in componenti

Quindi la forma finale risulta

$$\underline{p}' = (\underline{n}\,\underline{n}^T)\underline{p} + (I - \underline{n}\,\underline{n}^T)\cos\theta\ \underline{p} + \underline{n} \times \underline{p}\sin\theta$$

Lavoriamo in componenti, ossia applichiamo $[\,\circ\,]$ e definiamo $[\underline{p}] = p$ etc.

Allora introduciamo

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} = S(n) \qquad \text{con} \quad \hat{n} = -(\hat{n})^T \ \text{antisimmetrica}$$

$$S(n) = -S(n)^T \quad (\text{SKEW-SYMMETRIC})$$

cosicché possiamo scrivere

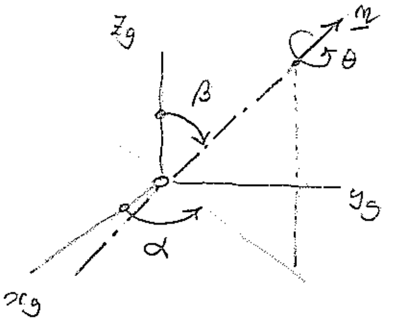
$n \times p = \hat{n}\,p$ con $\hat{n}$ matrice

$$p' = \left[n n^T + (I - n n^T)\cos\theta + \hat{n}\sin\theta \right] p =: R_n(\theta)\, p$$

Dunque si è definita la matrice di rotazione in f.ne dei parametri asse ($n = [n_x\ n_y\ n_z]^T$) e angolo θ

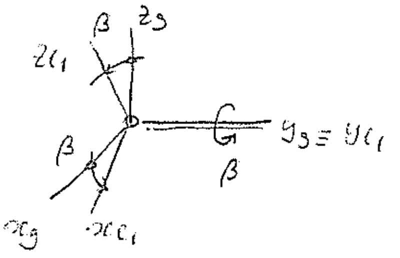
$$R_n(\theta) = \underbrace{n n^T + (I - n n^T)\cos\theta}_{R_{n_S}\ \text{(parte simm.)}} + \underbrace{\hat{n}\sin\theta}_{R_{n_{SS}}\ \text{(parte antisimm.)}}$$

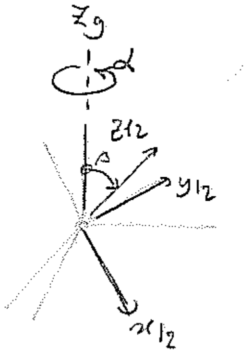
Via indiretta per la costruzione di $R_n(\theta)$ da rotazioni elementari



Sarebbe comodo scrivere $R_n(\theta)$ se avessi un sistema di rif. aux. che avesse un asse allineato con $\underline{n}$, così potrei esprimerla come <u>rotazione elementare</u>

Allora introduco





cosicché $\{S_{l_2}\}$ ha asse z allineato con asse ossia

$\underline{k}_{l_2} = \underline{n}$

Allora scrivo componendo in <u>assi fissi</u>

$$[R_{g\ell_2}]_g = [R_{\ell_1\ell_2}]_g \, [R_{g\ell_1}]_g = R_z(\alpha)\, R_y(\beta)$$

Se in $\{S_{\ell_2}\}$ voglio descrivere la rotazione attorno ad $\underline{n}$ di θ scrivo

$$[R_n(\theta)]_{\ell_2} = R_z(\theta)$$

Ma ricordandosi che $\longrightarrow$

si ha:

$$\begin{tikzcd}
\{S_g\} & \{S_g\} \arrow[l, "{[R_n(\theta)]_g}"'] \arrow[d, "R_{gl_2}^T"] \\
\{S_{\ell_2}\} \arrow[u, "R_{gl_2}"] & \{S_{\ell_2}\} \arrow[l, "R_z(\theta)"']
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{[R_n(\theta)]_g = R_{gl_2}\, R_z(\theta)\, R_{gl_2}^T = R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z(\theta)\, R_y(-\beta)\, R_z(-\alpha)}$$

$$[R_{gl_2}]_g^T = R_y^T(\beta)\, R_z^T(\alpha) = R_y(-\beta)\, R_z(-\alpha)$$

Quindi si costruisce la $R_n(\theta)$ assemblando 5 matrici di rotazione elementari, per questo si parla di via indiretta.

$$R_n(\theta) = R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z(\theta)\, R_y(-\beta)\, R_z(-\alpha)$$

Noto bene che se si vanno ad esprimere le componenti del versore n in fun. di $c_\alpha, s_\alpha, c_\beta, s_\beta$ le espressioni di $R_n(\theta)$ da via diretta ed indiretta sono ovviamente identiche

es. $n_x = s_\beta c_\alpha$

$n_y = s_\beta s_\alpha$ come da fig. a p. 19.

$n_z = c_\beta$

In particolare, se si vanno a scrivere esplicitamente gli elementi della matrice di rotazione da asse/angolo via diretta si ha:

$$R_n(\theta) = \begin{bmatrix} n_x^2 v_\theta + c_\theta & n_x n_y v_\theta - n_z s_\theta & n_x n_z v_\theta + n_y s_\theta \\ n_x n_y v_\theta + n_z s_\theta & n_y^2 v_\theta + c_\theta & n_y n_z v_\theta - n_x s_\theta \\ n_x n_z v_\theta - n_y s_\theta & n_y n_z v_\theta + n_x s_\theta & n_z^2 v_\theta + c_\theta \end{bmatrix}$$

dove $c_\theta = \cos\theta$, $s_\theta = \sin\theta$, $v_\theta = (1-\cos\theta) = 1 - c_\theta$

note bene che $R_n(\theta) = R_{(-n)}(-\theta)$, ossia rotazioni sono a coppie_

Se ci interessa il problema inverso, ossia data

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{determinare } \underline{n} \text{ e } \theta$$

per ispezione della forma asse/angolo si vede che

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1 = n_x^2 v\theta + c\theta + n_y^2 v\theta + c\theta + n_z^2 v\theta + c\theta - 1 =$$

$$= \cancel{1} - c\theta + 3\, c\theta - \cancel{1} = 2\, c\theta$$

allora

$$\begin{cases} \theta = \arccos\left(\dfrac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \\ \underline{n} = \dfrac{1}{2 \sin\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \end{cases}$$

che vale se $\sin\theta \neq 0$, infatti se $\theta = 0$ $\underline{n}$ è indeterminato (arbitrario poiché posso ruotare di angolo nullo attorno a qualsiasi asse ed ho sempre vettore di partenza)

Quali radici ha questo risultato?

Deriva dalla decomposizione cartesiana di una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = A_S + A_{SS}$$

dove

$A_S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ parte simmetrica ; $A_{SS} = \frac{1}{2}(A - A^T)$ parte antisimmetrica (skew symmetric)

invarianti lineari sono

- il $\mathrm{vect}(A) = a = (A_{SS})^\vee$, dove A_{SS} è tale che $A_{SS}\, v = a \times v$
- la $\mathrm{tr}(A)$ che è uguale alla $\mathrm{tr}(A_S)$

Calcolo esplicito per una $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

porta a

$$a = (A_{SS})^\vee = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A_S) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{ii}$$

Se applichiamo la decomposizione Cartesiana alla forma della matrice di rotazione R in param. asse/angolo si ottiene

$$R = \underbrace{nn^T + \cos\theta\,(I - nn^T)}_{R_S} + \underbrace{\hat{n} \sin\theta}_{R_{SS}}$$

Gli invarianti lineari sono quindi costituiti da:

ricorda che $n = [n_x \ n_y \ n_z]^T$ ha $\hat{n} = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}$ e l'operazione inversa è $(\hat{n})^V = n$

Ovvero anche $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}^V = \begin{bmatrix} -c \\ b \\ -a \end{bmatrix}$

•) $\mathrm{vect}(R) = (R_{SS})^V = (\hat{n} \sin\theta)^V = n \sin\theta$

$$\text{ma} \quad \mathrm{vect}(R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Perciò eguagliando si ha:

$$n = \frac{1}{2\sin\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

•) $\mathrm{tr}(R) = \mathrm{tr}(R_S) = \mathrm{tr}(nn^T + \cos\theta(I - nn^T)) = \overbrace{n^T n}^{1} + \cos\theta(3 - \overbrace{n^T n}^{1}) =$

$$= 1 + \cos\theta(3-1) = 1 + 2\cos\theta$$

dove si è usato: $\mathrm{tr}(nn^T) = n^T n$ e $n^T n = 1$ poiché n è versore

Perciò eguagliando si ha:

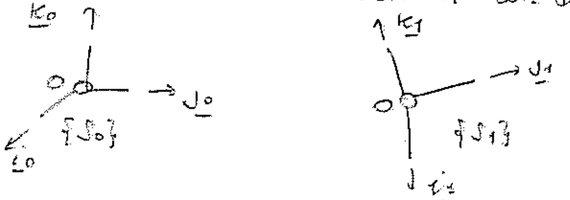
$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = \mathrm{tr}(R) = 1 + 2\cos\theta \longrightarrow \cos\theta = \frac{\mathrm{tr}(R) - 1}{2}$$

Da cui si calcolano

Per 1° $\quad \cos\theta = \dfrac{\mathrm{tr}(R) - 1}{2} \longrightarrow \theta$

per 2° $\quad n = \dfrac{1}{2\sin\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \longrightarrow n$

Comodo conoscere il cosiddetto "lemma dei versori"



$$R_{01} = \underset{\sim}{e_0}^T \underset{\sim}{e_1} = \begin{bmatrix} \underline{i_0}^T \\ \underline{j_0}^T \\ \underline{k_0}^T \end{bmatrix} [\underline{i_1} \ \ \underline{j_1} \ \ \underline{k_1}]$$

ovviamente $\mathrm{tr}(R_{01}) = \underline{i_0}^T \underline{i_1} + \underline{j_0}^T \underline{j_1} + \underline{k_0}^T \underline{k_1}$

mentre si ha che $\underline{i_0} \times \underline{i_1} + \underline{j_0} \times \underline{j_1} + \underline{k_0} \times \underline{k_1} = 2 \underline{n} \sin\theta$

ossia $\hat{\underline{i_0}}\, \underline{i_1} + \hat{\underline{j_0}}\, \underline{j_1} + \hat{\underline{k_0}}\, \underline{k_1} = [\hat{\underline{i_0}} \ \ \hat{\underline{j_0}} \ \ \hat{\underline{k_0}}] \begin{bmatrix} \underline{i_1} \\ \underline{j_1} \\ \underline{k_1} \end{bmatrix} = 2 \underline{n} \sin\theta$

Rappresentazione di una rotazione mediante "quaternioni unitari"

16 ottobre 1843 da Sir William R. Hamilton inciso su ponte Brougham Bridge, Dublino atto di vandalismo matematico

Un quaternione può essere considerato la generalizzazione di un numero complesso ed è definito come

$$Q = q_0 + q_1 \underline{i} + q_2 \underline{j} + q_3 \underline{k} = (q_0, \underline{q})$$

dove:

q_0 componente scalare e $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3)$ è la componente vettoriale

Si definisce un'algebra sui quaternioni definendo un prodotto "·" che può essere definito una volta stabilite queste "regole"

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = \underline{i} \cdot \underline{j} \cdot \underline{k} = -1$$

$$\underline{i} \cdot \underline{j} = -\underline{j} \cdot \underline{i} = \underline{k} \; ; \; \underline{j} \cdot \underline{k} = -\underline{k} \cdot \underline{j} = \underline{i} \; ; \; \underline{k} \cdot \underline{i} = -\underline{i} \cdot \underline{k} = \underline{j}$$

Si definisce coniugato di un quaternione Q il quaternione

$$Q^* = (q_0, -\underline{q})$$

Il modulo al quadrato del quaternione verifica

$$\|Q\|^2 = Q \cdot Q^* = (q_0^2 + \underline{q}^T \underline{q}, \underline{0}) = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \underline{0})$$

L'inverso di un quaternione Q^{-1} ossia tale che $Q^{-1} Q = (1, \underline{0})$ = identità nei quaternioni per operazione di moltiplicazione, è ottenibile come

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|^2}$$

Il prodotto fra due quaternioni $Q = (q_0, \underline{q})$ e $P = (p_0, \underline{p})$ può anche essere effettuato come

$$Q \cdot P = (q_0 p_0 - \underline{q}^T \underline{p}, \; q_0 \underline{p} + p_0 \underline{q} + \underline{q} \times \underline{p})$$

tale regola elimina necessità di usare le regole moltiplicative fornite precedentemente

Per quaternioni unitari $\|Q\| = 1$, $Q^{-1} = Q^*$

Si può associare ad una rotazione una sua rappresentazione mediante q.u. Si parte dalla forma $R_{\underline{n}}(\theta)$ ossia $\underline{n}, \theta$ e si definisce il Q associato a tale rotazione come

$$Q_R = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \underline{n} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

n.b. rotazione att. $\underline{n}$ di θ fornisce stesso q.u. di rot. att. a $-\underline{n}$ di $-\theta$.

Viceversa, dato un q.u. $Q = (q_0, \underline{q})$ la rotazione corrispondente è $R_n(\theta)$ con

$$\theta = 2 \arccos q_0 , \qquad \underline{n} = (\hat{\underline{n}})^\vee = \begin{cases} \frac{1}{\sin(\theta/2)} \underline{q} , & \text{se } \theta \neq 0 \\ \underline{0}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre date due matrici di rotazione R_1 ed R_2 ed i rispettivi quaternioni associati Q_{R_1} e Q_{R_2} si ha

$$Q_{R_1} \cdot Q_{R_2} = Q_{(R_1 R_2)}$$

ossia il quaternione associato al prodotto $R_1 R_2$ è uguale al prodotto dei quaternioni. Questo fornisce un modo più efficiente computazionalmente per comporre rotazioni.

Infatti per fare il prodotto fra 2 matrici di rotazione $\in \mathbb{R}^{3\times3}$

s. $R^{(c)} = R^{(a)} R^{(b)}$

a livello di componenti si fa

$$R^{(c)}_{ij} = \underbrace{R^{(a)}_{ik} R^{(b)}_{kj}}_{\text{somma su } k} \qquad \forall i,j$$

ho 3 moltiplicazioni $\to$ $i = 1,..,3$ $j = 1,..,3$ ed allora si fanno $3^3 = 27$ moltiplicazioni

Invece per comporre corrispondenti $Q^{(a)}$ e $Q^{(b)}$ per trovare $Q^{(c)}$ si fa

$$Q^{(a)} \cdot Q^{(b)} = (\underbrace{q_0^{(a)} q_0^{(b)}}_{\substack{1 \text{ molt.} \\ \text{scalare}}} - \underbrace{\underline{q}^{(a)T} \underline{q}^{(b)}}_{3 \text{ molt.}} , \underbrace{q_0^{(a)} \underline{q}^{(b)}}_{3} + \underbrace{q_0^{(b)} \underline{q}^{(a)}}_{3} + \underbrace{\underline{q}^{(a)} \times \underline{q}^{(b)}}_{6})$$

in totale sono $1 + 9 + 6 = 16$

Ho quasi dimostrato il <u>costo computazionale</u>!

Se voglio ricostruire la matrice di rotazione associata al quaternione posso scrivere la R in funzione di $\underline{n}$ e θ ottenendo

$$R_n(\theta) = \underline{n}\,\underline{n}^T + (I - \underline{n}\,\underline{n}^T)\cos\theta + \hat{\underline{n}} \sin\theta$$

ci serve sapere che per $\|\underline{n}\| = 1$ con $\underline{n} = (\hat{\underline{n}})^\vee$ valgono:

$$\hat{\underline{n}} = -\hat{\underline{n}}^T ; \qquad \hat{\underline{n}}^2 = -(I - \underline{n}\,\underline{n}^T) ; \qquad \hat{\underline{n}}^3 = -\hat{\underline{n}}$$

e ricorsivamente:

$$\hat{\underline{n}}^{(2k+1)} = (-1)^k \hat{\underline{n}}$$

$$\hat{\underline{n}}^{(2k)} = (-1)^k (I - \underline{n}\,\underline{n}^T) \qquad k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

Allora

$$R_n(\theta) = \underbrace{I + \hat{\underline{n}}^2}_{\underline{n}\,\underline{n}^T} \; - \underbrace{\hat{\underline{n}}^2}_{(I - \underline{n}\,\underline{n}^T)} \cos\theta + \hat{\underline{n}} \sin\theta = I + \hat{\underline{n}} \sin\theta + \hat{\underline{n}}^2 (1 - \cos\theta)$$

ma dalle formule di p. 24 essendo

$$q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{con} \quad Q_R = (q_0, \underline{q}) = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \underline{n}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\underline{q} = \underline{n} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

si operano le seguenti trasformazioni

$$\sin\theta = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

da cui

$$R_n(\theta) = R(q_0, \underline{q}) = I + \underbrace{\hat{\underline{n}}\, 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{\hat{\underline{q}}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \underbrace{\hat{\underline{n}}^2 \left(\cancel{1} - \cancel{1} + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}_{\hat{\underline{q}}^2}$$

$$= I + 2\hat{\underline{q}}\left(\underbrace{\cos\frac{\theta}{2}}_{q_0} + \hat{\underline{q}}\right) = I + 2\hat{\underline{q}}\,(q_0 I + \hat{\underline{q}})$$

Dunque ho scritto la matrice di rotazione in f.ne delle componenti del quaternione. Tali componenti, ossia (q_0, q_1, q_2, q_3) sono anche detti <u>parametri di Eulero</u>.

I quaternioni possono essere usati anche per effettuare direttamente operazioni di rotazione sui punti

ossia voglio fare

$$\underbrace{[\underline{p}(\bar{t})]_g}_{\begin{bmatrix} x(\bar{t}) \\ y(\bar{t}) \\ z(\bar{t}) \end{bmatrix}} = R_{ge}\, \underbrace{[\underline{p}(0)]_g}_{\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}}$$

Le coordinate di un punto in forma di quaternione le scrivo così

$$P(0) = (0, (x(0), y(0), z(0)))$$

La rotazione sarà

$$Q_{ge} = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \underline{n}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = (q_0, \underline{q})$$

Il punto ruotato sarà:

$$P(\bar{t}) = Q_{ge}\, P(0)\, Q_{ge}^{*}$$ ← coniugato

I quaternioni sono utili per interpolazione fra pose

Se P e Q sono orientazioni relative a 2 pose diverse, se definisco un parametro $t \in [0,1]$, posso definire l'orientazione fra P e Q associata al parametro t come

$$s(t;P,Q) = \frac{\sin\left[\frac{\theta}{2}(1-t)\right]P + \sin\left[\frac{\theta}{2}t\right]Q}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

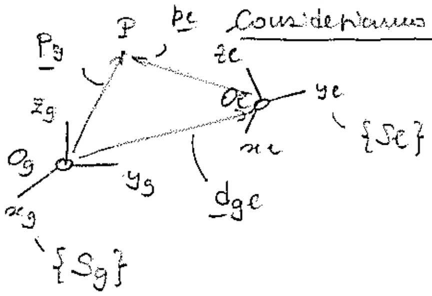
cosicché

$$s(0;P,Q) = P \quad ; \quad s(1;P,Q) = Q$$

dove θ : angolo fra pose P e Q in parametrizzazione asse/angolo $(\underline{n}, \theta)$

Il campionamento uniforme in t fornisce pose equispaziate e pose intermedie più naturali che con altre parametrizzazioni come angoli di Eulero, etc.

<u>Consideriamo anche shift dell'origine</u>



chiusura del triangolo $O_g \hat{O}_e P$

$$O_gP = O_gO_e + O_eP$$

definendo

$$O_gP =: \underline{p}_g \; ; \; O_g\underline{O}_e =: \underline{d}_{ge} \; ; \; O_e P =: \underline{p}_e$$

Si può scrivere fra vettori in forma invariante

$$\boxed{\underline{p}_g = \underline{p}_e + \underline{d}_{ge}}$$ relazione fra vettori in forma invariante

Se scrivo:

nota bene che p_g e d_{ge} sono comp. in $\{S_g\}$, p_e in $\{S_e\}$

•) $\underline{p}_g = \underset{\sim}{e}_g \, p_g$; $\underline{p}_e := \underset{\sim}{e}_e \, p_e$; $\underline{d}_{ge} := \underset{\sim}{e}_g \, d_{ge}$

si ha $\left(p_g = [\underline{p}_g]_g \; ; \; p_e = [\underline{p}_e]_e \; ; \; d_{ge} = [\underline{d}_{ge}]_g \right)$

$\underset{\sim}{e}_g \, p_g = \underset{\sim}{e}_e \, p_e + \underset{\sim}{e}_g \, d_{ge}$ $\longrightarrow$ premoltiplico per $\underset{\sim}{e}_g^T$ ottenendo:

$\underset{\sim}{e}_g^T \underset{\sim}{e}_g \, p_g = \underset{\sim}{e}_g^T \underset{\sim}{e}_e \, p_e + \underset{\sim}{e}_g^T \underset{\sim}{e}_g \, d_{ge}$ ovvero...

$$\boxed{p_g = R_{ge} \, p_e + d_{ge}}$$ relazione fra le componenti

Questa relazione non è più lineare bensì <u>affine</u>, infatti si trasforma qualcosa di tipo $(\#)$ in $(d_{ge} + R_{ge} \#)$

x linearità varrebbero che

$L(\alpha p) = \alpha L(p)$ (omogeneità)

$L(p_1 + p_2) = L(p_1) + L(p_2)$ (additività)

Nel nostro schema invece ($d_{ge} = d$, $R_{ge} = R$)

$$L(\alpha p) = d + R(\alpha p) = d + \alpha R p \neq \alpha L(p) = \alpha d + \alpha R p$$

Si introducono perciò le coordinate omogenee che consentono di recuperare la linearità.

Definizioni di coordinate omogenee per vettori posizione e vettori generici

•) p_g componenti del vettore posizione $\underline{p_g}$ in $\{S_g\}$.

esplicitamente $\begin{bmatrix} p_{gx} \\ p_{gy} \\ p_{gz} \end{bmatrix}$

$\overline{p_g}$ coordinate omogenee, $\overline{p_g} = \begin{bmatrix} p_g \\ --- \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times1}$

•) v_g componenti di un vettore generico (velocità, accel., forza, mom., etc.) $\underline{v_g}$ in $\{S_g\}$.

esplicitamente $\begin{bmatrix} v_{gx} \\ v_{gy} \\ v_{gz} \end{bmatrix}$

$\overline{v_g}$ coordinate omogenee, $\overline{v_g} = \begin{bmatrix} v_g \\ --- \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times1}$

Per un vettore $\underline{v_g}$ lo shift dell'origine non ha nessuna influenza

In termini di componenti un vettore posizione cambia così

$$p_g = R_{ge}\, p_e + d_{ge}$$

mentre per un vettore non di posizione le componenti cambiano così

$$v_g = R_{ge}\, v_e$$

Introduco la matrice omogenea

$$T_{ge} := \left[\begin{array}{c|c} R_{ge} & d_{ge} \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{4\times4}$$

dove $R_{ge} \in SO(3) \subset \mathbb{R}^{3\times3}$ matrice di rotazione $R_{ge} = \underset{\sim}{e_g}^T \underset{\sim}{e_e}$

$d_{ge} = [\underline{d_{ge}}]_g \in \mathbb{R}^{3\times1}$ componenti del vettore traslazione dell'origine O_e rispetto ad O_g, ossia $\underline{d_{ge}} = O_e - O_g$

$0^T \in \mathbb{R}^{1\times3} \rightarrow [0 \quad 0 \quad 0]$

1 di $\mathbb{R}$ (numero 1)

Se scrivo

$$T_{ge}\,\bar{p}_e = \left[\begin{array}{c|c} R_{ge} & d_{ge} \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} p_e \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} R_{ge}\,p_e + d_{ge} \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} p_g \\ \hline 1 \end{array}\right] = \bar{p}_g$$

dunque le prime tre componenti sono le coordinate in $\{S_g\}$ a partire da quelle in $\{S_e\}$. L'ultima componente vale 1.

Se la applico ad un vettore

$$T_{ge}\,\bar{v}_e = \left[\begin{array}{c|c} R_{ge} & d_{ge} \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} v_e \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} R_{ge}\,v_e \\ \hdashline 0 \end{array}\right] = \bar{v}_g$$

Dunque un vettore generico rimane un vettore generico e le sue compon. cartesiane si modificano correttamente senza l'influsso della traslazione che viene filtrata.

In questo modo la moltiplicazione delle coordinate omogenee del vettore p_g, ossia $\bar{p}_g$, per la T_{gl} è sufficiente per effettuare il cambiamento di coordinate tra i frame $\{S_e\}$ e $\{S_g\}$ disposti genericamente l'uno rispetto all'altro

Allora

$$\bar{p}_g = T_{ge}\,\bar{p}_e$$

E per la trasformazione inversa? $\quad \bar{p}_e = T_{ge}^{-1}\,\bar{p}_g = T_{eg}\,\bar{p}_g$

come è fatta T_{ge}^{-1}?

Partendo da $T = \left[\begin{array}{c|c} R & d \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right]$

$$T^{-1}:\; T^{-1}T = I_{4\times4} = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right]$$

Chiamiamo

$T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} X & y \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right]$ $\quad$ si impone $T^{-1}T = \left[\begin{array}{c|c} X & y \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R & d \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right]$

a blocchi:

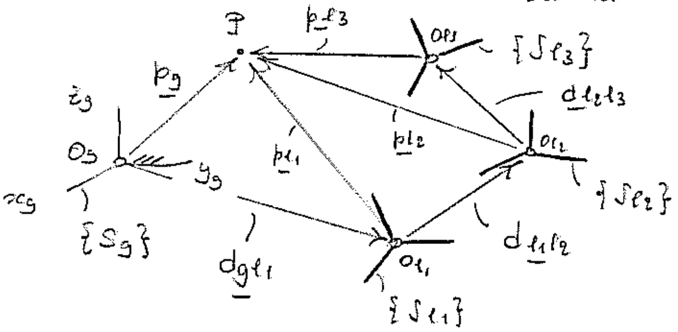
$$\begin{cases} XR = I \longrightarrow X = R^T & \text{(poiché } R \text{ è di } SO(3)) \\ Xd + y = 0 \longrightarrow y = -Xd = -R^Td \end{cases}$$

Allora

$T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} R^T & -R^Td \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right]$ $\quad$ facile da calcolare <u>a blocchi</u>.

Attenzione T <u>non</u> è ortogonale.

Vediamo la comodità del suo utilizzo



$\underline{p}_{l1} = \underline{d}_{l1l2} + \underline{p}_{l2} \rightsquigarrow$ in comp in $\{S_{l1}\}$ $\rightsquigarrow p_{l1} = R_{l1l2}\, p_{l2} + d_{l1l2}$

$\underline{p}_g = \underline{d}_{gl1} + \underline{p}_{l1} \rightsquigarrow$ in comp in $\{S_g\}$ $\rightsquigarrow p_g = R_{gl1}\, p_{l1} + d_{gl1}$

allora:

$$p_g = R_{gl1}\left(R_{l1l2}\, p_{l2} + d_{l1l2}\right) + d_{gl1} =$$

$$= \underbrace{R_{gl1} R_{l1l2}}_{R_{gl2}}\, p_{l2} + \underbrace{R_{gl1} d_{l1l2} + d_{gl1}}_{d_{gl2}} = R_{gl2}\, p_{l2} + d_{gl2}$$

Usiamo le matrici omogenee

$$\overline{p_{l1}} = T_{l1l2}\, \overline{p_{l2}}$$

$$\overline{p_g} = T_{gl1}\, \overline{p_{l1}}$$

allora

$$\overline{p_g} = T_{gl1} T_{l1l2}\, \overline{p_{l2}} = T_{gl2}\, \overline{p_{l2}}$$

$$T_{gl2} = \left[\begin{array}{c|c} R_{gl1} & d_{gl1} \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R_{l1l2} & d_{l1l2} \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} R_{gl1} R_{l1l2} & R_{gl1} d_{l1l2} + d_{gl1} \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right]$$

e effettuando la moltiplicazione matriciale $T_{gl2}\, \overline{p_{l2}}$, nelle prime 3 componenti si ha proprio $R_{gl2}\, p_{l2} + d_{gl2}$.

Dunque l'usuale prodotto fra matrici può essere usato per comporre rototraslazioni successive espresse da matrici omogenee.

Dunque matrici omogenee di rototraslazione hanno struttura di tipo

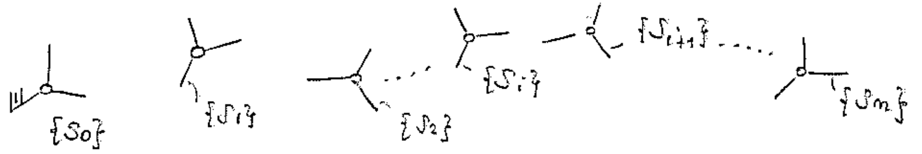
$$T = \left[\begin{array}{c|c} R & d \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right]$$ con $R \in SO(3)$, $d \in \mathbb{R}^3$ n.b. $\det(R) = 1$ sono isometrie che preservano il verso di percorrenza (terne levogite vengono mappate in terne levogite)

Interessante interpretazione di una T_{ge} come

$$T_{ge} = \begin{bmatrix} [\underline{i_e}]_g & [\underline{j_e}]_g & [\underline{k_e}]_g & [d_{ge}]_g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{i_e} & \bar{j_e} & \bar{k_e} & \bar{d_{ge}} \end{bmatrix}$$

dove $\bar{i_e}, \bar{j_e}, \bar{k_e} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ sono coordinate omogenee di versori (che sono vettori NON di posizione, ed hanno perciò 0 appeso come ultima componente) mentre $\bar{d_{ge}} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ sono coord di vettore posizione (ed infatti ha 1 appeso come ultima componente).

In questo modo se si ha una catena di sistemi di riferimento arbitrariamente lunga si può scrivere la trasf omogenea complessiva combinando le trasformazioni successive



allora:

$\xrightarrow{\text{assemblo da sin. a destra}}$

•) in assi mobili (o correnti): $[T_{0m}]_0 = [T_{01}]_0 [T_{12}]_1 \cdots [T_{i,i+1}]_i \cdots [T_{m-1,m}]_{m-1}$

•) in assi fissi: $[T_{0m}]_0 = [T_{m-1,m}]_0 \cdots [T_{i,i+1}]_0 \cdots [T_{12}]_0 [T_{01}]_0$

Questa dimostrazione è formalmente identica a quella vista per le rotazioni. Come fatto per le rotazioni si possono definire le trasformazioni omogenee elementari che sono date da

•) Rotazioni elementari

$$T_{R_x}(\theta) = \left[\begin{array}{c|c} R_x(\theta) & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right]; \quad T_{R_y}(\theta) = \left[\begin{array}{c|c} R_y(\theta) & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right];$$

$$T_{R_z}(\theta) = \left[\begin{array}{c|c} R_z(\theta) & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right];$$

•) Traslazioni elementari

$$T_{T_x}(a) = \left[\begin{array}{c|c} I & \begin{matrix}a\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right]; \quad T_{T_y}(a) = \left[\begin{array}{c|c} I & \begin{matrix}0\\a\\0\end{matrix} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right];$$

$$T_{T_z}(a) = \left[\begin{array}{c|c} I & \begin{matrix}0\\0\\a\end{matrix} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right];$$

Attenzione che se si fa:

$$T_{Tx}(a)\;T_{Rz}(\theta) = \begin{bmatrix} I & \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_z(\theta) & \underline{0} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_z(\theta) & \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

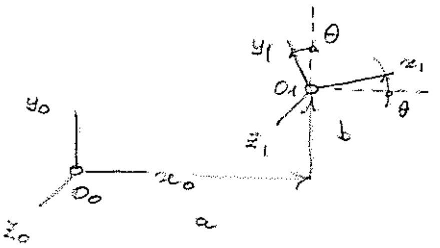
si ottiene proprio la matrice omogenea "standard". Da cui il significato evidente di $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ come traslazione in componenti nel sistema di rif. fisso ed $R_z(\theta)$ come rot. nel sistema di rif. fisso (in tale caso indistinguibile dal locale)

Invece se si fa:

$$T_{Rz}(\theta)\;T_{Tx}(a) = \begin{bmatrix} R_z(\theta) & \underline{0} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_z(\theta) & R_z(\theta)\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} \qquad (**)$$

si sta facendo (in assi fissi) prima una traslazione e poi una rotazione attorno all'origine del frame fisso.

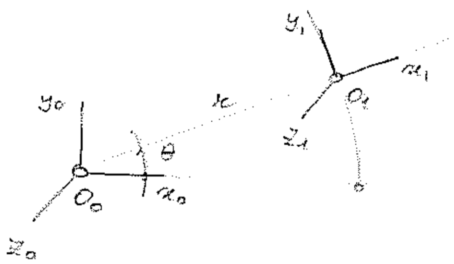
Dunque se ho una rototraslazione così:



comodo scriverla nel modo naturale $(*)$

$$T_{01} = \begin{bmatrix} R_z(\theta) & \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

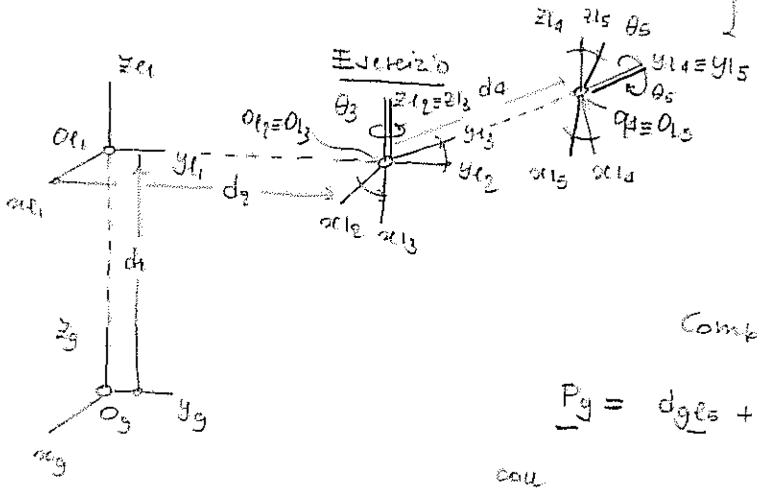
Se invece ne ho una così:



comodo scriverla così: $(**)$

$$T_{01} = \begin{bmatrix} R_z(\theta) & \underline{0} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_z(\theta) & R_z(\theta)\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_z(\theta) & \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$



Allora date le coordinate di un punto espresse in $\{S_{l_5}\}$, quali sono le coordinate in $\{S_g\}$?

Componendo in assi correnti

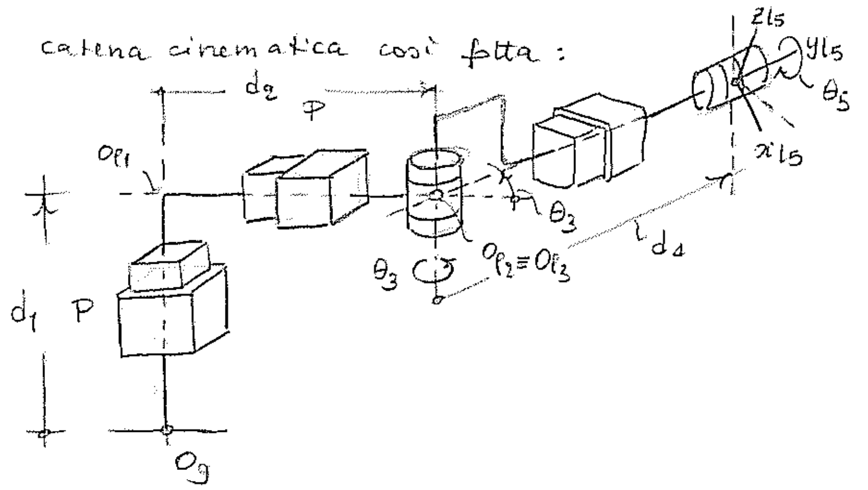
$$\underline{P}_g = \underline{d}_{g l_5} + \underline{P}_{l_5} \rightsquigarrow \text{in comp} \rightsquigarrow \bar{P}_g = T_{g l_5}\,\bar{P}_{l_5}$$

con

$$T_{g l_5} = T_{g l_1} T_{l_1 l_2} T_{l_2 l_3} T_{l_3 l_4} T_{l_4 l_5}$$

$T_{g l_1} = T_{Tz}(d_1)$; $T_{l_1 l_2} = T_{Ty}(d_2)$; $T_{l_2 l_3} = T_{Rz}(\theta_3)$; $T_{l_3 l_4} = T_{Ty}(d_4)$; $T_{Ry}(\theta_5)$.

Effettuando composizioni in assi correnti abbiamo di fatto parametrizzato una catena cinematica così fatta:

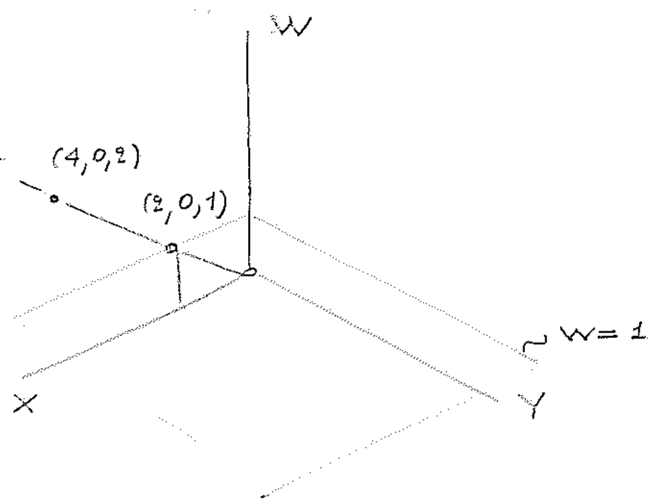


Perché coordinate omogenee?

Quando passiamo da (x,y) cartesiane nel 2D a $(x,y,1)$ omogenee nel 2D stiamo dicendo che vediamo il piano cartesiano come il piano $W=1$ nello spazio Euclideo 3D.

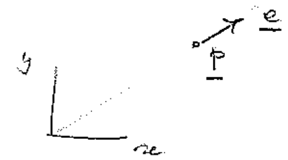
Allora ad un punto (X,Y,W) posso associare la sua proiezione verso l'origine $(X/W, Y/W, 1)$ su piano $W=1$.

Se "fa fede" quello che succede su $W=1$, punti (X,Y,W) e $\lambda(X,Y,W) = (\lambda X, \lambda Y, \lambda W)$ sono perfettamente equivalenti



Allora la proprietà $(X,Y,W) \sim \lambda(X,Y,W)$ è OMOGENEITÀ e fornisce il nome alle coordinate.

Da prima $x = \frac{X}{W}$, $y = \frac{Y}{W}$



Dunque da $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ ossia $\underline{p} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \overline{\underline{p}}$

ma $\underline{p} = \underline{e}\,\|\underline{p}\|$ allora $\begin{bmatrix} \|\underline{p}\|\,\underline{e} \\ 1 \end{bmatrix} = \|\underline{p}\| \begin{bmatrix} \underline{e} \\ 1/\|\underline{p}\| \end{bmatrix}$

Se adesso voglio esprimere un punto all'infinito posso scrivere

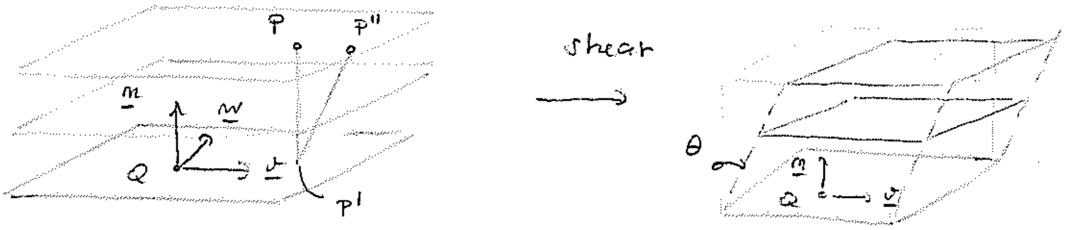
$$\lim_{\|\underline{p}\| \to \infty} \overline{\underline{p}} = \lim_{\|\underline{p}\| \to \infty} \begin{bmatrix} \underline{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \lim_{\|\underline{p}\| \to \infty} \|\underline{p}\| \begin{bmatrix} \underline{e} \\ \frac{1}{\|\underline{p}\|} \end{bmatrix} = \left(\lim_{\|\underline{p}\| \to \infty} \|\underline{p}\| \right) \begin{bmatrix} \underline{e} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e si definisce $\overline{\underline{p}}_\infty = \begin{bmatrix} \underline{e} \\ 0 \end{bmatrix}$ dunque un punto all'infinito ha solo una direzione

Qualche esempio di matrici omogenee generali (non solo rototraslazioni)

$$H = \left[\begin{array}{c|c} T_{3\times3} & \underline{d}_{3\times1} \\ \hline \underline{f}_{1\times3} & s_{1\times1} \end{array}\right]$$

Definisco una trasformazione di "shearing" (taglio) nello spazio in questo modo.
Preso un piano nello spazio identificato dal punto Q e dalla sua normale $\underline{n}$, prendo sul piano la direzione $\underline{v}$ di shear in modo che lo spazio viene deformato così.



θ angolo di shear

Allora un punto P viene mappato nel punto P''.

$\underline{QP} = \underline{d}_{qp}$ diviene $\underline{QP}'' = \underline{QP} + \underline{PP}''$

allora se $\underline{OP} = \underline{p}$

$$(\underline{n} + \underline{v}\tan\theta)\, p_n + \underline{v}\, p_v + \underline{w}\, p_w$$

$$\underline{p} = \underline{d}_{oq} + [\underline{n} \;\; \underline{v} \;\; \underline{w}] \begin{bmatrix} p_n \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

$$[\underline{n}\, p_n + \underline{v}\, p_v + \underline{v}\, p_n \tan\theta + \underline{w}\, p_w)$$

$$\underline{p}'' = \underline{d}_{oq} + [\underline{n} \;\; \underline{v} \;\; \underline{w}] \begin{bmatrix} p_n \\ p_v + p_n \tan\theta \\ p_w \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{d}_{oq} + [\underline{n} + \underline{v}\tan\theta \;\;\; \underline{v} \;\;\; \underline{w}] \begin{bmatrix} p_n \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

dunque la trasformazione di shear è data da

$$\underline{p}'' - \underline{d}_{oq} = [\underline{n} + \underline{v}\tan\theta \;\;\; \underline{v} \;\;\; \underline{w}] \begin{bmatrix} p_n \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

con $\begin{bmatrix} p_n \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$ che sono coordinate in $\{S_e\}$

se premoltiplico per $\begin{bmatrix} \underline{n}^T \\ \underline{v}^T \\ \underline{w}^T \end{bmatrix}$ ottengo

$$\begin{bmatrix} \underline{n}^T \\ \underline{v}^T \\ \underline{w}^T \end{bmatrix} [\underline{n} + \underline{v}\tan\theta \;\;\; \underline{v} \;\;\; \underline{w}] = \begin{bmatrix} \underline{n}^T\underline{n} + \underline{n}^T\underline{v}\tan\theta & \underline{n}^T\underline{v} & \underline{n}^T\underline{w} \\ \underline{v}^T\underline{n} + \underline{v}^T\underline{v}\tan\theta & \underline{v}^T\underline{v} & \underline{v}^T\underline{w} \\ \underline{w}^T\underline{n} + \underline{w}^T\underline{v}\tan\theta & \underline{w}^T\underline{v} & \underline{w}^T\underline{w} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato della moltiplicazione di questa matrice per $\begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$ sono le nuove coordinate del vettore deformato che infatti vale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_u \\ p_u \tan\theta + p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

Questa trasformazione nella forma attuale è descritta in $\{S_e\}$. Se la voglio scrivere in $\{S_g\}$ posso andare da $\{S_g\}$ ad $\{S_e\}$ con rototraslaz. in coords omogenee

$$H = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tan\theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad ; \quad \bar{p}_e^{(shear)} = \begin{bmatrix} p_u \\ p_u \tan\theta + p_v \\ p_w \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \bar{p}_e = \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

cosicché $\bar{p}_e^{(shear)} = H \, \bar{p}_e$

poi $\bar{p}_g = T_{gl} \, \bar{p}_e \; ; \; \bar{p}_e = T_{gl}^{-1} \, \bar{p}_g$

Allora

$$\bar{p}_e^{(shear)} = H \, \bar{p}_e = H \, T_{gl}^{-1} \, \bar{p}_g$$

$$\bar{p}_g^{(shear)} = T_{gl} \, \bar{p}_e^{(shear)} = \underbrace{T_{gl} \, H \, T_{gl}^{-1}}_{\text{shear in } \{S_g\}} \, \bar{p}_g$$

Struttura della matrice per passare (come spostamento) da $\{S_0\}$ a $\{S_1\}$, ovvero (come cambiamento di coordinate) da $\{S_1\}$ a $\{S_0\}$.

$$^0T_1 = T_{tr}(z,d)\, T_{rot}(z,\theta)\, T_{tr}(x,a)\, T_{rot}(x,\alpha)$$

dove a, α, d, θ sono i parametri di Denavit-Hartenberg.

La forma generale della matrice di Denavit-Hartenberg risulta

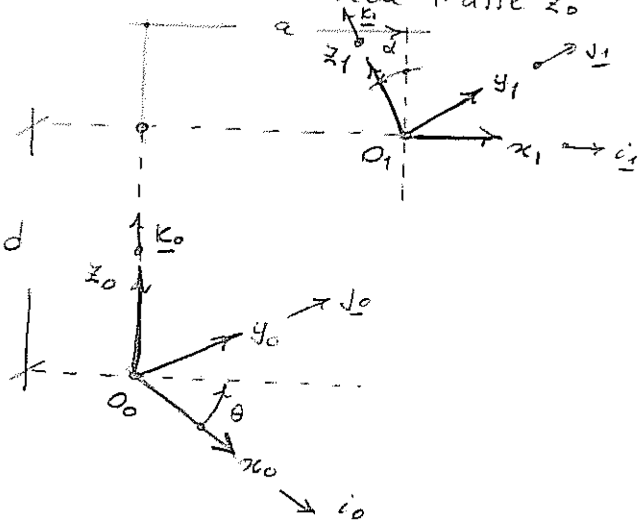
$$^0T_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta & -s\theta c\alpha & s\theta s\alpha & a\,c\theta \\ s\theta & c\theta c\alpha & -c\theta s\alpha & a\,s\theta \\ 0 & s\alpha & c\alpha & d \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dimostriamo che le seguenti condizioni DH1 e DH2 garantiscono che dati due frame $\{S_0\}$ ed $\{S_1\}$ $\exists!$ la trasformazione di D.-H. che ne esprime la postura relativa.

(DH 1) l'asse x_1 è ortogonale a z_0

(DH 2) l'asse x_1 interseca l'asse z_0

es.



In sostanza, data una matrice omogenea che rappresenta la rototraslazione fra un $\{S_0\}$ ed un $\{S_1\}$ che verificano (DH1) e (DH2), ossia una $^0A_1$ numerica, allora è possibile trovare a, α, d e θ tali che:

$$^0T_1(a,\alpha,d,\theta) = {}^0A_1$$

Supponiamo che $^0A_1$ abbia la struttura classica $^0A_1 = \left[\begin{array}{c|c} ^0R_1 & ^0d_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$, $\quad {}^0R_1 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$

Se la (DH1) è verificata ossia x_1 è ortogonale a z_0, allora fra i versori $\underline{i}_1$ e $\underline{k}_0$ si ha $\underline{i}_1^T \underline{k}_0 = 0$. Se esprimiamo questa condizione in $\{S_0\}$ allora $[\underline{i}_1^T]_0 [\underline{k}_0]_0 = 0$ risulta

$$[\underline{k}_0]_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad [\underline{i}_1]_0 = \begin{bmatrix} R_{11} \\ R_{21} \\ R_{31} \end{bmatrix}$$

Allora questa condizione risulta esplicitamente:

$$[\underline{i}_1]_0^T [\underline{k}_0]_0 = [R_{11} \quad R_{21} \quad R_{31}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = R_{31} = 0$$

Questa condizione implica che $\boxed{R_{31} = 0}$.

Inoltre la parte di rotazione dipenderà solo dalle 2 rotazioni $R_x(\alpha)$ e $R_z(\theta)$, quindi la ${}^0R_1$ in funzione dei par. di D.-H. risulta

$${}^0R_1 = R_z(\theta)\, R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} c\theta \\ s\theta \end{matrix}} & -s\theta\, c\alpha & s\theta\, s\alpha \\ & c\theta\, c\alpha & -c\theta\, s\alpha \\ 0 & \boxed{s\alpha} & \boxed{c\alpha} \end{bmatrix}$$

Dunque dato che $R_{31} = 0$ la struttura torna con quella che esce da D.-H.
Inoltre eguagliando

$$\begin{bmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta \\ s\theta \end{bmatrix} \quad e \quad [R_{32} \quad R_{33}] = [s\alpha \quad c\alpha]$$

si determinano α e θ

Poi dalle assunzioni (DH2) ossia che x_1 interseca z_0 significa che per andare da O_0 ad O_1 posso viaggiare lungo z_0 e poi x_1.

Allora

$$[{}^0\underline{d}_1]_0 = d\, [\underline{k}_0]_0 + a\, [\underline{i}_1]_0 = d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} c\theta \\ s\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\, c\theta \\ a\, s\theta \\ d \end{bmatrix}$$

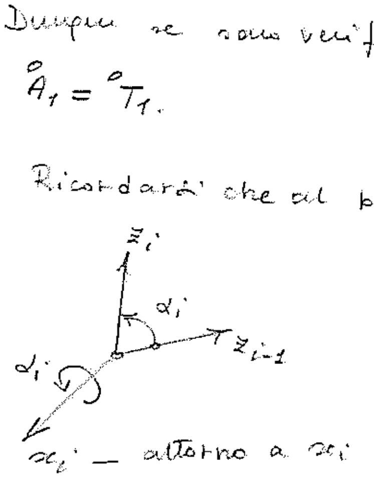
Dunque dall'eguaglianze di

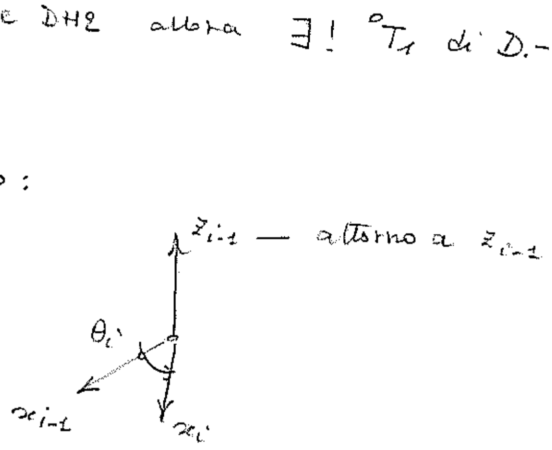
$[{}^0\underline{d}_1]_0 (3) = d$ $\Downarrow$ determino d

e, nota θ, $[{}^0\underline{d}_1]_0 (1,2) = \begin{bmatrix} a\, c\theta \\ a\, s\theta \end{bmatrix}$ $\Downarrow$ determino a

Dunque se sono verificate DH1 e DH2 allora $\exists!\ {}^0T_1$ di D.-H. tale che ${}^0A_1 = {}^0T_1$.

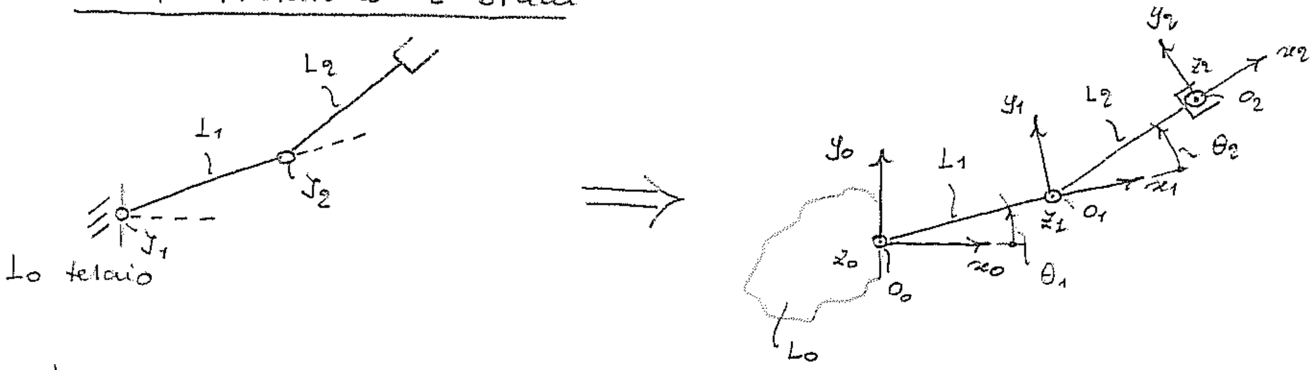
Ricordarsi che al passo generico:





Esempi di applicazione di D-H e commenti a casi indeterminati e "patologici" per le regole di D-H.

Manip. planare a 2 bracci



numerazione ok: L_i collega sempre J_i e J_{i+1}, numero link da L_0, L_1, L_2, numero giunti J_1 e J_2.

Asse di J_1 è z_0, asse di J_2 è z_1.

Origine di $\{S_1\}$ la pongo sul piano del foglio ed asse x_1 è determinato. Scelti versi uscenti dal foglio per assi z_0 e z_1, allora y_1 è determinato da $\{S_1\}$ terna levogira. Per $\{S_0\}$ ho solo z_0, scelgo O_0 in in modo che $d_1 = 0$ e asse x_0 in modo che sia definita la direzione orizzontale preferita, y_0 viene di conseguenza da $\{S_0\}$ levogira. Per $\{S_2\}$ non ho giunto a valle ma basta che scelga $x_2 \perp$ a z_1 e che interseca z_1. Origine per fare in modo che d_2 scelgo O_2 sullo stesso piano di O_0 e O_1.

Allora la tabella di Denavit-Hartenberg risulta:

	Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
$\{S_0\} \to \{S_1\}$	1	a_1	0	0	θ_1^*
$\{S_1\} \to \{S_2\}$	2	a_2	0	0	θ_2^*

Dunque a partire dalla forma generale

$$^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ottiene

$$^{0}T_1 = (\text{da } 1^a \text{ riga della tabella}) = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a_1 c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & a_1 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{1}T_2 = (\text{da } 2^a \text{ riga della tabella}) = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cosicché:

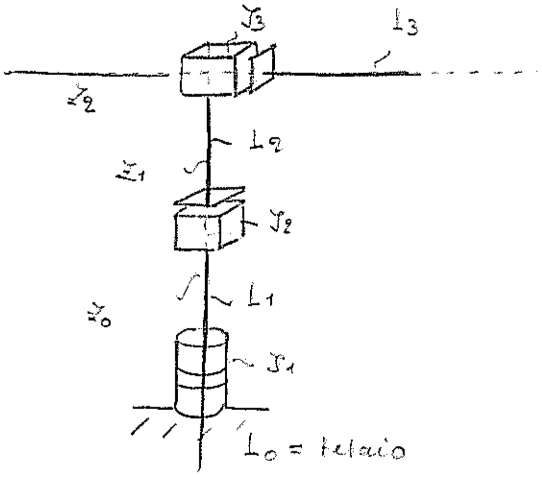
$$
{}^0T_2 = {}^0T_1\,{}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

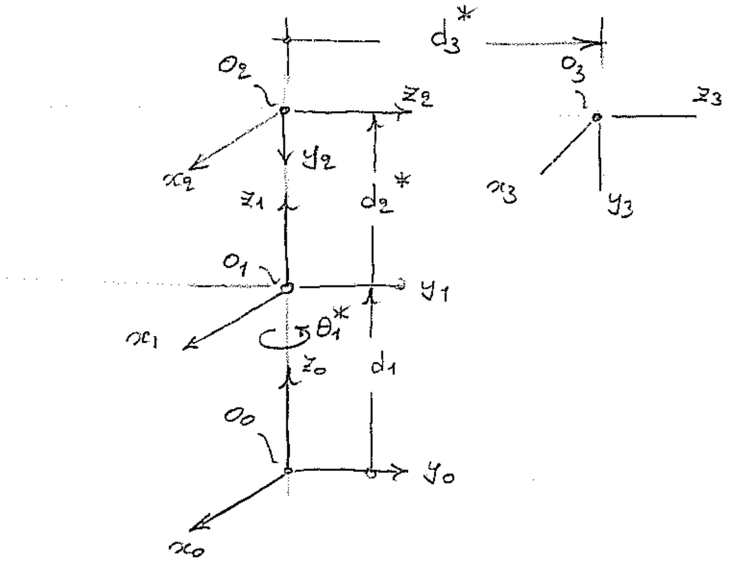
con il ben noto significato delle porzioni di ${}^0T_2$

$$
{}^0T_2 = \left[\begin{array}{c|c} {}^0R_2 & {}^0d_2 \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right]
$$

Robot cilindrico a 3 bracci

Schema cinematico





In questo caso l'unica origine che posso fissare è O_2. $z_0 \equiv z_1$ cosicché non riesco a fissare O_1. Anche direzioni (e versi) degli assi li stabilisco con una certa dose di arbitrarietà. Fissato z_1 verso l'alto e z_2 verso destra fisso x_2 uscente cosicché da z_1 vado su z_2 ruotando di $\alpha_2 = -\pi/2$ attorno a x_2. Poi y_2 viene verso il basso. La O_1 la fisso all'altezza del "centro" della coppia prismatica "fisica" di asse J_2. Prendo z_1 verso l'alto e x_1 uscente cosicché è $x_1 \equiv x_2$.
Poi metto O_0 in basso "al suolo" con z_0 verso l'alto e x_0 allineato nella config. di riferimento con x_1 e y_0 da $\{S_0\}$ levogira.
Allora nel disegno identifico i vari parametri di Denavit-Hartenberg.
Mentre per $\{S_3\}$ posso scegliere un frame traslato lungo z_2 di d_3^*.
Basta che x_3 sia ortog. ed intersechi z_2.
Segue la tabella di Denavit-Hartenberg per queste scelte di assi ed origini.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1^*
2	0	$-\pi/2$	d_2^*	0
3	0	0	d_3^*	0

Le singole matrici risultano (anche direttamente ad occhio)

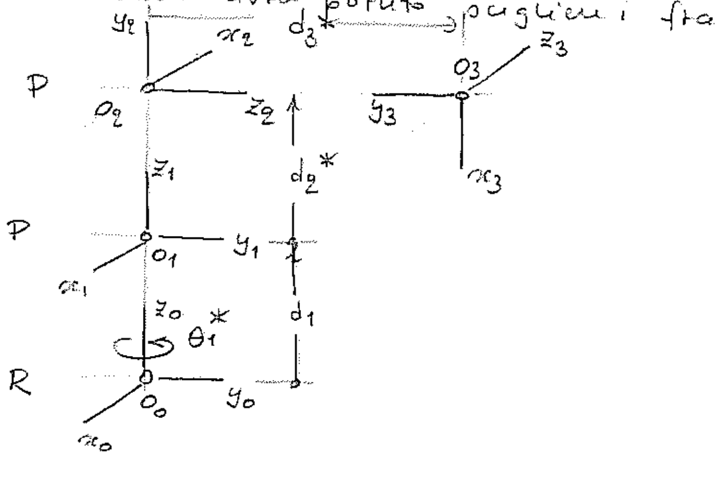
$$^0T_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right];$$

$$^1T_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right];$$

$$^2T_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right];$$

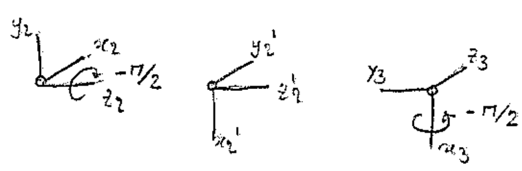
Allora $\;^0T_3 = {}^0T_1\,{}^1T_2\,{}^2T_3 = {}^0T_3(\theta_1, d_2, d_3)$

Vediamo come avrei potuto scegliere i frame altrimenti



In questo caso, ossia per queste scelte dei sistemi di riferimento, la tabella di D-H risulta

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1^*
2	0	$\pi/2$	d_2^*	π
3	0	$-\pi/2$	d_3^*	$-\pi/2$



Vediamo ancora un'altro caso

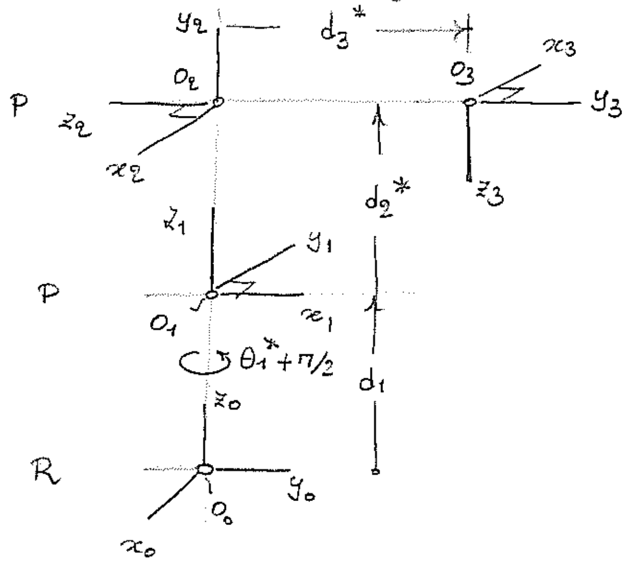
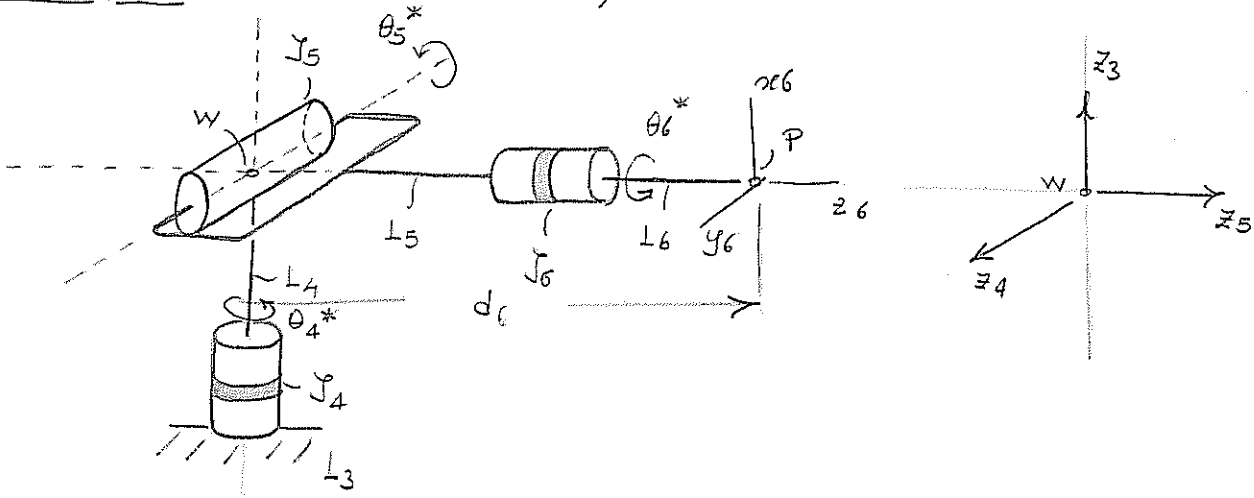


tabella di D-H in questo caso

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	$\theta_1^* + \pi/2$
2	0	$\pi/2$	d_2^*	$-\pi/2$
3	0	$-\pi/3$	d_3^*	π

Altro caso

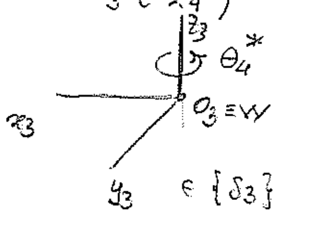
<u>Polso sferico</u> (spherical wrist)

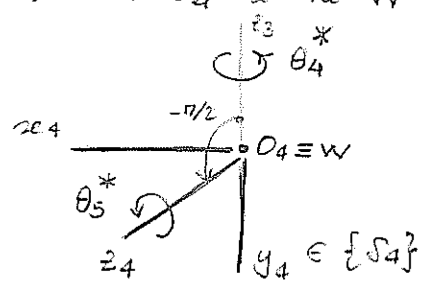


nominiamo link di base come L_3 come se fosse a valle di tre moti (di già) e i link sono L_4, L_5 ed L_6.

Per gli assi posso fissare z_3, z_4 e z_5 come in figura (in modo senso arbitrario)

L'origine di $\{S_4\}$, ossia O_4 è in W (ossia nella intersezione fra z_3 e z_4)





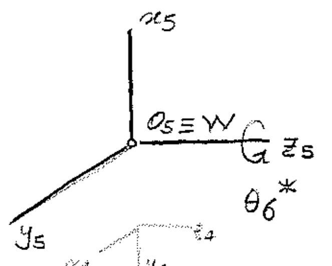
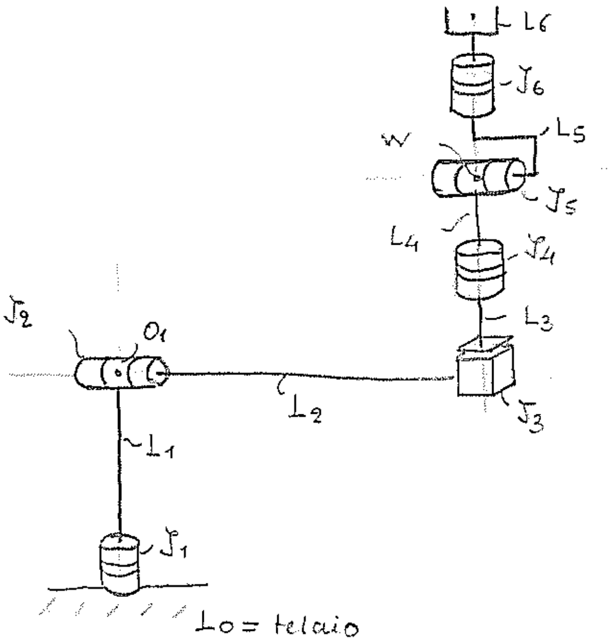


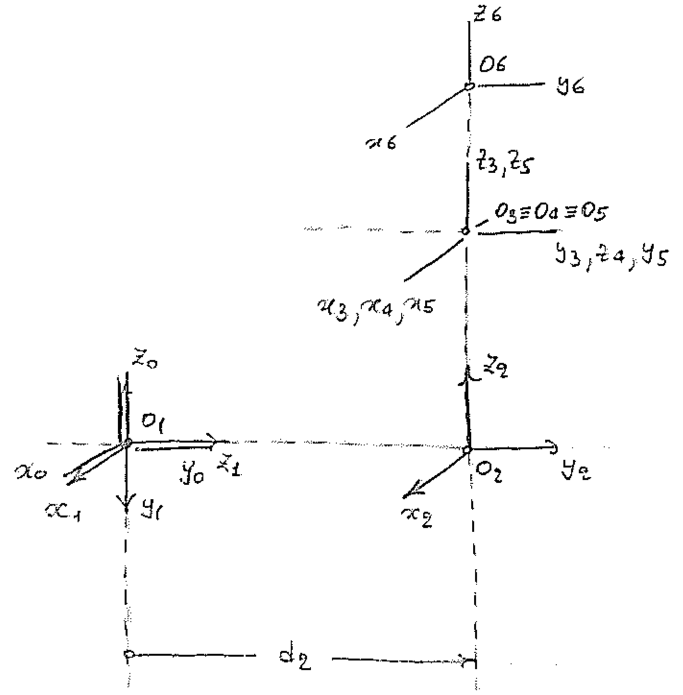
Tabella di D-H per polso sferico

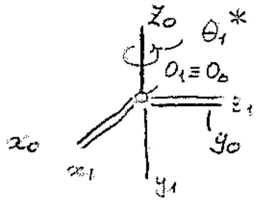
	Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
$\{S_3\} \to \{S_4\}$	4	0	$-\pi/2$	0	θ_4^*
$\{S_4\} \to \{S_5\}$	5	0	$\pi/2$	0	$\theta_5^* - \pi/2$
$\{S_5\} \to \{S_6\}$	6	0	0	d_6	θ_6^*

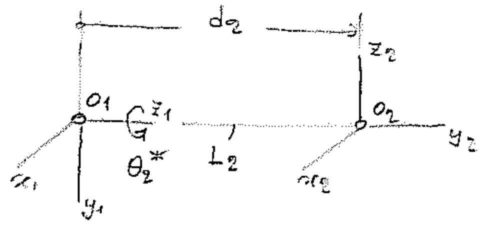
← attenzione all'offset di angolo per $\theta_5^* = 0$, ovvia al fatto che per $\theta_5^* = 0$ gli assi x_4 e x_5 non sono allineati ed equiversi.

Manipolatore di Stanford



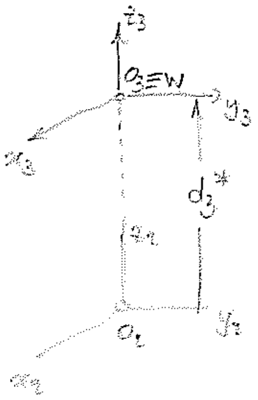


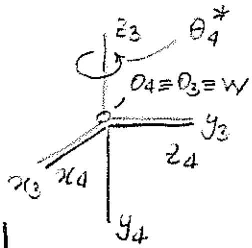


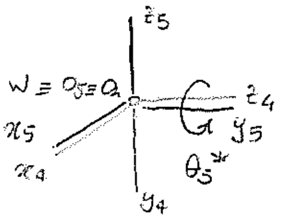


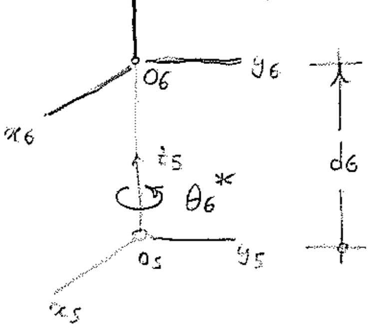
$\{S_0\}$ fisso, e telaio

$\{S_1\} \in L_1$, O_1 e z_1 su e dell'asse giunto a valle (J_2)









Allora per queste scelte dei sistemi di riferimento si ha:

Tabella di D-H per manipolatore di Stanford

	Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
$\{S_0\} \to \{S_1\}$	1	0	$-\pi/2$	0	θ_1^*
$\{S_1\} \to \{S_2\}$	2	0	$\pi/2$	d_2	θ_2^*
$\{S_2\} \to \{S_3\}$	3	0	0	d_3^*	0
$\{S_3\} \to \{S_4\}$	4	0	$-\pi/2$	0	θ_4^*
$\{S_4\} \to \{S_5\}$	5	0	$\pi/2$	0	θ_5^*
$\{S_5\} \to \{S_6\}$	6	0	0	d_6	θ_6^*

dunque la trasformazione complessiva risulta

$$^0T_6(\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = {}^0T_1\,{}^1T_2\,{}^2T_3\,{}^3T_4\,{}^4T_5\,{}^5T_6 .$$

"Rules of thumb" per fissare frame di Denavit-Hartenberg ed estrarre i parametri da mettere in tabella.

1) Fissare assi z_{i-1} come assi dei giunti J_i (z_0 è asse di J_1)

2) Fissare x_i in modo che sia possibile sovrapporre z_{i-1} a z_i ruotando di α_i attorno a x_i

3) Stare attenti al fatto che se $\theta_i = 0$, $x_{i-1} \equiv x_i$

4) d_i è la componente di $O_{i-1}O_i$ lungo z_{i-1}

a_i è la componente di $O_{i-1}O_i$ lungo x_i