

Esercitazioni  
di

# **Meccanica Applicata alle Macchine**

A cura di  
**Andrea Bracci**  
**Marco Gabiccini**

Università di Pisa

**Dipartimento di Ingegneria Meccanica,  
Nucleare e della Produzione**

Anno Accademico 2009-2010

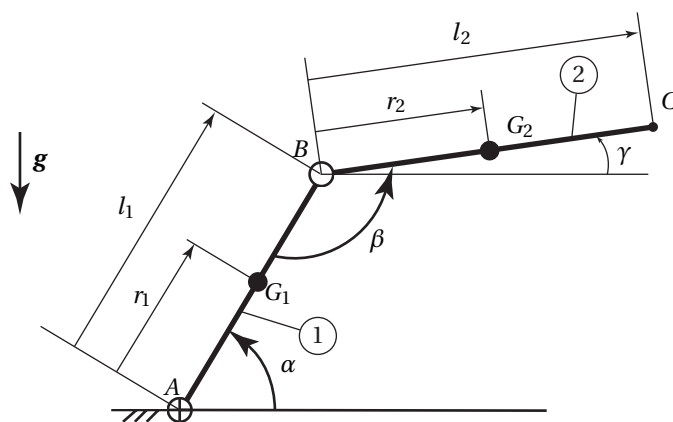
# Indice

---

1	Semplice Cinematismo Planare . . . . .	1
2	Quadrilatero Articolato . . . . .	9
3	Disco Asimmetrico . . . . .	18
4	Slitta con Attrito . . . . .	26
5	Frenatura di un Disco . . . . .	31
6	Frenatura di un Disco con un Peso . . . . .	34
7	Frenatura di un Disco con Molle Precaricate . . . . .	36
8	Carrello con Peso e Attrito . . . . .	39
9	Oscillazioni Libere di un Sistema a 1 GDL . . . . .	42
10	Oscillazioni di un Cinematismo a 1 GDL . . . . .	47
11	Oscillazioni Libere di un Sistema a 2 GDL . . . . .	51
12	Oscillazioni Forzate . . . . .	54
13	Oscillazioni Forzate del Doppio Pendolo . . . . .	60
14	Oscillazioni Forzate 2 . . . . .	64
15	Oscillazioni Forzate 3 . . . . .	69
16	Ruote Dentate a Evolvente . . . . .	72
17	Oscillazioni di un Rotismo . . . . .	84
18	Lubrificazione . . . . .	88
19	Grado di irregolarità di una camma . . . . .	100
20	Grado di irregolarità di un manovellismo di spinta . . . . .	106

## Semplice Cinematismo Planare

---



**Figura 1.1** Schema di un semplice cinematismo planare a due gradi di libertà.

Si consideri lo schema cinematico riportato in Fig. 1.1. Si suppongono completamente note la geometria e le caratteristiche d'inerzia di entrambi i corpi rigidi: lunghezza  $l_i$ , distanza del baricentro  $r_i$  dai punti  $A$  e  $B$  rispettivamente, massa  $m_i$  e momento d'inerzia baricentrico  $J_{G_i}$ . Inoltre si suppongono note le leggi orarie  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$ . (**Nota:**  $\beta(t)$  è l'angolo relativo fra i due corpi rigidi come indicato in Fig. 1.1.)

Si risolvano i seguenti problemi:

- Determinare le velocità e le accelerazioni di ogni punto dei due corpi.
- Determinare le coppie da fornire ai giunti per realizzare il moto imposto e, contestualmente, determinare le reazioni vincolari e le forze scambiate sui giunti.

### 1.1 Analisi cinematica

---

In via preliminare si calcola l'angolo di rotazione del corpo rigido ② rispetto ad una retta parallela all'asse orizzontale. Tale angolo, indicato con  $\gamma$  è tale per cui

$$\pi - \beta + \gamma = \alpha.$$

Ne discendono quindi le seguenti relazioni.

$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha + \beta - \pi \\ \dot{\gamma} &= \dot{\alpha} + \dot{\beta} \\ \ddot{\gamma} &= \ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\end{aligned}$$

Nel seguito risulterà comodo ricorrere a queste espressioni nel calcolo delle velocità e delle posizioni dei punti dei corpi rigidi.

### 1.1.1 Metodo analitico

#### Velocità

Per risolvere analiticamente il sistema in esame si ricorre alle formule fondamentali della cinematica. In particolare valgono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_A + \dot{\alpha} \mathbf{k} \wedge AB \quad (1.1)$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB} = \mathbf{v}_B + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \mathbf{k} \wedge BC \quad (1.2)$$

dove  $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$  perchè il punto  $A$  è vincolato al telaio. Essendo noti sia  $\dot{\alpha}$  che  $\dot{\beta}$ , risultano determinabili direttamente le velocità di ogni altro punto di entrambi i corpi rigidi.

Attenzione: le formule precedenti sono un caso particolare della seguente formula fondamentale della cinematica:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_B^t + \mathbf{v}_B^r \quad (1.3)$$

dove  $\mathbf{v}_B^t$  e  $\mathbf{v}_B^r$  sono rispettivamente la velocità di trascinamento e la velocità relativa di  $B$  rispetto ad un dato sistema di riferimento. Nel caso delle relazioni (1.1) abbiamo:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_B^t + \mathbf{v}_B^r = \mathbf{v}_A + \dot{\alpha} \mathbf{k} \wedge AB$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_C^t + \mathbf{v}_C^r = \mathbf{v}_B + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \mathbf{k} \wedge BC$$

dove, per quanto riguarda il punto  $B$ , è stato scelto un sistema di riferimento fisso, mentre per il punto  $C$  è stato scelto un sistema di riferimento **traslante** e solidale con il punto  $B$ .

È interessante trovare le relazioni (1.1) considerando un sistema di riferimento diverso. Ad esempio, la velocità del punto  $C$  può essere determinata scegliendo un sistema di riferimento **rotante** solidale con il corpo ①. In questo caso avremo:

$$\tilde{\mathbf{v}}_C^r = \dot{\beta} \mathbf{k} \wedge BC$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_C^t = \dot{\alpha} \mathbf{k} \wedge AC$$

Il vettore  $AC$  può essere scomposto come segue

$$AC = AB + BC$$

ne discende che la velocità assoluta del punto  $C$  può essere scritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_C &= \tilde{\mathbf{v}}_C^r + \tilde{\mathbf{v}}_C^t = \dot{\beta} \mathbf{k} \wedge BC + \dot{\alpha} \mathbf{k} \wedge (AB + BC) \\ &= \dot{\alpha} \mathbf{k} \wedge AB + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \mathbf{k} \wedge BC\end{aligned}$$

che risulta identica alla (1.1) in quanto  $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{v}_{BA} = \dot{\alpha} \mathbf{k} \wedge AB$ . Si fa notare che questo secondo metodo risulta più laborioso rispetto all'utilizzo diretto delle (1.1).

## Accelerazioni

Per quanto riguarda il calcolo delle accelerazioni si procede in maniera analoga a quanto visto per le velocità. Si utilizzano le seguenti relazioni fondamentali (teorema di Rivals):

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} = \ddot{\alpha} \mathbf{k} \wedge AB - \dot{\alpha}^2 AB \\ \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB} = \mathbf{a}_B + (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \mathbf{k} \wedge BC - (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 BC\end{aligned}\quad (1.4)$$

in quanto  $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$  essendo il punto  $A$  rigidamente vincolato al telaio. Come visto in precedenza, dato che gli andamenti temporali di  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  sono noti, dalle relazioni precedenti si possono determinare le accelerazioni di tutti i punti dei due corpi rigidi.

Analogamente al caso delle velocità le relazioni (1.4) sono un caso particolare della seguente formula fondamentale della cinematica:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B^r + \mathbf{a}_B^t + \mathbf{a}_B^c \quad (1.5)$$

dove  $\mathbf{a}_B^r$ ,  $\mathbf{a}_B^t$  e  $\mathbf{a}_B^c$  sono rispettivamente l'accelerazione di  $B$  relativa, di trascinamento e di Coriolis. Nel caso delle (1.4) l'accelerazione di Coriolis è nulla in quanto i sistemi di riferimento scelti sono traslanti. Pertanto valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B^t &= \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_B^r &= \ddot{\alpha} \mathbf{k} \wedge AB - \dot{\alpha}^2 AB \\ \mathbf{a}_C^t &= \mathbf{a}_B \\ \mathbf{a}_C^r &= (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \mathbf{k} \wedge BC - (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 BC\end{aligned}$$

Anche in questo caso è interessante determinare le accelerazioni dei punti utilizzando un sistema di riferimento diverso. Ad esempio per determinare l'accelerazione del punto  $C$  possiamo scegliere un sistema di riferimento **rotante** solidale al corpo ①. In questo caso valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}}_C^t &= \ddot{\alpha} \mathbf{k} \wedge AC - \dot{\alpha}^2 AC \\ \tilde{\mathbf{a}}_C^r &= \ddot{\beta} \mathbf{k} \wedge BC - \dot{\beta}^2 BC \\ \tilde{\mathbf{a}}_C^c &= 2\dot{\alpha} \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{v}}_C^r\end{aligned}$$

L'espressione di  $\tilde{\mathbf{v}}_C^r$  è direttamente ricavata dall'analisi di velocità svolta in precedenza. Ne risulta quindi

$$\tilde{\mathbf{a}}_C^c = 2\dot{\alpha} \mathbf{k} \wedge (\dot{\beta} \mathbf{k} \wedge BC) = -2\dot{\alpha} \dot{\beta} BC$$

Sommando i tre termini appena trovati si ottiene la seguente relazione

$$\mathbf{a}_C = \tilde{\mathbf{a}}_C^t + \tilde{\mathbf{a}}_C^r + \tilde{\mathbf{a}}_C^c = \ddot{\alpha} \mathbf{k} \wedge AC - \dot{\alpha}^2 AC + \ddot{\beta} \mathbf{k} \wedge BC - \dot{\beta}^2 BC - 2\dot{\alpha} \dot{\beta} BC$$

Scomponendo il vettore  $AC = AB + BC$  e sviluppando i conti si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_C &= \ddot{\alpha} \mathbf{k} \wedge AB - \dot{\alpha}^2 AB \\ &\quad + (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \mathbf{k} \wedge BC \\ &\quad - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) BC - 2\dot{\alpha} \dot{\beta} BC\end{aligned}$$

da cui

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \mathbf{k} \wedge BC - (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 BC$$

che risulta identica alla (1.4).

### 1.1.2 Metodo grafico

Il metodo grafico consente di determinare, in una particolare configurazione, i valori delle velocità e delle accelerazioni di ogni punto dei corpi rigidi. Il procedimento da seguire è qui riportato.

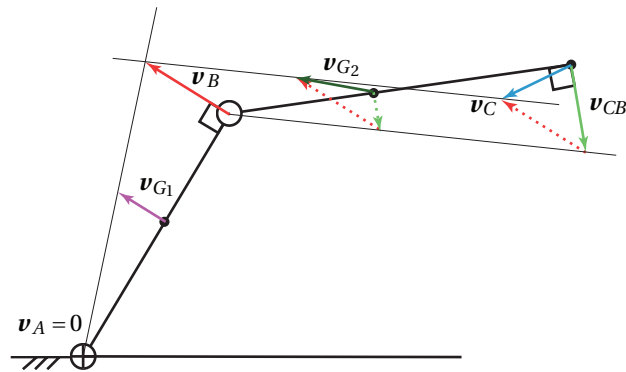


Figura 1.2 Determinazione grafica delle velocità.

- si traccia la velocità  $v_B$  (assoluta) ortogonale all'asta ① (ricordarsi che  $v_A = \mathbf{0}$ ) e diretta in maniera congruente con il segno della velocità angolare  $\dot{\alpha}$  (nel caso in figura si è posto  $\dot{\alpha} > 0$ );
- si traccia la velocità  $v_{CB}$  (relativa) ortogonale all'asta ②. In questo caso è stata assunta una velocità angolare  $\dot{\beta}$  tale che  $\dot{\gamma} = \dot{\alpha} + \dot{\beta} < 0$ ;
- si ricava la velocità  $v_C$  assoluta sommando i due vettori ( $v_B$  e  $v_{CB}$ ) precedentemente trovati.

Si noti che la costruzione grafica sopra riportata è stata effettuata direttamente sui punti dei due corpi rigidi, ma dato che le velocità sono vettori liberi (cioè non applicati ad un particolare punto) la costruzione grafica può essere effettuata trasportando i vettori in qualunque altro punto del piano.

Per quanto riguarda le accelerazioni si procede in modo analogo come sotto riportato:

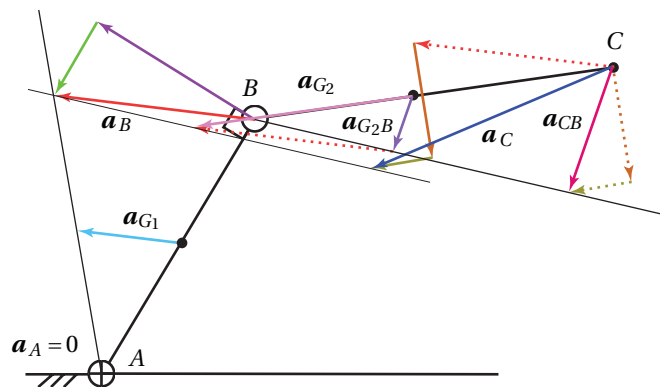


Figura 1.3 Determinazione grafica delle accelerazioni.

- si riportano nel punto  $B$  le due componenti dell'accelerazione del punto  $B$  e si sommano. Il risultato della somma è l'accelerazione assoluta del punto  $B$ . Il valore di  $\ddot{\alpha}$  è

- assunto positivo. E' importante notare che la componente radiale dell'accelerazione è diretta lungo  $BA$ , cioè *da B verso A*, ovvero verso il centro di rotazione del corpo ①;
- si riporta sul punto  $C$  l'accelerazione  $\mathbf{a}_B$  appena trovata;
- si riportano *in cascata*, a partire dalla punta di  $\mathbf{a}_B$  le due componenti (tangenziale e radiale) dell'accelerazione *relativa* del punto  $C$  rispetto a  $B$ . Anche in questo caso si è assunto che  $\ddot{\beta}$  sia tale per cui  $\dot{\gamma} < 0$ ;
- si ricava l'accelerazione  $\mathbf{a}_C$  assoluta, sommando i tre vettori così concatenati.

E' importante notare che con il procedimento appena esposto si possono determinare le velocità e le accelerazioni di qualunque punto dei due corpi rigidi. In particolare è possibile ricavare le velocità e le accelerazioni dei due baricentri.

A titolo d'esempio: per determinare l'accelerazione assoluta del baricentro  $G_1$  del corpo ① si traccia la retta passante per  $A$  e per la punta del vettore  $\mathbf{a}_B$ . Si traccia poi la parallela ad  $\mathbf{a}_B$  passante per  $G_1$ . Il vettore così determinato è  $\mathbf{a}_{G_1}$  (si veda ancora Fig. 1.3).

Per quanto riguarda l'accelerazione  $\mathbf{a}_{G_2}$  del baricentro  $G_2$  del corpo ② il procedimento è analogo, facendo attenzione al fatto che in questo caso, l'accelerazione del punto  $B$  non è nulla.

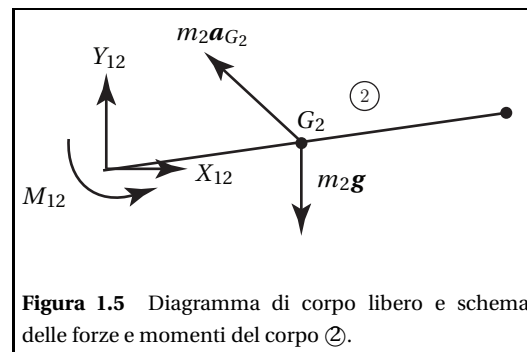
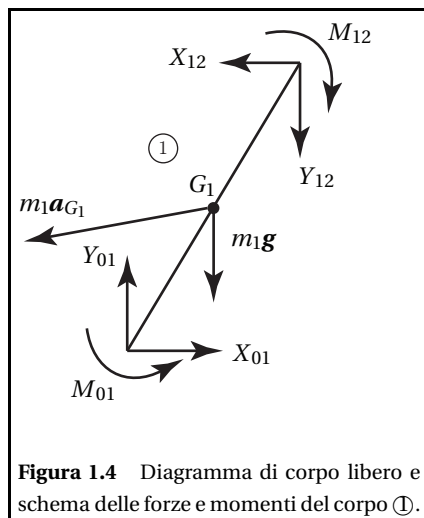
Anche nel caso delle accelerazioni è possibile effettuare la costruzione grafica in qualunque altro punto del piano in quanto anche le accelerazioni sono vettori liberi.

## 1.2 Analisi dinamica

Una volta che sono state determinate le velocità e le accelerazioni dei corpi rigidi si determinano le forze e i momenti necessari ad ottenere il moto imposto.

### 1.2.1 Metodo analitico

Si riportano innanzitutto gli diagrammi di corpo libero dei due corpi rigidi. Le equazioni di



equilibrio di ① in un sistema di riferimento fisso sono le seguenti

$$\begin{aligned}
 m_1 a_{G_1x} &= X_{01} - X_{12} \\
 m_1 a_{G_1y} &= Y_{01} - m_1 g - Y_{12} \\
 \textcircled{G}_1: J_{G_1} \ddot{\alpha} &= M_{01} - M_{12} + X_{01} r_1 \sin(\alpha) - Y_{01} r_1 \cos(\alpha) + \\
 &\quad + X_{12} (l_1 - r_1) \sin(\alpha) - Y_{12} (l_1 - r_1) \cos(\alpha)
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

dove l'equazione di equilibrio alla rotazione è scritta rispetto al baricentro  $G_1$ .

Per il corpo ② si procede in maniera analoga e le equazioni di equilibrio risultano le seguenti:

$$\begin{aligned}
 m_2 a_{G_2x} &= X_{12} \\
 m_2 a_{G_2y} &= Y_{12} - m_2 g \\
 \textcircled{G}_2: J_{G_2} (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) &= M_{12} + X_{12} r_2 \sin(\alpha + \beta - \pi) - Y_{12} r_2 \cos(\alpha + \beta - \pi)
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

L'insieme delle (1.6) e (1.7) costituisce un sistema di sei equazioni nelle sei incognite

$$(X_{01}, Y_{01}, M_{01}, X_{12}, Y_{12}, M_{12})$$

che può pertanto essere risolto analiticamente. (**Nota: si ricordi che la geometria, le caratteristiche d'inerzia e l'andamento temporale di  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  sono noti.**)

Il sistema in esame può essere risolto in modo più semplice notando che le equazioni (1.7) sono disaccoppiate dalle (1.6). Per questo motivo è possibile risolvere separatamente le (1.7) e successivamente le (1.6).

Si ricorda che le equazioni di equilibrio a momento in (1.6) e (1.7) sono scritte rispetto al baricentro dei corpi rigidi. Consideriamo ora il caso in cui si scelga come polo un punto diverso. In particolare andiamo a scrivere le equazioni di equilibrio al momento rispetto al punto  $A$  per ① e rispetto al punto  $B$  per ②.

Il punto  $A$  è un punto fisso e quindi risulta facile scrivere l'equazione di equilibrio alla rotazione:

$$J_{A_1} \ddot{\alpha} = (J_{G_1} + m_1 r_1^2) \ddot{\alpha} = M_{01} - M_{12} - m_1 g r_1 \cos(\alpha) + X_{12} l_1 \sin(\alpha) - Y_{12} l_1 \cos(\alpha) \tag{1.8}$$

dove  $J_{A_1} = (J_{G_1} + m_1 r_1^2)$  per il teorema di Huygens-Steiner. Andiamo a verificare che l'equazione appena scritta equivale alla terza equazione di (1.7). Calcoliamo la differenza fra le due equazioni e verifichiamo l'uguaglianza dei termini rimanenti. Nella differenza si eliminano i termini uguali  $J_{G_1} \ddot{\alpha}$ ,  $M_{01}$ ,  $M_{12}$ ,  $X_{12} l_1 \sin(\alpha)$  e  $Y_{12} l_1 \cos(\alpha)$  e rimane quindi

$$m_1 r_1^2 \ddot{\alpha} = -m_1 g r_1 \cos(\alpha) - (X_{01} - X_{12}) r_1 \sin(\alpha) + (Y_{01} - Y_{12}) r_1 \cos(\alpha)$$

che per le equazioni di equilibrio alla traslazione diventa

$$m_1 r_1^2 \ddot{\alpha} = -m_1 a_{G_1x} r_1 \sin(\alpha) + m_1 a_{G_1y} r_1 \cos(\alpha)$$

Dalla cinematica si ricavano le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
 a_{G_1x} &= \ddot{\alpha} r_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \dot{\alpha}^2 r_1 \cos(\alpha) = -\ddot{\alpha} r_1 \sin(\alpha) - \dot{\alpha}^2 r_1 \cos(\alpha) \\
 a_{G_1y} &= \ddot{\alpha} r_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \dot{\alpha}^2 r_1 \sin(\alpha) = \ddot{\alpha} r_1 \cos(\alpha) - \dot{\alpha}^2 r_1 \sin(\alpha)
 \end{aligned}$$

Sostituendo tali relazioni si ottiene

$$\begin{aligned}
 m_1 r_1^2 \ddot{\alpha} &= m_1 r_1^2 (\sin^2(\alpha) + \cos(\alpha) \sin(\alpha)) \ddot{\alpha} + m_1 r_1^2 (\cos^2(\alpha) - \cos(\alpha) \sin(\alpha)) \ddot{\alpha} \\
 m_1 r_1^2 \ddot{\alpha} &= m_1 r_1^2 \ddot{\alpha}
 \end{aligned}$$



che dimostra l'uguaglianza delle due equazioni di equilibrio a momento del corpo ① scritte rispetto a poli diversi.

Passiamo ora a scrivere l'equazione di equilibrio alla rotazione per il corpo ② rispetto al punto mobile  $B$  (per semplicità di notazione useremo la forma vettoriale):

$$\begin{aligned} \textcircled{B} : \mathbf{M}_{12} + BG_2 \wedge m_2 \mathbf{g} &= \dot{\mathbf{K}}_B^r + \mathbf{v}_B \wedge (m_2 \mathbf{v}_{G_2}) = \dot{\mathbf{K}}_{G_2}^r + BG_2 \wedge (m_2 \mathbf{a}_{G_2}) \\ &= J_{G_2} \ddot{\mathbf{k}} + BG_2 \wedge (m_2 \mathbf{a}_{G_2}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

L'espressione vettoriale dell'equilibrio alla rotazione intorno a  $G_2$  è invece la seguente:

$$\textcircled{G_2} : \mathbf{M}_{12} + G_2 B \wedge \mathbf{R}_{12} = \dot{\mathbf{K}}_{G_2}^r = J_{G_2} \ddot{\mathbf{k}} \quad (1.10)$$

Dalle equazioni di equilibrio alla traslazione del corpo ② si ottiene

$$\mathbf{R}_{12} + m_2 \mathbf{g} = m_2 \mathbf{a}_{G_2}$$

da cui, sostituendo nella (1.9) si ottiene

$$\begin{aligned} J_{G_2} \ddot{\mathbf{k}} + BG_2 \wedge (m_2 \mathbf{a}_{G_2}) &= \mathbf{M}_{12} + BG_2 \wedge (m_2 \mathbf{a}_{G_2} - \mathbf{R}_{12}) \\ &= \mathbf{M}_{12} + G_2 B \wedge (\mathbf{R}_{12} - m_2 \mathbf{a}_{G_2}) \end{aligned}$$

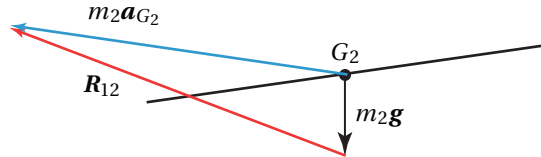
da cui ricordandosi che  $BG_2 \wedge (m_2 \mathbf{a}_{G_2}) = -G_2 B \wedge (m_2 \mathbf{a}_{G_2})$  si ottiene

$$J_{G_2} \ddot{\mathbf{k}} = \mathbf{M}_{12} + G_2 B \wedge \mathbf{R}_{12}$$

che è identica alla (1.10).

### 1.2.2 Metodo grafico

Passiamo ora a determinare graficamente la soluzione della dinamica nella configurazione rappresentata. Cominciamo con la soluzione per il corpo ②. Per prima cosa notiamo che la reazione  $\mathbf{R}_{12}$  che il corpo ① esercita sul corpo ② è l'unica forza incognita e che quindi può essere completamente determinata imponendo l'equilibrio con le altre forze che agiscono sul corpo.



**Figura 1.6** Soluzione grafica per le forze agenti sul corpo ②. Attenzione: il vettore  $m_2 \mathbf{a}_{G_2}$  è stato modificato per maggiore chiarezza.

Rimane da determinare il momento  $\mathbf{M}_{12}$  applicato a ②. Facendo riferimento a (1.10) si ricava facilmente

$$\mathbf{M}_{12} = J_{G_2} (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \mathbf{k} - G_2 B \wedge \mathbf{R}_{12}$$

Per determinare le forze e i momenti necessari all'equilibrio del corpo ① si procede in maniera analoga: la forza  $\mathbf{R}_{01}$  si determina imponendo l'equilibrio alla traslazione secondo (1.6). Per determinare invece il momento  $\mathbf{M}_{01}$  si utilizza la seguente relazione, ricavata da (1.8):

$$\mathbf{M}_{01} = J_{A_1} \ddot{\alpha} \mathbf{k} - AG_1 \wedge (m_1 \mathbf{g}) - AB \wedge \mathbf{R}_{12} - \mathbf{M}_{21}$$

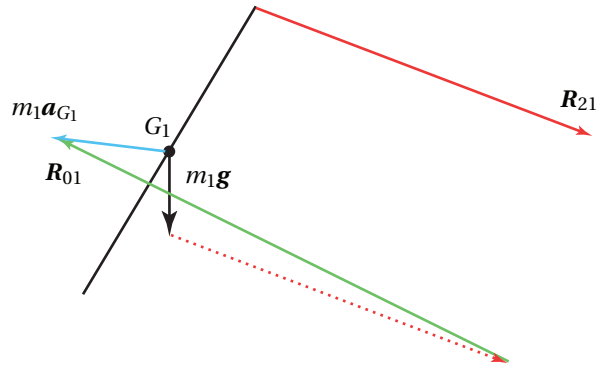


Figura 1.7 Soluzione grafica per le forze agenti sul corpo ①.

## 1.3 Extra

Le equazioni che regolano la dinamica di un sistema meccanico possono essere determinate attraverso le equazioni di Lagrange. A tal fine è necessario determinare correttamente l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema. Questa parte è dedicata al calcolo di entrambi questi termini, rimandando ad altre sezioni il calcolo della dinamica mediante le equazioni di Lagrange.

### 1.3.1 Energia potenziale

L'energia potenziale  $\mathcal{U}$  del sistema è dovuta, in questo caso, solamente agli effetti gravitazionali dei due corpi rigidi in quanto non sono presenti altre forze di tipo conservativo. Risulta quindi

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = m_1 g r_1 \sin \alpha + m_2 g (l_1 \sin \alpha + r_2 \sin(\alpha + \beta - \pi))$$

### 1.3.2 Energia cinetica

Per quanto riguarda l'energia cinetica si sommano le energie cinetiche dei due corpi rigidi. Dato che il sistema in esame è piano, per ogni corpo rigido vale la seguente relazione

$$\mathcal{F}_i = \frac{1}{2} m_i v_{G_i}^2 + \frac{1}{2} J_{G_i} \omega_i^2$$

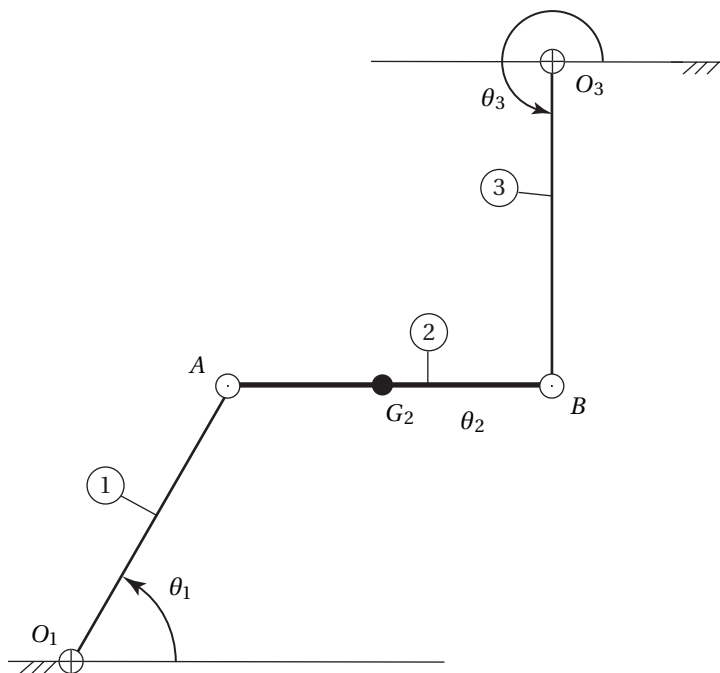
dove  $\mathcal{F}_i$  è l'energia cinetica del corpo  $i$  e  $\omega_i$  è la velocità angolare del corpo intorno all'asse  $z$  ortogonale al piano. L'energia cinetica del sistema in esame risulta quindi

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 = \frac{1}{2} m_1 v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} J_{G_1} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} J_{G_2} (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2$$

della quale, una volta risolta la cinematica, tutte le grandezze sono note.

## Quadrilatero Articolato

---



**Figura 2.1** Schema di un quadrilatero articolato.

Si consideri il sistema in Fig. 2.1. Il cinematismo in esame è un quadrilatero articolato. Sono note tutte le lunghezze dei tre corpi rigidi e si suppone che solamente il corpo ② sia dotato di massa  $m_2$  e momento d'inerzia baricentrico  $J_{G_2}$ . Gli altri corpi rigidi sono considerati privi di massa. Per semplicità si assume di essere in un piano orizzontale e quindi non ha effetto la forza di gravità.

Sia assegnato l'andamento temporale  $\theta_1(t)$ , si determini il momento  $M_{O_1}$  necessario da applicare al corpo ① al fine di ottenere il moto imposto.

### 2.1 Analisi cinematica

---

Risolviamo innanzitutto la cinematica del sistema determinando le velocità e le accelerazioni di ogni punto dei corpi rigidi.

## 2.1.1 Metodo analitico

### Velocità

Per quanto riguarda il corpo ① valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{O_1} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_A &= \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \wedge O_1 A\end{aligned}\quad (2.1)$$

Per il corpo ② vale quanto segue:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_A + \dot{\theta}_2 \mathbf{k} \wedge AB \quad (2.2)$$

Considerando il punto  $B$  appartenente al corpo ③ si ha anche

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{O_3} + \mathbf{v}_{BO_3} = \dot{\theta}_3 \mathbf{k} \wedge O_3 B \quad (2.3)$$

per cui, in definitiva si ottiene la seguente relazione:

$$\dot{\theta}_1 \mathbf{k} \wedge O_1 A + \dot{\theta}_2 \mathbf{k} \wedge AB = \dot{\theta}_3 \mathbf{k} \wedge O_3 B \quad (2.4)$$

che è la relazione di *chiusura* della catena cinematica. La (2.4) consiste di due equazioni scalari nelle due incognite  $\dot{\theta}_2$  e  $\dot{\theta}_3$  e pertanto può essere risolta analiticamente.

### Accelerazioni

Per quanto riguarda le accelerazioni del corpo ① valgono le classiche relazioni:

$$\mathbf{a}_{O_1} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{O_1} + \mathbf{a}_{AO_1} = \ddot{\theta}_1 \mathbf{k} \wedge O_1 A - \dot{\theta}_1^2 O_1 A \quad (2.6)$$

Analogamente per il corpo ② valgono

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \ddot{\theta}_2 \mathbf{k} \wedge AB - \dot{\theta}_2^2 AB \quad (2.7)$$

Come visto in precedenza per le velocità, l'accelerazione del punto  $B$  considerato appartenente al corpo ③ è la seguente

$$\mathbf{a}_B = \ddot{\theta}_3 \mathbf{k} \wedge O_3 B - \dot{\theta}_3^2 O_3 B \quad (2.8)$$

Imponendo l'uguaglianza delle (2.7) e (2.8) si ottiene

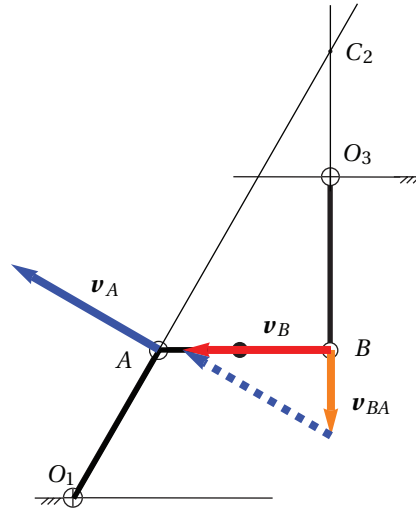
$$\mathbf{a}_A + \ddot{\theta}_2 \mathbf{k} \wedge AB - \dot{\theta}_2^2 AB = \ddot{\theta}_3 \mathbf{k} \wedge O_3 B - \dot{\theta}_3^2 O_3 B \quad (2.9)$$

che è la relazione di *chiusura* della catena cinematica. Come visto in precedenza, la (2.9) consiste di due equazioni nelle due incognite  $\ddot{\theta}_2$  e  $\ddot{\theta}_3$  e può quindi essere risolta analiticamente.

## 2.1.2 Metodo grafico

Per determinare graficamente le velocità di ogni punto dei corpi rigidi in una particolare configurazione è necessario *risolvere* la catena cinematica chiusa. Si deve trovare quindi una relazione che leghi le velocità angolari dei corpi rigidi.

Si faccia riferimento alla Fig. 2.2. Cominciamo notando che dei corpi ① e ③ sappiamo che hanno un moto rotatorio intorno a  $O_1$  e  $O_3$  rispettivamente. Il corpo ②, invece, ha in generale un moto vario, ancora incognito. Il centro delle velocità  $C_2$  di ② è facilmente determinabile in



**Figura 2.2** Costruzione grafica delle velocità.

quanto conosciamo la direzione della velocità dei due punti  $A$  e  $B$ . Il punto  $C_2$  risulta quindi dall'intersezione dei prolungamenti di  $O_1A$  e  $O_3B$ .

Dato che conosciamo la velocità  $v_A$ , la velocità del punto  $B$  può essere determinata completamente in quanto la velocità angolare  $\omega_2$  di ② è calcolata tramite la seguente relazione

$$\omega_2 = \dot{\theta}_2 \mathbf{k} = \frac{\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{C}_2A}{|C_2A|^2}$$

e la velocità  $v_B$  risulta

$$\mathbf{v}_B = \dot{\theta}_2 \mathbf{k} \wedge \mathbf{C}_2B$$

La velocità angolare  $\omega_2$  può essere ricavata anche risolvendo la (2.4) nelle due incognite  $\dot{\theta}_2$  e  $\dot{\theta}_3$ .

Graficamente la velocità  $v_B$  si determina attraverso il campo di velocità di ② tracciato da  $C_2$  ad  $A$ . Alternativamente si può procedere nel modo seguente:

- si riporta la velocità  $v_A$  in  $B$ ;
- si traccia una retta parallela alla direzione di  $v_B$  (che è nota) passante per  $B$ ;
- si traccia una retta ortogonale ad  $AB$  passante per la punta del vettore  $v_A$ ;
- l'intersezione fra le due rette tracciate individua  $v_B$  e  $v_{BA}$ .

La velocità angolare  $\dot{\theta}_3$  è facilmente determinata attraverso la seguente relazione

$$\dot{\theta}_3 = \frac{v_B}{|O_3B|}$$

Passiamo ora a determinare graficamente le accelerazioni dei corpi rigidi. Si faccia riferimento alla Fig. 2.3. Per quanto riguarda il corpo ① si effettua la classica composizione delle accelerazioni nel punto  $A$ . Rimangono quindi da determinare i valori di  $\ddot{\theta}_2$  e  $\ddot{\theta}_3$ .

La strategia da seguire consiste nello scrivere l'accelerazione  $\mathbf{a}_B$  nelle due forme (2.7) e (2.8) e imporre che siano uguali. I passi da seguire sono qui riportati:

- si consideri  $\mathbf{a}_B$  scritta come (2.7) e si riporti<sup>1</sup>, per comodità, il vettore  $\mathbf{a}_A$  in  $B$ ;

<sup>1</sup>Le accelerazioni sono vettori liberi e pertanto si possono *spostare* liberamente nello spazio.

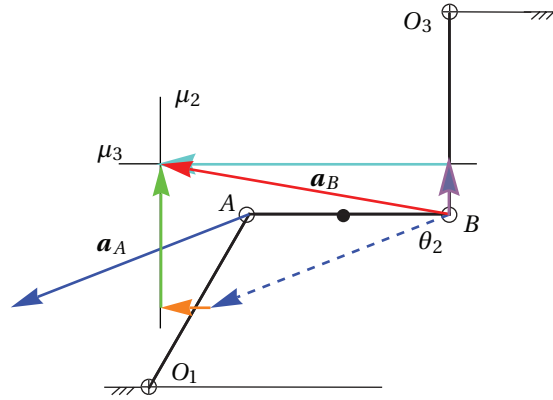


Figura 2.3 Costruzione grafica delle accelerazioni.

- si sommi il vettore  $-\ddot{\theta}_2^2 AB$  sulla punta del vettore precedente;
- a partire dalla punta dell'ultimo vettore tracciato si tracci una retta  $\mu_2$  perpendicolare ad  $AB$ . Su questa retta si determinerà il vettore  $\ddot{\theta}_2 \mathbf{k} \wedge AB$ ;
- si consideri ora  $\mathbf{a}_B$  scritta come in (2.8) e si riporti a partire da  $B$  il vettore  $-\ddot{\theta}_3^2 O_3B$ ;
- a partire dalla punta di quest'ultimo vettore si tracci una retta  $\mu_3$  ortogonale a  $O_3B$ . su questa retta si individuerà il vettore  $\ddot{\theta}_3 \mathbf{k} \wedge O_3B$ ;
- il punto di intersezione fra  $\mu_2$  e  $\mu_3$  individua univocamente i vettori cercati:  $\ddot{\theta}_2 \mathbf{k} \wedge AB$  e  $\ddot{\theta}_3 \mathbf{k} \wedge O_3B$ .

A questo punto il vettore  $\mathbf{a}_B$  può essere determinato attraverso (2.7) oppure (2.8).

## 2.2 Analisi dinamica

Passiamo ora a determinare il momento necessario da applicare a ① per ottenere il moto imposto. È opportuno fare delle precisazioni preliminari:

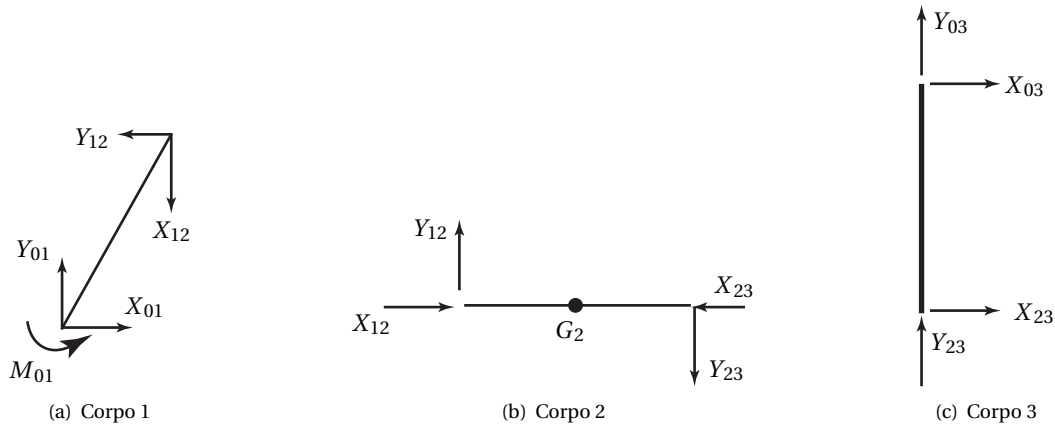
- L'asta ① è soggetta anche ad un momento.
- L'asta ② è dotata di massa e momento d'inerzia e segue, in generale, un moto vario.
- L'asta ③ non ha massa nè momento d'inerzia ed è caricata solamente da forze applicate ai suoi estremi.

### 2.2.1 Metodo analitico

Si scrivono ora le equazioni di equilibrio dei tre corpi rigidi, in riferimento ai diagrammi di corpo libero rappresentati in Fig. 2.2.1.

#### Equilibrio di ①

$$\begin{aligned}
 0 &= X_{01} - X_{12} \\
 0 &= Y_{01} - Y_{12} \\
 0 &= M_{01} + X_{12}l_1 \sin(\theta_1) - Y_{12}l_1 \cos(\theta_1) - m_1 g r_1 \cos(\theta_1)
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$



**Figura 2.4** Diagrammi di corpo libero.

### Equilibrio di ②

$$\begin{aligned}
 m_2 a_{G_2 x} &= X_{12} - X_{23} \\
 m_2 a_{G_2 y} &= Y_{12} - Y_{23} \\
 J_{G_2} \ddot{\theta}_2 &= X_{12} r_2 \sin(\theta_2) - Y_{12} r_2 \cos(\theta_2) + X_{23} (l_2 - r_2) \sin(\theta_2) - Y_{23} (l_2 - r_2) \cos(\theta_2)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

### Equilibrio di ③

$$\begin{aligned}
 0 &= X_{23} + X_{03} \\
 0 &= Y_{23} + Y_{03} \\
 \textcircled{3} : 0 &= -X_{23} l_3 \sin(\theta_3) + Y_{23} l_3 \cos(\theta_3)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Si noti che l'insieme delle (2.10), (2.11) e (2.12) è un sistema di nove equazioni nelle nove incognite

$$(X_{01}, Y_{01}, M_{01}, X_{12}, Y_{12}, X_{23}, Y_{23}, X_{03}, Y_{03})$$

e pertanto è risolvibile analiticamente. Tuttavia, ai fini di determinare il valore del momento  $M_{01}$ , alcune incognite così come alcune equazioni non sono necessarie. È pertanto possibile ridurre il sistema ad uno più semplice.

Si noti innanzitutto che le incognite  $X_{03}$  e  $Y_{03}$  compaiono solamente nelle (2.12) e pertanto non sono necessarie per il calcolo di  $M_{01}$ . Delle (2.12) l'unica equazione *utile* per i nostri scopi è l'ultima in quanto questa ci consente di affermare che ③ è un'asta scarica. Siamo quindi a conoscenza della direzione della forza  $\mathbf{R}_{32} = -\mathbf{R}_{23}$  che ② e ③ si scambiano in  $B$ .

Si noti anche che le due incognite  $X_{01}$  e  $Y_{01}$  compaiono solamente nelle prime due equazioni di (2.10) e pertanto tali incognite e tali equazioni possono essere trascurate nel calcolo di  $M_{01}$ .

In definitiva il sistema da risolvere (prendendo come configurazione di riferimento quella della Fig. 2.1) è il seguente

$$\begin{cases}
 0 = M_{01} + X_{12} l_1 \sin(\theta_1) - Y_{12} l_1 \cos(\theta_1) - m_1 g r_1 \cos(\theta_1) \\
 m_2 a_{G_2 x} = X_{12} \\
 m_2 a_{G_2 y} = Y_{12} - R_{23} \\
 J_{G_2} \ddot{\theta}_2 = X_{12} r_2 \sin(\theta_2) - Y_{12} r_2 - R_{23} (l_2 - r_2)
 \end{cases} \tag{2.13}$$

(si noti che nella configurazione di riferimento si ha:  $\theta_2 = \pi/2$  e  $\theta_3 = 3\pi/2$ ). Il sistema (2.13) presenta quattro equazioni nelle quattro incognite

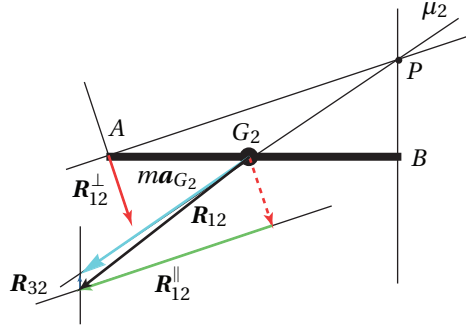
$$(M_{01}, X_{12}, Y_{12}, R_{23})$$

ed è quindi risolvibile analiticamente. È chiaro che la risoluzione di (2.13) è più semplice della soluzione del sistema  $9 \times 9$  scritto in precedenza.

### 2.2.2 Metodo grafico

Passiamo ora a determinare la soluzione grafica della dinamica del sistema nella configurazione di riferimento. L'elemento su cui ci concentriamo è ②.

Notiamo innanzitutto che la direzione della forza  $\mathbf{R}_{23} = -\mathbf{R}_{32}$  è nota in quanto l'asta ③ è scarica. Per determinare correttamente la forza  $\mathbf{R}_{12}$ , il modulo e il verso di  $\mathbf{R}_{32}$  si ricorre al seguente



**Figura 2.5** Soluzione grafica della dinamica di ②.

procedimento (si veda Fig. 2.5):

- si tracci da  $G_2$  il vettore  $m_2 \mathbf{a}_{G_2}$  e si tracci la sua retta di applicazione  $\mu_2$ ;
- si tracci da  $B$  il prolungamento di  $O_3 B$  e si determini il punto d'intersezione  $P$  di tale retta con  $\mu_2$ ;
- si scriva l'equilibrio a momento del corpo ② rispetto al punto  $P$ :

$$\textcircled{P} : PA \wedge \mathbf{R}_{12} + PB \wedge \mathbf{R}_{32} = J_{G_2} \ddot{\theta}_2 \mathbf{k} + PG_2 \wedge (m_2 \mathbf{a}_{G_2}) \quad (2.14)$$

dove

$$\begin{aligned} PB \wedge \mathbf{R}_{32} &= \mathbf{0} \\ PG_2 \wedge (m_2 \mathbf{a}_{G_2}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

per costruzione;

- si scomponga  $\mathbf{R}_{12}$  secondo due componenti:  $\mathbf{R}_{12}^{\parallel}$  parallela a  $PA$ , e  $\mathbf{R}_{12}^{\perp}$  ortogonale alla precedente. Ne risulta che la (2.14) può essere scritta più semplicemente come

$$PA \wedge (\mathbf{R}_{12}^{\parallel} + \mathbf{R}_{12}^{\perp}) = PA \wedge \mathbf{R}_{12}^{\perp} = J_{G_2} \ddot{\theta}_2 \mathbf{k}$$

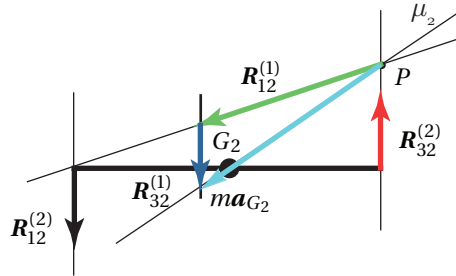
che consente di determinare il valore di  $\mathbf{R}_{12}^{\perp}$ ;

- per l'equilibrio alla traslazione di ② si riportino a partire da  $G_2$  i due vettori  $m_2 \mathbf{a}_{G_2}$  e  $\mathbf{R}_{12}^{\perp}$ .



- a partire dalla punta di questi due vettori si traccino due rette parallele a  $O_3B$  e  $\mathbf{R}_{12}^{\parallel}$  rispettivamente;
- il punto d'incontro delle due rette tracciate consente di determinare il valore di  $\mathbf{R}_{32}$  e  $\mathbf{R}_{12}^{\parallel}$ .

Le due forze  $\mathbf{R}_{01}$  e  $\mathbf{R}_{03}$  sono uguali e opposte a  $\mathbf{R}_{21}$  e  $\mathbf{R}_{23}$  rispettivamente. Infine il momento  $\mathbf{M}_{01}$  è direttamente ricavabile dalla terza equazione di (2.10).



**Figura 2.6** Soluzione grafica della dinamica di ② mediante sovrapposizione degli effetti.

Un metodo alternativo per determinare graficamente l'equilibrio di ② consiste nell'applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Si consideri la Fig. 2.6 e si segue la procedura sotto riportata:

- si traccia come in precedenza la retta  $\mu_2$  e si determina il punto  $P$ ;
- si considera dapprima solamente l'equilibrio alla traslazione e si determinano le due forze  $\mathbf{R}_{12}^{(1)}$  e  $\mathbf{R}_{32}^{(1)}$  imponendo che  $\mathbf{R}_{12}^{(1)} + \mathbf{R}_{32}^{(1)} = m_2 \mathbf{a}_{G_2}$ ;
- successivamente si applica la terza equazione di (2.12) considerando solamente l'effetto di  $J_{G_2} \ddot{\theta}_2$  e ponendo nulla l'accelerazione lineare. La coppia di forze costituita da  $\mathbf{R}_{12}^{(2)}$  e  $\mathbf{R}_{32}^{(2)}$  è determinata in modo tale che  $\mathbf{R}_{32}^{(2)}$  sia parallela ad  $O_3B$  in quanto ③ è un'asta scarica; e l'intensità  $R^{(2)}$  di tali forze è data da

$$R^{(2)} = \frac{J_{G_2} \ddot{\theta}_2}{|AB|}$$

In conclusione si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{12} &= \mathbf{R}_{12}^{(1)} + \mathbf{R}_{12}^{(2)} \\ \mathbf{R}_{32} &= \mathbf{R}_{32}^{(1)} + \mathbf{R}_{32}^{(2)} \end{aligned}$$

### 2.3 Soluzione numerica

---

Consideriamo ora un caso numerico. In particolare si abbia:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= 1 \text{ m} \\
 l_2 &= 1 \text{ m} \\
 r_2 &= 0.5 \text{ m} \\
 l_3 &= 1 \text{ m} \\
 m_2 &= 1 \text{ kg} \\
 \theta_1 &= \frac{\pi}{4} \text{ rad} \\
 J_{G_2} &= 2 \text{ kg m}^2 \\
 \dot{\theta}_1 &= 1 \text{ rad/s} \\
 \ddot{\theta}_1 &= 1 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta_2 &= 0 \text{ rad} \\
 \theta_3 &= -\frac{\pi}{2} \text{ rad}
 \end{aligned}$$

Si noti che in questo caso il punto  $C_2$  in Fig. 2.2 coincide con  $O_3$  per cui si ha  $|C_2A| = \sqrt{2}$ .

Dalla (2.1) abbiamo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_A &= l_1 \dot{\theta}_1 (-\sin(\theta_1), \cos(\theta_1)) = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\
 v_A &= 1 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

La risoluzione numerica di (2.4) fornisce i seguenti risultati:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_2 &= -\frac{v_A}{|C_2A|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ rad/s} \\
 \dot{\theta}_3 &= \dot{\theta}_2 \frac{|C_2B|}{|O_3B|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ rad/s}
 \end{aligned}$$

Per l'accelerazione del punto  $A$  valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_A^{(t)} &= \ddot{\theta}_1 \mathbf{k} \wedge O_1A = \frac{1}{2} (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \text{ m/s}^2 \\
 \mathbf{a}_A^{(r)} &= -\dot{\theta}_1 O_1A = \frac{1}{2} (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \text{ m/s}^2 \\
 \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_A^{(t)} + \mathbf{a}_A^{(r)} = (-\sqrt{2}, 0, 0) \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$

Una volta risolta la parte di velocità si ottengono i seguenti valori:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{BA}^{(r)} &= -\dot{\theta}_2 AB = \left( -\frac{1}{2}, 0, 0 \right) \text{ m/s}^2 \\
 \mathbf{a}_{BO_3}^{(r)} &= -\dot{\theta}_3 O_3B = \left( 0, \frac{1}{2}, 0 \right) \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$

Mentre le accelerazioni relative tangenziali del punto  $B$  si ricavano attraverso la risoluzione di (2.9). Si ottengono i seguenti valori

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{BA}^{(t)} &= \left( 0, \frac{1}{2}, 0 \right) \text{ m/s}^2 \\
 \mathbf{a}_{BO_3}^{(t)} &= \left( -\frac{1}{2} - \sqrt{2}, 0, 0 \right) \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$

da cui discende:

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\mathbf{a}_{BA}^{(t)}}{|AB|} = \frac{1}{2} \text{ rad/s}^2$$

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{\mathbf{a}_{BO_3}^{(t)}}{|O_3B|} = -\frac{1}{2} - \sqrt{2} \text{ rad/s}^2$$

È necessario calcolare l'accelerazione del baricentro di ② che risulta

$$\mathbf{a}_{G_2} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{G_2A}^{(t)} + \mathbf{a}_{G_2A}^{(r)} = (-\sqrt{2}, 0, 0) + \left(0, \frac{1}{4}, 0\right) + \left(-\frac{1}{4}, 0, 0\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{4} - \sqrt{2}, \frac{1}{4}, 0\right) \text{ m/s}^2$$

Passiamo ora a determinare i valori di  $\mathbf{R}_{12}$ ,  $\mathbf{R}_{23}$  e  $\mathbf{M}_{01}$ . Si determinano innanzitutto i valori dei vettori  $PG_2$  e  $PA$

$$PG_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{62}(-1 + 4\sqrt{2}), 0\right) \text{ m}$$

$$PA = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ m}$$

Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti si ottiene:

$$\mathbf{R}_{12}^{(1)} = \left(-\frac{1}{4} - \sqrt{2}, \frac{1}{8}, 0\right) \text{ N}$$

$$\mathbf{R}_{32}^{(1)} = \left(0, \frac{1}{8}, 0\right) \text{ N} \quad \mathbf{R}_{12}^{(2)} = -\frac{J_{G_2} \ddot{\theta}_2}{|AB|} \mathbf{j} = (0, -1, 0) \text{ N}$$

$$\mathbf{R}_{32}^{(2)} = -\mathbf{R}_{12}^{(2)} = (0, 1, 0) \text{ N}$$

Da cui discende:

$$\mathbf{R}_{12} = \left(-\frac{1}{4} - \sqrt{2}, -\frac{7}{8}, 0\right) \text{ N}$$

In definitiva, il momento  $\mathbf{M}_{01}$  risulta

$$\mathbf{M}_{01} = -O_1A \wedge \mathbf{R}_{12} = \left(0, 0, -1 + \frac{5}{8\sqrt{2}}\right) \text{ N m}$$

Per riprova si calcola il valore di  $\mathbf{R}_{12}$  senza utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti. Risulta

$$\mathbf{R}_{12}^\perp = \frac{J_{G_2} \ddot{\theta}_2 \mathbf{k} \wedge AB}{|AB|^2} = (-0.0746892, -0.99439, 0)$$

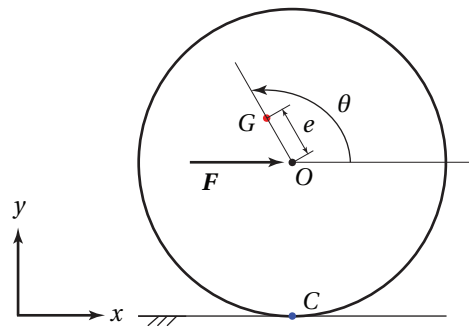
$$\mathbf{R}_{12}^\parallel = (-1.58952, 0.11939, 0)$$

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_{12}^\perp + \mathbf{R}_{12}^\parallel = (-1.66421, -0.875, 0)$$

che coincide col valore trovato precedentemente.

## Disco Asimmetrico

---



**Figura 3.1** Schema meccanico.

Si consideri lo schema meccanico riportato in Fig. 3.1. Il contatto fra il disco ① e il piano è di rotolamento senza strisciamento. Si assume completamente nota la geometria del disco: massa  $m$ , momento d'inerzia baricentrico  $J_G$ , raggio  $r$ , eccentricità del baricentro rispetto al centro del disco  $e$ . Al centro del disco sia applicata una forza  $F$  diretta orizzontalmente.

Si determinino le equazioni del moto utilizzando diversi metodi:

- Equazioni cardinali (Newton) con equilibrio a momento scritto rispetto a
  - Centro delle velocità del disco
  - Centro del disco
  - Baricentro del disco
- Equazioni di Lagrange
- Principio dei lavori virtuali dinamico

### 3.1 Analisi cinematica

---

La cinematica del sistema in esame è molto semplice. Risulta utile scrivere l'espressione della velocità e dell'accelerazione dei punti di ① in particolare dei punti  $G$ ,  $O$  e  $C$ .

### 3.1.1 Velocità

Cominciamo notando che  $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$  per il vincolo di rotolamento senza strisciamento. Ne risultano quindi le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_O &= \dot{\theta} \mathbf{k} \wedge CO \\ \mathbf{v}_G &= \dot{\theta} \mathbf{k} \wedge CG = \dot{\theta} \mathbf{k} \wedge (CO + OG) = \mathbf{v}_O + \dot{\theta} \mathbf{k} \wedge OG\end{aligned}\quad (3.1)$$

Si noti che all'espressione di  $\mathbf{v}_G$  si poteva arrivare tramite la formula fondamentale della cinematica

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{GO} = \mathbf{v}_O + \dot{\theta} \mathbf{k} \wedge OG$$

L'espressione estesa di  $\mathbf{v}_G$  risulta la seguente

$$\mathbf{v}_G = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(-r - e \sin(\theta)) \\ \dot{\theta} e \cos(\theta) \end{pmatrix}\quad (3.2)$$

### 3.1.2 Accelerazioni

Si determinano ora le accelerazioni dei punti notevoli del sistema. Si indichi con  $C_V$  il centro delle velocità di ①; tale punto, appartenente a ①, è il punto che istante per istante coincide con il punto di contatto fra ① e il telaio  $C$ . Per il vincolo di rotolamento senza strisciamento abbiamo che  $\mathbf{a}_{C_V} \neq \mathbf{0}$ . Per determinare correttamente il valore di  $\mathbf{a}_{C_V}$  scriviamo l'accelerazione  $\mathbf{a}_O$  come segue

$$\mathbf{a}_O = \mathbf{a}_{C_V} + \ddot{\theta} \mathbf{k} \wedge C_V O - \dot{\theta}^2 C_V O$$

Per la geometria del sistema la componente di  $\mathbf{a}_O$  lungo  $C_V O$  è nulla. Inoltre l'accelerazione  $\mathbf{a}_{C_V}$  può avere componente diversa da zero solamente lungo la direzione  $C_V O$  per cui, in definitiva si avrà

$$\mathbf{a}_{C_V} = \dot{\theta}^2 C_V O\quad (3.3)$$

Si noti che, come era giusto aspettarsi, il vettore  $\mathbf{a}_{C_V}$  è diretto da  $C_V$  verso  $O$  per ogni valore di  $\dot{\theta}$ . L'accelerazione del baricentro  $G$  risulta quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_G &= \mathbf{a}_{C_V} + \mathbf{a}_{GC_V} = \dot{\theta}^2 C_V O + \ddot{\theta} \mathbf{k} \wedge C_V G - \dot{\theta}^2 C_V G \\ &= \ddot{\theta} \mathbf{k} \wedge C_V G - \dot{\theta}^2 OG\end{aligned}\quad (3.4)$$

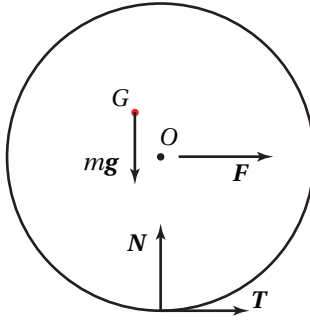
che in componenti diventa

$$\mathbf{a}_G = \begin{pmatrix} -e \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - \ddot{\theta}(r + e \sin(\theta)) \\ e(\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta)) \end{pmatrix}\quad (3.5)$$

## 3.2 Dinamica

---

Passiamo ora a scrivere le equazioni che regolano la dinamica del sistema ricavandole in diversi modi. Si fa riferimento al diagramma di corpo libero del disco rappresentato in Fig. 3.2.



**Figura 3.2** Diagramma di corpo libero del disco.

### 3.2.1 Equazioni cardinali

Le equazioni di equilibrio alla traslazione sono molto semplici e vengono qui riportate per completezza

$$\begin{aligned} ma_{Gx} &= T + F \\ ma_{Gy} &= N - mg \end{aligned} \quad (3.6)$$

che in forma vettoriale possono essere scritte come

$$m\mathbf{a}_G = \mathbf{N} + \mathbf{T} + \mathbf{F} + m\mathbf{g} \quad (3.7)$$

Passiamo ora a scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica utilizzando diversi poli di riferimento.

#### Momento rispetto a $C_V$

Le due forze di contatto  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{T}$  hanno una retta d'azione che passa per il punto  $C_V$  e pertanto, rispetto a tale polo, non esercitano momento. Si applica in questo caso la seguente relazione

$$\mathbf{M}_{C_V} = \dot{\mathbf{K}}_G^r + C_V G \wedge (m\mathbf{a}_G)$$

per cui l'equilibrio intorno a  $C_V$  si scrive come

$$\odot_{C_V} : C_V O \wedge \mathbf{F} + C_V G \wedge (m\mathbf{g}) = J_G \ddot{\theta} \mathbf{k} + C_V G \wedge (m\mathbf{a}_G)$$

che per la (3.4) diventa

$$C_V O \wedge \mathbf{F} + C_V G \wedge (m\mathbf{g}) = J_G \ddot{\theta} \mathbf{k} + C_V G \wedge \left( m(\ddot{\theta} \mathbf{k} \wedge C_V G - \dot{\theta}^2 OG) \right) \quad (3.8)$$

Moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{k}$  si ottiene la seguente relazione scalare

$$-Fr - e g m \cos(\theta) = J_G \ddot{\theta} + e m r \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} m r^2 + \dot{\theta}^2 e^2 m + 2\ddot{\theta} e m r \sin(\theta) \quad (3.9)$$

#### Momento rispetto a $O$

Scrivendo l'equilibrio intorno al polo  $O$  notiamo che la forza  $\mathbf{N}$  ha un braccio nullo, mentre la forza  $\mathbf{T}$ , in questo caso esercita un momento. La forza esterna  $\mathbf{F}$  in questo caso ha braccio nullo e quindi non esercita momento. Anche in questo caso utilizziamo la relazione

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{K}}_G^r + OG \wedge (m\mathbf{a}_G)$$

L'equilibrio intorno al punto  $O$  si scrive quindi come segue

$$\begin{aligned} \odot : OC_V \wedge \mathbf{T} + OG \wedge (m\mathbf{g}) &= J_G \ddot{\theta} \mathbf{k} + OG \wedge (m\mathbf{a}_G) \\ &= J_G \ddot{\theta} \mathbf{k} + OG \wedge \left( m(\ddot{\theta} \mathbf{k} \wedge C_V G - \dot{\theta}^2 OG) \right) \end{aligned}$$

che moltiplicata scalarmente per  $\mathbf{k}$  diventa

$$rT - egm \cos(\theta) = \ddot{\theta} e^2 m + J_G \ddot{\theta} + \ddot{\theta} emr \sin(\theta)$$

Il valore di  $T$  può essere ricavato risolvendo la (3.6) lungo la componente  $x$ :

$$T = -F - \ddot{\theta} mr - em(\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} \sin(\theta))$$

Tale valore, sostituito nell'equazione di equilibrio intorno ad  $O$  fornisce la seguente relazione

$$-Fr - egm \cos(\theta) = J_G \ddot{\theta} + \ddot{\theta} e^2 m + emr \cos(\theta)\dot{\theta}^2 + 2\ddot{\theta} emr \sin(\theta) + \ddot{\theta} mr^2 \quad (3.10)$$

che è identica alla (3.9).

### Momento rispetto a $G$

Nel calcolo dell'equilibrio intorno al baricentro  $G$  solamente la forza di gravità non esercita momento. L'espressione vettoriale dell'equilibrio intorno a  $G$  è la seguente

$$\odot : GO \wedge \mathbf{F} + GC_V \wedge (\mathbf{N} + \mathbf{T}) = J_G \ddot{\theta} \mathbf{k}$$

che moltiplicata scalarmente per  $\mathbf{k}$  fornisce

$$rT + e \sin(\theta) T - eN \cos(\theta) + eF \sin(\theta) = J_G \ddot{\theta}$$

L'espressione di  $T$  è quella trovata precedentemente, mentre  $N$  si ricava dalla soluzione della seconda equazione di (3.6) e si ottiene

$$N = m(-e \sin(\theta)\dot{\theta}^2 + g + \ddot{\theta} e \cos(\theta))$$

Sostituendo  $T$  e  $N$  nell'equazione di equilibrio intorno a  $G$  si ottiene

$$-emr \cos(\theta)\dot{\theta}^2 - \ddot{\theta} mr^2 - \ddot{\theta} e^2 m - Fr - egm \cos(\theta) - 2\ddot{\theta} emr \sin(\theta) = J_G \ddot{\theta} \quad (3.11)$$

che è identica alle (3.9) e (3.10).

### Commenti

I tre modi sopra esposti di scrivere la seconda equazione cardinale sono equivalenti in quanto, ovviamente, l'equazione finale che si giunge a scrivere è la stessa in tutti e tre i casi. Tuttavia, a seconda del problema in esame risulta più comodo utilizzare un modo piuttosto che un altro.

Nel problema in esame, se l'obiettivo è solamente quello di determinare la forza  $F$  da applicare al disco affinché questo segua una legge di moto imposta, allora risulta molto più comodo scrivere l'equilibrio alla rotazione intorno al punto  $C_V$  in quanto non è necessario conoscere le reazioni vincolari che garantiscono il moto di rotolamento senza strisciamento.

Qualora invece fosse richiesto di conoscere anche il valore delle reazioni vincolari allora è necessario anche risolvere la prima equazione cardinale (3.7).

### 3.2.2 Equazioni di Lagrange

Ora proviamo a determinare le equazioni che regolano la dinamica del moto utilizzando le equazioni di Lagrange. Per prima cosa dobbiamo determinare l'energia cinetica  $\mathcal{T}$  e l'energia potenziale  $\mathcal{U}$  del sistema. Per determinare l'energia cinetica facciamo ricorso al teorema di König:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2$$

Utilizzando la (3.2) si ottiene

$$v_G^2 = \dot{\theta}^2 (e^2 + 2r \sin(\theta)e + r^2)$$

per cui risulta

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (m e^2 + 2m r e \sin(\theta) + m r^2 + J_G) = \frac{1}{2} J_C(\theta) \dot{\theta}^2 \quad (3.12)$$

Si noti che, per effetto dell'eccentricità del baricentro rispetto al centro del disco, il momento d'inerzia rispetto al punto  $C$  risulta non costante al variare di  $\theta$ .

L'energia potenziale del sistema è dovuta, in questo caso, solamente al campo gravitazionale. Fissiamo il riferimento dell'energia potenziale gravitazionale all'altezza del punto  $O$ . L'energia potenziale assume quindi la seguente espressione

$$\mathcal{U} = m g e \sin(\theta) \quad (3.13)$$

Si utilizzano ora le equazioni di Lagrange per determinare le equazioni della dinamica del sistema

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = Q_{\theta}^{(a,nc)}$$

Scriviamo ogni termine separatamente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt} (J_C(\theta) \dot{\theta}) = J_C(\theta) \ddot{\theta} + \frac{dJ_C(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}^2 \\ &= (m e^2 + 2m r e \sin(\theta) + m r^2 + J_G) \ddot{\theta} + 2m r e \cos(\theta) \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} = \frac{\partial (\frac{1}{2} J_C(\theta) \dot{\theta}^2)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} (2m r e \cos(\theta)) \dot{\theta}^2 = m r e \cos(\theta) \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = \frac{\partial (m g e \sin(\theta))}{\partial \theta} = m g e \cos(\theta)$$

Indicando con  $\lambda$  il versore lungo cui viene applicata la forza  $F$  si ha

$$\begin{aligned} Q_{\theta}^{(a,nc)} &= F \lambda \cdot \frac{\partial (O(0)O(\theta))}{\partial \theta} = F \lambda \cdot \frac{\partial (-r \theta \lambda)}{\partial \theta} = F \lambda \cdot (-r \lambda) \\ &= -F r \end{aligned}$$

Combinando tutti i termini si ottiene

$$(m e^2 + 2m r e \sin(\theta) + m r^2 + J_G) \ddot{\theta} + 2m r e \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - m r e \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + m g e \cos(\theta) = -F r$$



che sviluppando i conti e riordinando diventa

$$(me^2 + 2mre \sin(\theta) + mr^2 + J_G)\ddot{\theta} + mre \cos(\theta)\dot{\theta}^2 + mge \cos(\theta) = -Fr \quad (3.14)$$

che è identica alle (3.9), (3.10) e (3.11).

Qualora non si volesse considerare l'energia potenziale gravitazionale è possibile considerare la forza  $m\mathbf{g}$  come una generica forza esterna per la quale va calcolato il termine relativo  $Q_\theta^{a,c}$ :

$$Q_\theta^{(a,c)} = m\mathbf{g} \cdot \frac{\partial O(0)G(\theta)}{\partial \theta} = -mge \cos(\theta)$$

che, come ci aspettavamo, è uguale e opposto al termine  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta}$ .

### 3.2.3 Principio dei Lavori Virtuali Dinamico

Proviamo ora a determinare le equazioni che regolano la dinamica del sistema utilizzando il principio dei lavori virtuali della dinamica (principio di d'Alambert).

Cominciamo da alcune considerazioni generali su un sistema con vincoli privi d'attrito costituito da  $n$  particelle, ciascuna dotata di massa  $m_i$ . Su ogni particella in generale saranno applicate le seguenti forze:

- $\mathbf{F}_i^{(a,e)}$  - forza attiva esterna;
- $\mathbf{F}_{ij}^{(a,i)}$  - forza attiva interna che la particella  $i$  esercita sulla particella  $j$ ;
- $\mathbf{F}_i^{(r,e)}$  - forza reattiva (vincolare) esterna;
- $\mathbf{F}_{ij}^{(r,i)}$  - forza reattiva interna che la particella  $i$  esercita sulla particella  $j$ .

Per l'equilibrio dinamico della particella  $i$  dovrà valere

$$\mathbf{F}_i^{(a,e)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\mathbf{F}_{ij}^{(a,i)} + \mathbf{F}_{ij}^{(r,i)}) + \mathbf{F}_i^{(r,e)} - m_i \mathbf{a}_{P_i} = \mathbf{0}$$

dove  $\mathbf{a}_{P_i}$  è l'accelerazione della particella  $i$ . Indicando con

$$\mathbf{R}_i^{(a,i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{ij}^{(a,i)}$$

$$\mathbf{R}_i^{(r,i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{ij}^{(r,i)}$$

la risultante delle forze interne attive e reattive agenti sulla particella  $i$ , e moltiplicando scalarmente per lo spostamento virtuale  $\delta P_i$  compatibile con i vincoli al tempo  $t$  si ottiene

$$(\mathbf{F}_i^{(a,e)} + \mathbf{R}_i^{(a,i)} + \mathbf{R}_i^{(r,i)} + \mathbf{F}_i^{(r,e)} - m_i \mathbf{a}_{P_i}) \delta P_i = 0$$

Nell'espressione precedente si ha subito che

$$\mathbf{F}_i^{(r,e)} \delta P_i = 0$$

cioè il lavoro virtuale delle forze reattive esterne è nullo<sup>1</sup>.

A questo punto si sommano tutte le equazioni relative alle  $n$  particelle e si ottiene

$$\sum_{i=1}^n \left( \mathbf{F}_i^{(a,e)} + \mathbf{R}_i^{(a,i)} + \mathbf{R}_i^{(r,i)} - m_i \mathbf{a}_{P_i} \right) \delta P_i = 0$$

Si nota innanzitutto che vale la seguente relazione

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i^{(r,i)} \delta P_i = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{ij}^{(r,i)} \delta P_i = 0$$

in quanto la risultante di tutte le forze reattive interne è nulla. Dalla precedente relazione discende quindi

$$\sum_{i=1}^n \left( \mathbf{F}_i^{(a,e)} + \mathbf{R}_i^{(a,i)} - m_i \mathbf{a}_{P_i} \right) \delta P_i = 0$$

Indicando con  $\mathbf{F}_i^a = \mathbf{F}_i^{(a,e)} + \mathbf{R}_i^{(a,i)}$  tutte le forze attive agenti sulla particella  $i$ , si ottiene la seguente relazione

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i^a) \delta P_i = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{a}_{P_i}) \delta P_i$$

$$\delta \mathcal{W}^a = \delta \mathcal{W}^I$$

che rappresenta l'uguaglianza fra il lavoro virtuale delle forze attive  $\mathcal{W}^a$  e il lavoro virtuale delle forze d'inerzia  $\mathcal{W}^I$ . Nel caso in esame si ha

$$\delta P_i = \frac{\partial OP_i}{\partial \theta} \delta \theta$$

e quindi per le forze attive si ottiene

$$\delta \mathcal{W}^a = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial \theta} \right) \delta \theta = Q_\theta^a \delta \theta$$

Il termine  $Q_\theta^a$  può essere direttamente ricavato dall'analisi svolta precedentemente per le equazioni di Lagrange:

$$Q_\theta^a = -Fr - mge \cos(\theta)$$

Per quanto riguarda le forze d'inerzia si ricordi che il sistema è costituito da un corpo rigido, e pertanto valgono le seguenti relazioni

$$\delta P_i = \delta G + \delta \theta \mathbf{k} \wedge GP_i = \frac{\partial OG}{\partial \theta} \delta \theta + \delta \theta \mathbf{k} \wedge GP_i$$

$$\mathbf{a}_{P_i} = \mathbf{a}_G + \ddot{\theta} \mathbf{k} \wedge GP_i - \dot{\theta}^2 GP_i$$

Quindi sommando tutti i contributi si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{a}_{P_i}) \delta P_i &= \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{a}_G + \ddot{\theta} \mathbf{k} \wedge GP_i - \dot{\theta}^2 GP_i) \cdot \left( \frac{\partial OG}{\partial \theta} \delta \theta + \delta \theta \mathbf{k} \wedge GP_i \right) \\ &= m \mathbf{a}_G \cdot \frac{\partial OG}{\partial \theta} \delta \theta + \mathbf{a}_G \cdot \left( \delta \theta \mathbf{k} \wedge \sum_{i=1}^n (m_i GP_i) \right) \\ &\quad + \ddot{\theta} \mathbf{k} \wedge \sum_{i=1}^n (m_i GP_i) \delta G + \sum_{i=1}^n (m_i \ddot{\theta} \delta \theta |GP_i|^2) - \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^n (m_i GP_i) \delta G \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Questo vale per ogni massa  $m_i$ .

L'espressione precedente si può notevolmente semplificare notando che

$$\sum_{i=1}^n (m_i G P_i) = m G G = \mathbf{0}$$

in quanto il primo termine è la definizione di baricentro di un sistema di particelle. Per tale relazione discende

$$\sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{a}_{P_i}) \delta P_i = \left( m \mathbf{a}_G \cdot \frac{\partial O G}{\partial \theta} \right) \delta \theta + J_G \ddot{\theta} \delta \theta = \left( m \mathbf{a}_G \cdot \frac{\partial O G}{\partial \theta} + J_G \ddot{\theta} \right) \delta \theta$$

Nel caso in esame si ha

$$\begin{aligned} O(0)G(\theta) &= (-r\theta + e \cos(\theta), e \sin(\theta)) \\ \frac{\partial O(0)G(\theta)}{\partial \theta} &= (-r - e \sin(\theta), e \cos(\theta)) \end{aligned}$$

per cui si ottiene

$$m \mathbf{a}_G \cdot \frac{\partial O(0)G(\theta)}{\partial \theta} = m (er \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} (e^2 + 2r \sin(\theta)e + r^2))$$

In conclusione, dovendo valere l'uguaglianza dei lavori virtuali  $\mathcal{W}^a$  e  $\mathcal{W}^I$  si ha

$$\delta \mathcal{W}^a = Q^a \delta \theta = (m \mathbf{a}_G + J_G \ddot{\theta}) \delta \theta$$

per ogni spostamento virtuale  $\delta \theta$ , si ottiene

$$-Fr - mge \cos(\theta) = m (er \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} (e^2 + 2r \sin(\theta)e + r^2)) + J_G \ddot{\theta} \quad (3.15)$$

che risulta identica a (3.9), (3.10), (3.11) e (3.14).

## Slitta con Attrito

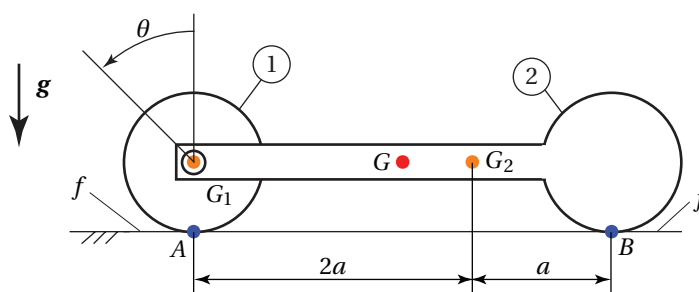


Figura 4.1 Schema meccanico.

Si consideri il sistema in Fig. 4.1. Si considera che nel contatto fra i due corpi e il suolo ci sia un coefficiente di attrito  $f$ . Il disco ① rotola senza strisciare sul suolo, mentre il corpo ② striscia senza rotolare. Si assume nota la geometria del sistema: masse  $m_1$  e  $m_2 = 3m_1$  di ① e ②, momento d'inerzia baricentrico  $J_{G_1}$  di ①, raggio  $r$  del disco ① e la lunghezza  $a$  indicata in Fig. 4.1. Sul sistema agiscono solamente le forze d'attrito e la forza di gravità.

Note le condizioni iniziali  $\dot{\theta}(0)$  della velocità di rotazione di ① si determinino

- Il tempo d'arresto
- Lo spazio d'arresto

### 4.1 Analisi Cinematica

La cinematica del sistema in esame è molto semplice. Si sceglie come origine del sistema di riferimento il punto  $O$  che coincide con  $A$  all'istante  $t = 0$ . Le posizioni dei baricentri dei due corpi sono quindi espresse dalle seguenti relazioni

$$OG_1 = (-r\theta, r)$$

$$OG_2 = (2a - r\theta, r)$$

Da cui segue che la posizione del baricentro  $G$  del sistema ① + ② è data da:

$$OG = \frac{m_1 OG_1 + m_2 OG_2}{m_1 + m_2} = \left( \frac{-m_1 r\theta + m_2 (2a - r\theta)}{m_1 + m_2}, r \right) \quad (4.1)$$

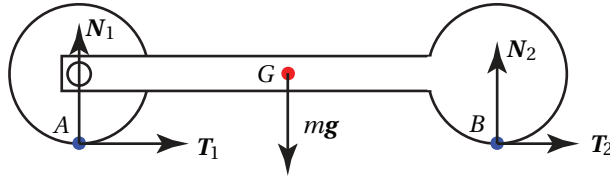
$$= \left( \frac{2am_2}{m_1 + m_2} - r\theta, r \right) = \left( \frac{3}{2}a - r\theta, r \right) \quad (4.2)$$

La velocità e l'accelerazione del baricentro del sistema risultano quindi le seguenti

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_G &= (-r\dot{\theta}, 0) \\ \mathbf{a}_G &= (-r\ddot{\theta}, 0) \end{aligned} \quad (4.3)$$

## 4.2 Analisi Dinamica

Per studiare la dinamica del sistema in esame consideriamo l'equilibrio del sistema complessivo ① + ②. Lo schema delle forze agenti sul sistema è riportato in Fig. 4.2. Si scrivono ora le



**Figura 4.2** Diagramma delle forze agenti sul sistema ① + ②.

equazioni cardinali per il sistema complessivo:

$$\begin{aligned} ma_{G_x} &= -mr\ddot{\theta} = T_1 + T_2 \\ ma_{G_y} &= 0 = N_1 + N_2 - mg \\ \textcircled{A}: -\frac{3}{2}amg + 3aN_2 &= J_{G_1}\ddot{\theta} + m_1r^2\ddot{\theta} + m_2r^2\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (4.4)$$

dove l'ultima equazione discende da

$$\textcircled{A}: \mathbf{M}_A = \sum_{i=1}^n \left( \dot{\mathbf{K}}_{G_i}^{(r)} + AG_i \wedge \mathbf{a}_{G_i} \right)$$

Nelle equazioni (4.4) valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} |T_2| &= -f|N_2|\text{sign}(v_{G_x}) = -f|N_2|\text{sign}(-r\dot{\theta}) = frN_2\text{sign}(\dot{\theta}) \\ |T_1| &\leq f|N_1| \end{aligned} \quad (4.5)$$

assumendo  $N_2 > 0$ . La prima di queste relazioni può essere sostituita nelle (4.4) mentre la seconda deve essere verificata a posteriori sulla base dei dati numerici.

Il sistema (4.4), insieme alla prima delle (4.5), costituisce un sistema di tre equazioni nelle quattro incognite

$$(N_1, N_2, T_1, \ddot{\theta})$$

e quindi è necessario scrivere un'altra equazione indipendente dalle altre per poter risolvere il problema. La quarta equazione si può scrivere attraverso l'equilibrio alla rotazione di ① intorno a  $G_1$ :

$$\textcircled{G_1}: T_1r = J_{G_1}\ddot{\theta} \quad (4.6)$$

Il sistema composto dalle (4.4), (4.5) e (4.6) risulta quindi risolvibile. Assumendo  $\dot{\theta} > 0$ , e di

conseguenza  $v_{G_x} < 0$ , si ottiene

$$\begin{aligned} N_1 &= 2gm_1 \left( 2 - \frac{3a}{3a+fr} \right) \\ T_1 &= -\frac{6afgJ_{G_1}m_1}{(3a+fr)(4m_1r^2+J_{G_1})} \\ N_2 &= \frac{6agm_1}{3a+fr} \\ \ddot{\theta} &= -\frac{6afgm_1r}{(3a+fr)(4m_1r^2+J_{G_1})} \end{aligned} \quad (4.7)$$

È interessante notare che  $T_1$  risulta negativa e quindi *rivolta verso sinistra*. Questo fatto potrebbe risultare contro-intuitivo in quanto sembra che  $T_1$  faccia accelerare ① verso sinistra. Invece è opportuno ricordare che sul corpo ①, lungo l'asse  $x$ , non agisce solamente la forza  $T_1$ , bensì sarà presente anche una reazione vincolare nella cerniera in  $G_1$  che, nel caso in esame, non viene calcolata perché non è stata richiesta.

Si noti che il verso di  $T_1$  è in perfetto accordo con l'accelerazione angolare  $\ddot{\theta}$  del corpo ①, che risulta costante e negativa. Pertanto la legge oraria  $\dot{\theta}(t)$  risulta la seguente

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(0) + \ddot{\theta}t = \dot{\theta}(0) - \frac{6afgm_1r}{(3a+fr)(4m_1r^2+J_{G_1})}t \quad (4.8)$$

Ne risulta che l'istante di arresto  $t_a$  è facilmente ricavabile imponendo  $\dot{\theta}(t_a) = 0$  ottenendo

$$t_a = \frac{\dot{\theta}(0)(3a+fr)(4m_1r^2+J_{G_1})}{6afgm_1r} \quad (4.9)$$

La legge oraria  $x(t)$  della traslazione orizzontale del baricentro  $G$  è data da

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_{G_x} = -r\dot{\theta} \\ x(t) &= x_0 + v_0t - \frac{1}{2}r\ddot{\theta}t^2 \end{aligned}$$

da cui, ponendo  $x_0 = 0$  si ottiene

$$x_a = x(t_a) = -\frac{(3a+fr)(4m_1r^2+J_{G_1})v_0^2}{12afgm_1r^2} \quad (4.10)$$

che rappresenta lo spazio d'arresto.

### Metodo alternativo

Si può determinare lo spazio d'arresto anche mediante considerazioni energetiche. Si scrive innanzitutto l'energia cinetica  $\mathcal{F}$  iniziale del sistema:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_0^2 + \frac{1}{2}J_{G_1}\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 \quad (4.11)$$

L'unica forza che effettua lavoro, in questo caso, è la forza d'attrito in  $B^1$  e pertanto tale lavoro  $W_a$  si può scrivere

$$W_a = fN_2x_a \quad (4.12)$$

dove si è supposto ancora  $x_0 = 0$ . Eguagliando (4.11) e (4.12), tenendo conto delle (4.7) si può determinare direttamente lo spazio d'arresto.

<sup>1</sup>Si ricordi che le forze nel vincolo di rotolamento senza strisciamento non effettuano lavoro.

### 4.2.1 Extra

Qualora fosse necessario calcolare la forza  $R_{12}$  che viene scambiata fra ① e ② in  $G_1$  è sufficiente scrivere l'equilibrio alla traslazione di ② come segue

$$\begin{aligned}m_2 a_{G_x} &= X_{12} + f N_2 \\ 0 &= Y_{12} + N_2 - m_2 g\end{aligned}$$

dove le uniche due incognite sono  $X_{12}$  e  $Y_{12}$  che sono facilmente ricavabili in quanto tutte le altre grandezze sono note.

### 4.3 Soluzione Numerica

---

Siano assegnati i seguenti dati:

$$\begin{aligned}m_1 &= 10 \text{ kg} \\ m_2 &= 3m_1 = 30 \text{ kg} \\ J_{G_1} &= 0.3 \text{ kg m}^2 \\ f &= 0.3 \\ a &= 0.4 \text{ m} \\ r &= 0.2 \text{ m} \\ v_0 &= -10 \text{ m/s}\end{aligned}$$

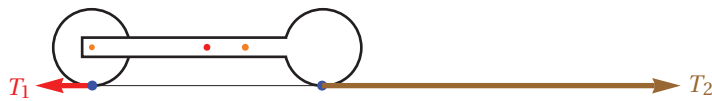
Il risultato numerico della soluzione della dinamica è il seguente:

$$\begin{aligned}N_1 &= 205.543 \text{ N} \\ T_1 &= -8.85113 \text{ N} \\ N_2 &= 186.857 \text{ N} \\ T_2 &= 56.0571 \text{ N} \\ \ddot{\theta} &= -5.9 \text{ rad/s}^2\end{aligned}$$

A questo punto è necessario verificare la condizione di rotolamento senza strisciamento in  $A$ . A tal fine si verifica che

$$\left| \frac{T_1}{N_1} \right| = 0.04306 \leq f = 0.3$$

che soddisfa la condizione di puro rotolamento. Visualizziamo ora il diagramma delle forze rappresentato in Fig. 4.3. Per semplicità non sono rappresentate le forze verticali in quanto ci con-



**Figura 4.3** Schema delle forze agenti sul sistema. Le forze verticali non sono rappresentate per semplicità.

centriamo solamente sulle forze orizzontali. Si noti che le due forze  $T_1$  e  $T_2$  sono dirette in direzione opposta. Questa condizione è compatibile con le condizioni iniziali imposte. Infatti, dato che  $\dot{\theta}(0) > 0$  e  $v_{G_x} < 0$  ne discende che  $T_2$  è diretta verso destra (cioè, per i versi scelti in Fig. 4.2 è positiva). La forza  $T_1$  invece è diretta dalla parte opposta in quanto ha un effetto frenante sul disco e quindi per le convenzioni scelte ha valore negativo.

## 4.4 Metodo pratico per scrivere la dinamica

---

In questa sezione vediamo come si possono scrivere in maniera semplice le equazioni che regolano la dinamica del sistema in esame.

Cominciamo considerando che la velocità iniziale  $v_0$  sia negativa. Da questo discende che  $T_2$  è rivolta verso destra, come rappresentato in Fig. 4.2. Inoltre vale la relazione  $T_2 = fN_2$ . Per quanto riguarda la forza d'attrito nel punto  $A$ , invece, sappiamo solamente che vale la relazione  $|T_1| \leq fN_1$ , con  $N_1$  positiva con in Fig. 4.2.

Per quanto appena detto, l'equilibrio alla traslazione del sistema ① + ② è il seguente:

$$\begin{aligned} -mr\ddot{\theta} &= T_1 + T_2 = T_1 + fN_2 \\ 0 &= N_1 + N_2 - mg \end{aligned}$$

L'equilibrio alla rotazione di ① + ② intorno al punto  $A$  risulta

$$\textcircled{A}: 3aN_2 - \frac{3}{2}amg = J_{G_1}\ddot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}$$

Infine, l'equilibrio alla rotazione di ① intorno al punto  $G_1$  è la seguente

$$\textcircled{G_1}: T_1r = J_{G_1}\ddot{\theta}$$

L'insieme delle quattro equazioni appena scritte è risolvibile come visto precedenza. Naturalmente, una volta risolto il problema, è necessario verificare le forze d'attrito.



# 5

## Frenatura di un Disco

---

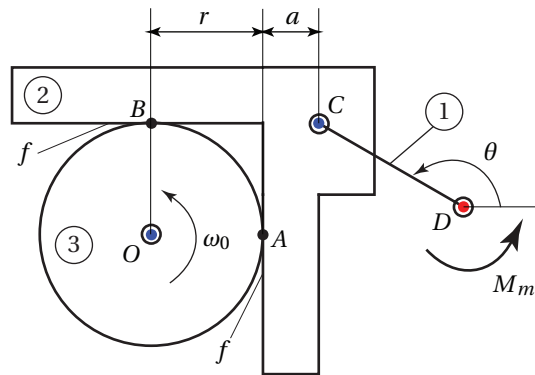


Figura 5.1 Schema meccanico.

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 5.1. Si suppone completamente nota la geometria del sistema: momento d'inerzia baricentrico del disco  $J_{G_3}$ , raggio del disco  $r$ , distanza  $a$  (come in figura), lunghezza  $l$  dell'asta ①, angolo  $\theta$ . Inoltre si assume che nei punti  $A$  e  $B$  ci sia un coefficiente di attrito  $f$  e che, in tali punti di contatto fra ② e ③ ci sia strisciamento (attrito radente). Sia assegnata la velocità angolare iniziale del disco  $\omega_0$  e il momento  $M_m$  applicato all'asta ①.

Si vuole determinare l'istante in cui il disco ③ si arresta.

### 5.1 Analisi dinamica

---

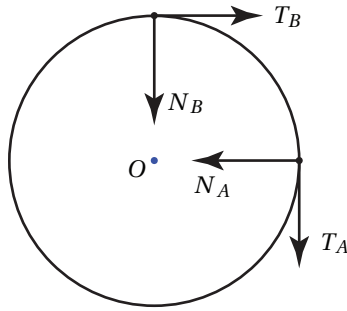
In questo caso si effettua da subito l'analisi dinamica in quanto la cinematica del sistema è banale e risulta tale per cui i corpi ① e ② sono fermi. Si fa riferimento al diagramma di corpo libero di ③ rappresentato in Fig. 5.2 e si scrive l'equilibrio alla rotazione di intorno a  $O$

$$\textcircled{O} : M_f = -(T_A + T_B)r = -f(N_A + N_B)r = J_{G_3} \ddot{\alpha} \quad (5.1)$$

dove si è sostituito  $T_A = fN_A$  e  $T_B = fN_B$  perchè in questi due punti c'è attrito radente. Si noti che, per come sono state scelte le direzioni delle forze in Fig. 5.2,  $T_A$  e  $T_B$  sono assunte positive. È necessario verificare questa ipotesi una volta risolto il problema.

Si scrive ora l'equilibrio del corpo ② intorno al punto  $C$

$$\textcircled{C} : -afN_A - (a+r)N_B + N_Ar = 0 \quad (5.2)$$



**Figura 5.2** Diagramma di corpo libero del disco ③. **Attenzione: la forza vincolare in O non è rappresentata in quanto per risolvere l'esercizio in esame non è necessaria.**

Dato che le reazioni scambiate in C fra ① e ② non interessano per la risoluzione del problema si scrive l'equilibrio del sistema composto da ① + ②. In particolare si scrive l'equilibrio alla rotazione intorno a D

$$\begin{aligned}
 \textcircled{D}: 0 &= M_m + N_A(r - l \sin(\theta)) - T_A(a - l \cos(\theta)) \\
 &+ T_B l \sin(\theta) - N_B(r + a - l \cos(\theta)) \\
 &= M_m + N_A(-af + r + fl \cos(\theta) - l \sin(\theta)) + \\
 &+ N_B(-a - r + l \cos(\theta) + fl \sin(\theta))
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Il sistema composto dalle (5.2) e (5.2) è composto da due equazioni nelle due incognite  $N_A$  e  $N_B$  e può quindi essere risolto separatamente ottenendo i valori di  $N_A$  e  $N_B$  in funzione del parametro  $M_m$

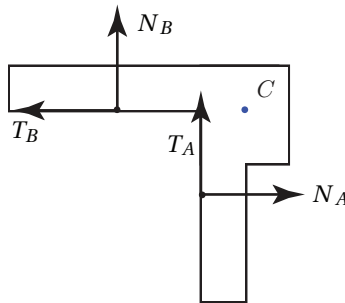
$$\begin{aligned}
 N_A &= - \frac{M_m(a+r)}{l((f+1)r \cos(\theta) - (af^2 - rf + a+r) \sin(\theta))} \\
 N_B &= \frac{M_m(af-r)}{l((f+1)r \cos(\theta) - (af^2 - rf + a+r) \sin(\theta))}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dalla (5.4) si ottiene direttamente che il momento frenante  $M_f$  sul disco ③ è dato da

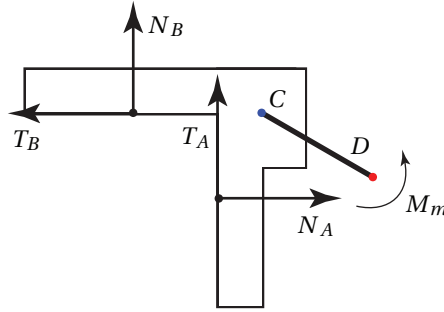
$$M_f = \frac{f M_m r (-fa + a + 2r)}{l((f+1)r \cos(\theta) - (af^2 - rf + a+r) \sin(\theta))} \tag{5.5}$$

Per cui il valore di  $\ddot{\alpha}$  risulta

$$\ddot{\alpha} = \frac{M_f}{J_{G_3}}$$



**Figura 5.3** Diagramma di corpo libero del corpo ②. **Attenzione: la forza vincolare in C non è rappresentata in quanto per risolvere l'esercizio in esame non è necessaria.**



**Figura 5.4** Diagramma di corpo libero del sistema ① + ②. **Attenzione: la forza vincolare in D non è rappresentata in quanto per risolvere l'esercizio in esame non è necessaria.**

e la legge di moto  $\dot{\alpha}(t)$  è la seguente

$$\dot{\alpha}(t) = \omega_0 + \frac{M_f}{J_{G_3}} t$$

Infine, l'istante di arresto  $t_a$  si determina imponendo  $\dot{\alpha}(t_a) = 0$  e risulta

$$t_a = -\frac{J_{G_3}}{M_f} \omega_0$$

### 5.1.1 Soluzione numerica

Siano assegnati i seguenti valori numerici

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 1800 \text{ rad/s} \\ r &= 0.08 \text{ m} \\ a &= 0.04 \text{ m} \\ f &= 0.4 \\ J_{G_3} &= 0.00384 \text{ kg m}^2 \\ M_m &= 22 \text{ N m} \\ l &= 0.12 \text{ m} \\ \theta &= 150^\circ \end{aligned}$$

Sostituendo nelle formule trovate precedentemente si ottiene:

$$\begin{aligned} N_A &= 152.571 \text{ N} \\ T_A &= 61.0285 \text{ N} \\ N_B &= 81.3714 \text{ N} \\ T_B &= 32.5486 \text{ N} \\ M_f &= -7.48617 \text{ N m} \\ t_a &= 0.923 \text{ s} \end{aligned}$$

Si noti che i valori di  $N_A$ ,  $T_A$ ,  $N_B$  e  $T_B$  sono positivi, confermando le assunzioni fatte.

# 6

## Frenatura di un Disco con un Peso

---

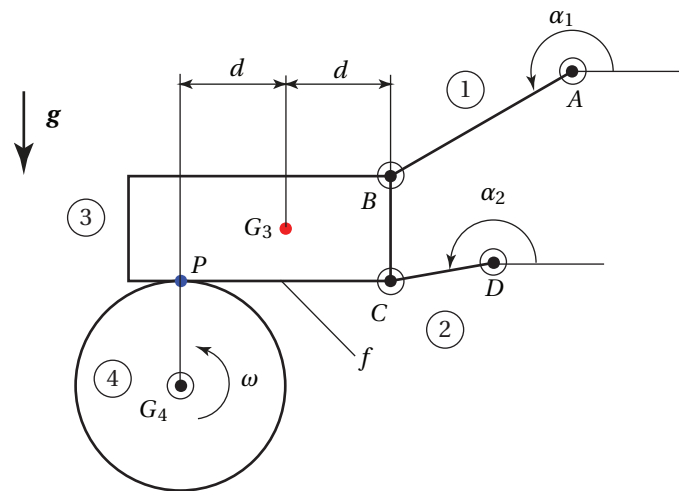


Figura 6.1 Schema meccanico.

Si consideri lo schema meccanico riportato in figura 6.1. Si assume completamente nota la geometria del sistema: lunghezza  $l_1$  e  $l_2$  delle aste ① e ②, massa  $m_3$  e momento d'inerzia baricentrico  $J_{G_3}$  di ③, raggio  $r$  e momento d'inerzia baricentrico  $J_{G_4}$  di ④.

È assegnata la velocità angolare iniziale  $\omega_0$  del disco e si considera che fra ③ e ④ sia presente un coefficiente d'attrito  $f$ . Si determini il tempo d'arresto del disco.

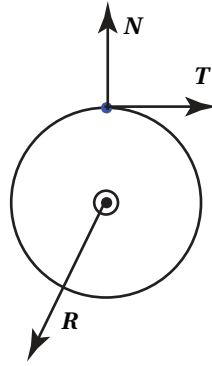
### 6.1 Dinamica

---

Nel sistema in esame il quadrilatero articolato costituito dai corpi ①, ② e ③ deve rimanere fermo affinché il corpo ③ freni il disco ④ attraverso la forza d'attrito. Si comincia considerando il diagramma di corpo libero del disco ④ rappresentato in figura 6.2. Per il problema in esame siamo interessati solamente all'equilibrio alla rotazione e pertanto l'unica equazione che interessa in questo caso è la seguente

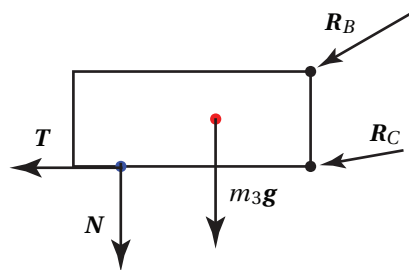
$$\textcircled{4}: -Tr = J_{G_4} \dot{\omega} \quad (6.1)$$

dove si è assunto  $\omega > 0$ . Qualora si assumesse  $\omega < 0$  dovremmo cambiare verso alla forza  $T$ . Dato che  $T$  è la forza dovuta all'attrito, allora fintantochè c'è strisciamento fra ③ e ④ vale la seguente



**Figura 6.2** Diagramma di corpo libero di ④.

relazione:  $T = fN$ . Si considera ora l'equilibrio del corpo ③ e si fa riferimento al diagramma di



**Figura 6.3** Diagramma di corpo libero di 3.

corpo libero rappresentato in figura 6.3. Si nota fin da subito che i corpi ① e ② si comportano come aste scariche e pertanto è nota la direzione di applicazione delle forze in B e C. Si scrivono ora le equazioni di equilibrio del corpo ③.

$$\begin{aligned}
 0 &= -T + R_B \cos(\alpha_1) + R_C \cos(\alpha_2) \\
 0 &= N + R_B \sin(\alpha_1) + R_C \sin(\alpha_2) - m_3 g \\
 \textcircled{3} : 0 &= -Nd - \frac{d}{2}T - \frac{d}{2}R_B \cos(\alpha_1) + dR_B \sin(\alpha_1) + \frac{d}{2}R_C \cos(\alpha_2) + dR_C \sin(\alpha_2)
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

L'insieme delle (6.1) e (6.2) insieme alla relazione d'attrito, costituisce un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite

$$(N, R_B, R_C, \dot{\omega})$$

e può quindi essere risolto analiticamente. Una volta determinato il valore di  $\dot{\omega}$ , che risulta costante, l'equazione oraria  $\omega(t)$  risulta quindi la seguente:

$$\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega} t$$

dalla quale è facilmente ricavabile il tempo di arresto del disco  $t_a$  attraverso la seguente formula:

$$t_a = -\frac{\omega_0}{\dot{\omega}}$$

## Frenatura di un Disco con Molle Precaricate

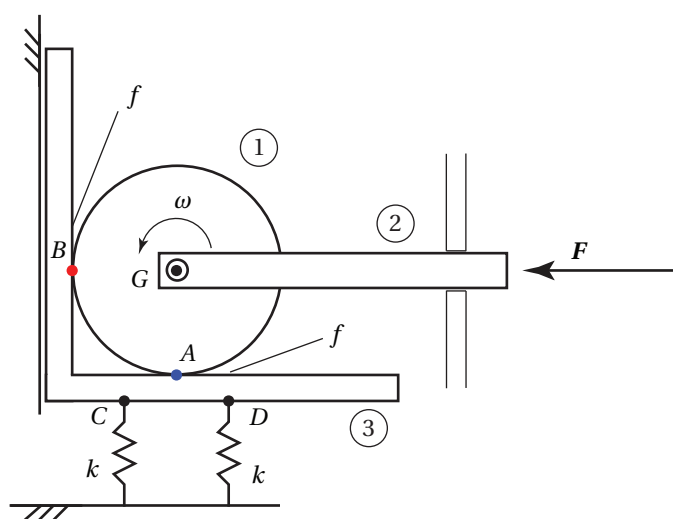


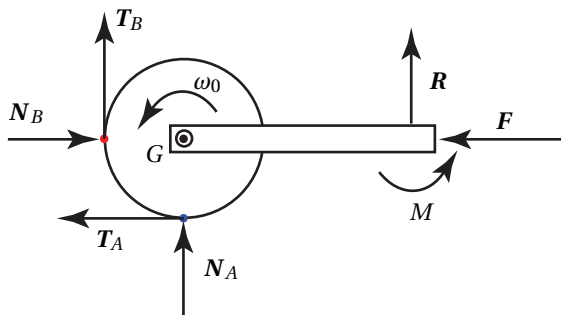
Figura 7.1 Schema meccanico.

Si consideri lo schema meccanico riportato in Fig. 7.1. Si assume completamente nota la geometria del sistema: momento d'inerzia baricentrico del disco  $J_{G_1}$ , costante elastica delle molle  $k$ , lunghezza iniziale delle molle (precarico)  $l_0$ , coefficiente di attrito fra ① e ③  $f$ . Si assume inoltre che non vi sia attrito fra ② e il telaio, così come non vi è attrito fra ③ e il telaio. Viene applicata a ② una forza  $F$  diretta come in figura. Si determini il tempo di arresto del disco e il valore limite di  $F$  affinché non si abbia distacco fra il disco e il corpo ③ nel punto A nel caso di  $\omega_0 > 0$  e  $\omega_0 < 0$ .

### 7.1 Dinamica

Per risolvere il problema in esame scriviamo dapprima l'equilibrio alla traslazione orizzontale del sottosistema ① + ② facendo riferimento allo schema riportato in figura 7.2 dove si è assunto  $\omega_0 > 0$ :

$$N_B - T_A - F = 0 \quad (7.1)$$



**Figura 7.2** Schema delle forze del sottosistema ① + ②.

Si considera in seguito l'equilibrio alla rotazione di ① intorno al punto G (si noti che le forze scambiate fra ① e ② nel giunto in G non danno contributo al momento totale e pertanto non vengono indicate):

$$\textcircled{G}: -(T_A + T_B)r = J_G \dot{\omega} \quad (7.2)$$

Si considera ora l'equilibrio del corpo ③. Si nota che, per il problema in esame è sufficiente considerare solamente l'equilibrio lungo y in quanto le reazioni vincolari applicate dal telaio su ③ non interessano. Si scrive solamente la seguente relazione

$$2kl_0 - N_A - T_B = 0 \quad (7.3)$$

Nelle precedenti equazioni valgono le seguenti relazioni d'attrito:

$$T_A = f N_A$$

$$T_B = f N_B$$

e pertanto l'insieme delle (7.1), (7.2) e (7.3) costituisce un sistema di tre equazioni in tre incognite. La soluzione di tale sistema fornisce il seguente valore della forza  $N_A$ :

$$N_A = \frac{2kl_0 - fF}{1 + f^2}$$

Il valore limite  $F_M$  della forza  $F$  affinché si mantenga il contatto fra ① e ③ in A si ricava imponendo

$$\frac{2kl_0 - fF_M}{1 + f^2} = 0$$

da cui risulta

$$F_M = \frac{2kl_0}{f}$$

Si noti che il valore di  $F_M$  è positivo e dipende dal precarico delle molle e dal coefficiente d'attrito fra ① e ③.

Nel caso in cui si abbia  $\omega_0 < 0$  è necessario cambiare verso alle forze  $T_A$  e  $T_B$  ottenendo le seguenti equazioni

$$N_B + T_A - F = 0$$

$$-T_B + N_A + R = 0$$

$$\textcircled{G}: (T_A + T_B)r = J_G \dot{\omega}$$

$$2kl_0 - N_A + T_B = 0$$

che, risolte insieme alle medesime relazioni d'attrito, forniscono il seguente valore del valore della forza  $N_A$ :

$$N_A = \frac{2kl_0 + fF}{1 + f^2}$$

so può notare fin da subito che il valore di  $N_A$  risulta positivo per ogni valore positivo di  $F$  e pertanto, nel caso in cui  $\omega_0 < 0$  non si ha distacco fra ① e ③ nel punto  $A$ .

Il calcolo del tempo d'arresto nei due casi risulta banale una volta risolta la dinamica attraverso i sistemi di equazioni scritti.



## Carrello con Peso e Attrito

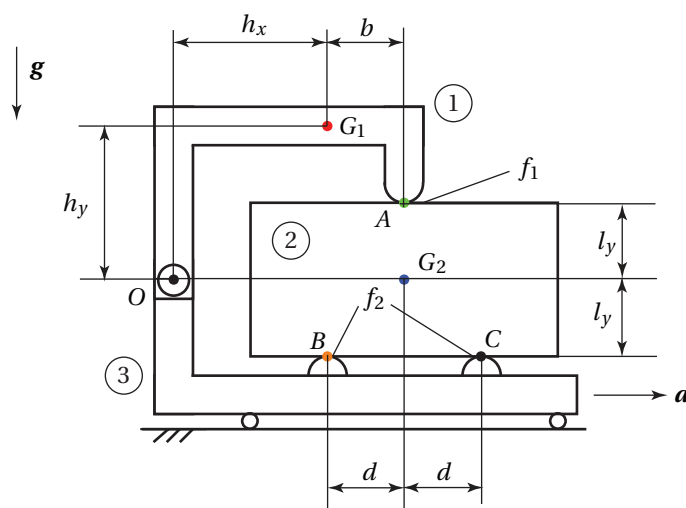


Figura 8.1 Schema meccanico.

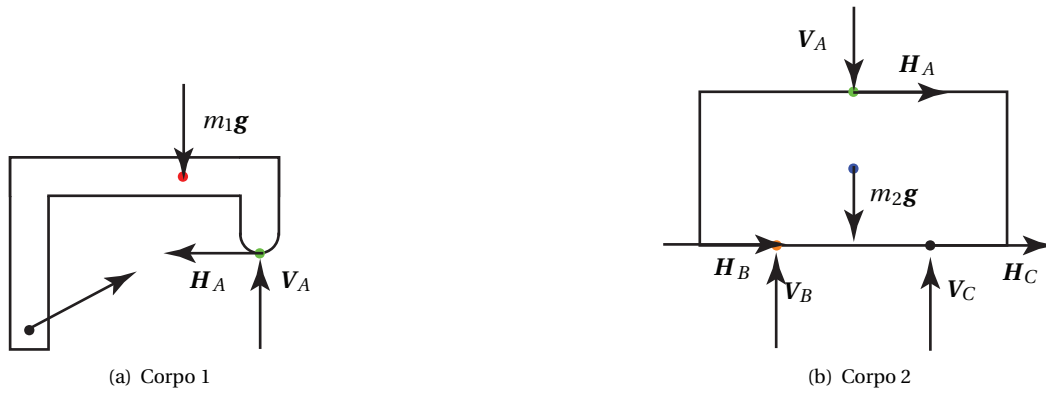
Si consideri lo schema meccanico riportato in Fig. 8.1 dove si assume completamente nota la geometria del sistema: massa  $m_1$  del corpo ①, massa  $m_2$  del corpo ②, coefficienti d'attrito (come in figura)  $f_1$  e  $f_2$  nei contatti nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Viene impressa un'accelerazione orizzontale  $a$  al carrello ③ e si richiede di determinare il valore limite di tale accelerazione affinché il corpo ② non strisci sui tre contatti. Si considerino i due casi:  $a > 0$ , e  $a < 0$ .

### 8.1 Dinamica

Notiamo innanzitutto che, affinché non ci sia strisciamento fra ② e il carrello l'accelerazione orizzontale di ② deve essere uguale ad  $a$ . Consideriamo dapprima il caso in cui  $a > 0$ . Si fa riferimento ai diagrammi di corpo libero di ① e ② rappresentati in Fig. 8.1. Per il corpo ① è sufficiente scrivere solamente l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno alla cerniera in  $O$ :

$$\textcircled{1} : (h_x + b)V_A + l_y H_A - h_x m_1 g = -h_y m_1 a \quad (8.1)$$



**Figura 8.2** Diagrammi di corpo libero.

Nella condizione di distacco incipiente si ha  $H_A = f_1 V_A$  e quindi è possibile risolvere in tale condizione l'equazione precedente ottenendo:

$$V_A = \frac{(gh_x - ah_y) m_1}{b + h_x + f_1 l_y} \quad (8.2)$$

Si scrive ora l'equilibrio del corpo ② per il quale è necessario scrivere tutte le equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} m_2 a &= H_A + H_B + H_C \\ 0 &= -V_A + V_B + V_C - m_2 g \\ \textcircled{2}: 0 &= -l_y H_A + l_y (H_B + H_C) + d (V_C - V_B) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Anche in questo caso, nella condizione di distacco incipiente si ha  $H_B = f_2 V_B$  e  $H_C = f_2 V_C$ . Per cui, con queste relazioni e con la (8.2), il sistema (8.3) è composto da tre equazioni nelle tre incognite

$$(V_B, V_C, a)$$

dove  $a$  rappresenta l'accelerazione limite. La soluzione di questo sistema risulta nel seguente valore dell'accelerazione limite

$$a = \frac{(f_1 + f_2) g h_x m_1 + f_2 g (b + h_x + f_1 l_y) m_2}{(f_1 + f_2) h_y m_1 + (b + h_x + f_1 l_y) m_2}$$

Nel caso in cui si assuma un'accelerazione negativa vanno cambiati i versi delle forze  $H_A$ ,  $H_B$ , e  $H_C$  e va risolto nuovamente il sistema. Le equazioni risultanti sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \textcircled{1}: h_y m_1 a &= (h_x + b) V_A - l_y H_A - h_x m_1 g \\ -m_2 a &= -H_A - H_B - H_C \\ 0 &= -V_A + V_B + V_C - m_2 g \\ \textcircled{2}: 0 &= l_y H_A - l_y (H_B + H_C) + d (V_C - V_B) \end{aligned}$$

In questo caso l'espressione dell'accelerazione limite è la seguente

$$a = -\frac{(f_1 + f_2) g h_x m_1 + f_2 g (b + h_x - f_1 l_y) m_2}{(f_1 + f_2) h_y m_1 + (b + h_x - f_1 l_y) m_2}$$

## 8.2 Soluzione Numerica

---

Si considerino i seguenti dati numerici:

$$m_1 = 1 \text{ kg}$$

$$h_x = 2 \text{ m}$$

$$b = 1 \text{ m}$$

$$h_y = 2 \text{ m}$$

$$f_1 = 0.3$$

$$f_2 = 0.4$$

$$d = 1 \text{ m}$$

$$l_x = 1 \text{ m}$$

$$l_y = 1 \text{ m}$$

$$m_2 = 2 \text{ kg}$$

Nel caso in cui  $a > 0$  il risultato numerico del sistema è il seguente:

$$V_A = 2.943 \text{ N}$$

$$V_B = 15.353 \text{ N}$$

$$V_C = 7.211 \text{ N}$$

$$a = 4.954 \text{ m/s}^2$$

che verifica le ipotesi fatte in quanto  $V_A$  risulta positivo. Nel caso in cui  $a < 0$  invece si hanno i seguenti risultati:

$$V_A = 3.4623 \text{ N}$$

$$V_B = 7.444 \text{ N}$$

$$V_C = 15.638 \text{ N}$$

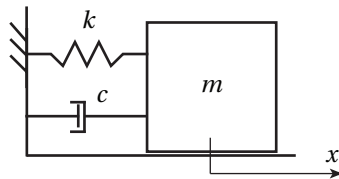
$$a = 5.136 \text{ m/s}^2$$

Si noti che nel caso di accelerazione negativa, il valore massimo di tale accelerazione è maggiore che nel caso opposto. Questo risulta sensato fisicamente in quanto se l'accelerazione è positiva il corpo ① tende a staccarsi da ② risultando quindi in una forza normale  $V_A$  più bassa che non nell'altro caso. Ovviamente, nel caso di accelerazione negativa il corpo ① è più serrato sul corpo ② e quindi le forze d'attrito sono maggiori.

# 9

## Oscillazioni Libere di un Sistema a 1 GDL

---



**Figura 9.1** Schema meccanico.

Si consideri il semplice sistema meccanico riportato in Fig. 9.1.

### 9.1 Dinamica

---

La dinamica del sistema in esame è banale e siamo interessati solamente all'equilibrio alla traslazione orizzontale che risulta il seguente:

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

Riordinando i termini si ottiene la forma classica per lo studio delle oscillazioni a 1 grado di libertà:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (9.1)$$

La precedente espressione è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Risulta comodo riscrivere la (9.1) dividendo per la massa  $m$  (che assume sempre valori positivi):

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (9.2)$$

dove abbiamo definito

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$
$$2\zeta\omega_n = \frac{c}{m}$$

da cui

$$\zeta = \frac{c}{2\omega_n m} = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

## 9.2 Oscillazioni Libere

---

Per risolvere l'equazione differenziale (9.2) si cercano soluzioni nella forma esponenziale

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

da cui discendono

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) &= \lambda^2 e^{\lambda t}\end{aligned}$$

Sostituendo le precedenti espressioni nella (9.2) si ottiene

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\zeta\omega_n \lambda e^{\lambda t} + \omega_n^2 e^{\lambda t} = 0$$

Raccogliendo i termini esponenziali si ha

$$(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n \lambda + \omega_n^2) e^{\lambda t} = 0$$

Affinchè questa equazione sia verificata per ogni  $t$  è necessario trovare i valori di  $\lambda$  che risolvono l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n \lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (9.3)$$

che è una semplice equazione algebrica di secondo grado. Le soluzioni della (9.3) sono le seguenti

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = \zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (9.4)$$

A seconda del segno del termine  $\sqrt{\zeta^2 - 1}$  si hanno diversi tipi di soluzione.

### 9.2.1 Caso 1

Consideriamo il caso in cui  $\zeta^2 - 1 > 0$ , cioè  $\zeta > 1$ . Indicando con  $c_c = 2\sqrt{km}$  il valore dello smorzamento critico si ha, in questo caso si ha  $c > c_c$ .

Le due soluzioni dell'equazione caratteristica sono quindi le seguenti

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ \lambda_2 &= -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\end{aligned}$$

di conseguenza la soluzione risultante si può scrivere come segue

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^{-\zeta\omega_n t} e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} t} + Be^{-\zeta\omega_n t} e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} t} \quad (9.5)$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t} \left( Ae^{\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} t} + Be^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right) \quad (9.6)$$

In questo caso il moto è di tipo *aperiodico smorzato*. Infatti calcolando il seguente limite

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= e^{-\zeta \omega_n t} \left( A e^{\omega_n t \sqrt{\zeta^2 - 1}} + B e^{-\omega_n t \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} A e^{\omega_n t (\sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta)} = 0\end{aligned}$$

e notando che  $(\sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta) < 0$ , segue che il valore di  $x(t)$  tende a smorzarsi indipendentemente dai valori di  $A$  e  $B$ .

I valori delle costanti  $A$  e  $B$  si determinano attraverso le condizioni iniziali, cioè assegnando al tempo  $t = 0$  il valore della posizione e della velocità della massa  $m$ . Si pone

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0\end{aligned}$$

e si sostituiscono tali valori, con  $t = 0$ , nella (9.5). Si ottengono quindi le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}x_0 &= A + B \\ v_0 &= -\zeta \omega_n (A + B) + A \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} - B \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}\end{aligned}$$

Nel caso in cui  $x_0 = 0$  si ha

$$\begin{aligned}A &= -B \\ 2A \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} &= v_0\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}A &= \frac{v_0}{2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ B &= -\frac{v_0}{2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}\end{aligned}$$

Se invece si avesse  $x_0 \neq 0$  e  $\dot{x}(0) = 0$  i due coefficienti sarebbero

$$\begin{aligned}A &= x_0 \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2 \sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ B &= x_0 \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2 \sqrt{\zeta^2 - 1}}\end{aligned}$$

### 9.2.2 Caso 2

Consideriamo ora il caso in cui  $\zeta^2 - 1 < 0$ , cioè  $c < c_c$  e  $\zeta > 0$ . Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono dunque le seguenti

$$\lambda_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{-1} \sqrt{1 - \zeta^2} = -\zeta \omega_n \pm i \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

e risultano complesse coniugate. L'espressione di  $x(t)$  in questo caso è dunque la seguente

$$\begin{aligned}x(t) &= A e^{-\zeta \omega_n t} e^{i \omega_n t \sqrt{1 - \zeta^2}} + B e^{-\zeta \omega_n t} e^{-i \omega_n t \sqrt{1 - \zeta^2}} \\ &= e^{-\zeta \omega_n t} \left( A e^{i \omega_n t \sqrt{1 - \zeta^2}} + B e^{-i \omega_n t \sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \\ &= e^{-\zeta \omega_n t} \left( A e^{i \omega_s t} + B e^{-i \omega_s t} \right)\end{aligned}$$

dove per maggiore chiarezza abbiamo indicato  $\omega_s = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ . La soluzione che abbiamo appena ottenuto contiene termini complessi ma, dovendo risultare globalmente una soluzione reale pura, allora anche  $A$  e  $B$  devono essere complessi anch'essi. Inoltre  $A$  e  $B$  devono risultare coniugati; infatti scrivendo

$$A = A_R + i A_I$$

$$B = B_R + i B_I$$

e sviluppando il termine fra parentesi nell'espressione di  $x(t)$  si ottiene

$$\begin{aligned} & (A_R + i A_I) (\cos(\omega_s t) + i \sin(\omega_s t)) + (B_R + i B_I) (\cos(\omega_s t) - i \sin(\omega_s t)) = \\ & A_R \cos(\omega_s t) + i A_I \cos(\omega_s t) + i A_R \sin(\omega_s t) - i A_I \sin(\omega_s t) + \\ & + B_R \cos(\omega_s t) + i B_I \cos(\omega_s t) + i B_R \sin(\omega_s t) + i B_I \sin(\omega_s t) \end{aligned}$$

La quantità che moltiplica l'unità immaginaria deve risultare identicamente nulla:

$$A_R \sin(\omega_s t) + A_I \cos(\omega_s t) - B_R \sin(\omega_s t) + B_I \cos(\omega_s t) = 0$$

da cui discende che

$$A_R = B_R$$

$$A_I = -B_I$$

cioè  $A$  e  $B$  devono essere coniugati. Per comodità di notazione si indicano

$$A_I = -B_I = -\frac{C_1}{2}$$

$$A_R = B_R = \frac{C_2}{2}$$

ne discende quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\zeta \omega_n t} \left( \frac{C_2 - i C_1}{2} e^{i \omega_s t} + \frac{C_2 + i C_1}{2} e^{-i \omega_s t} \right) \\ &= e^{-\zeta \omega_n t} \left( \frac{C_2 (e^{i \omega_s t} + e^{-i \omega_s t})}{2} + i \frac{C_1 (e^{-i \omega_s t} - e^{i \omega_s t})}{2} \right) \\ &= e^{-\zeta \omega_n t} (C_2 \cos(\omega_s t) + C_1 \sin(\omega_s t)) \end{aligned}$$

La soluzione così ottenuta è reale. L'espressione a cui siamo appena arrivati può essere riscritta in una forma equivalente come segue

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} D \cos(\omega_s t - \varphi)$$

Sviluppando il secondo membro si ottiene

$$D \cos(\varphi) \cos(\omega_s t) + D \sin(\varphi) \sin(\omega_s t) = C_2 \cos(\omega_s t) + C_1 \sin(\omega_s t)$$

da cui

$$C_1 = D \sin(\varphi)$$

$$C_2 = D \cos(\varphi)$$

Elevando al quadrato entrambe le espressioni e sommando i termini si ottiene

$$D = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

mentre dividendo membro a membro si ha

$$\tan(\varphi) = \frac{C_1}{C_2}$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$$

In maniera analoga si può scrivere

$$x(t) = E \sin(\omega_s t + \psi)$$
$$E = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$
$$\psi = \arctan\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$$

È interessante notare la seguente relazione

$$\tan(\psi) = \frac{1}{\tan(\varphi)}$$

Attraverso uno dei modi equivalenti di scrivere la risposta libera del sistema in esame si nota che il moto è di tipo *periodico smorzato* con periodo  $T$  dato dalla seguente relazione

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

Si noti che risulta  $\omega_s < \omega_n$  perchè  $\sqrt{1 - \zeta^2} < 1$ .

In maniera analoga al caso precedente si possono determinare i valori dei coefficienti  $C_1$  e  $C_2$  una volta che sono imposte le condizioni iniziali. In particolare

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (C_2 \cos(\omega_s t) + C_1 \sin(\omega_s t))$$
$$\dot{x}(t) = -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} (C_2 \cos(\omega_s t) + C_1 \sin(\omega_s t)) + e^{-\zeta\omega_n t} (-C_2 \sin(\omega_s t) + C_1 \cos(\omega_s t))$$

e imponendo  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = v_0$  si ha

$$C_2 = x_0$$
$$v_0 = \zeta\omega_n x_0 + C_1 \omega_s$$

da cui

$$C_1 = \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_s}$$

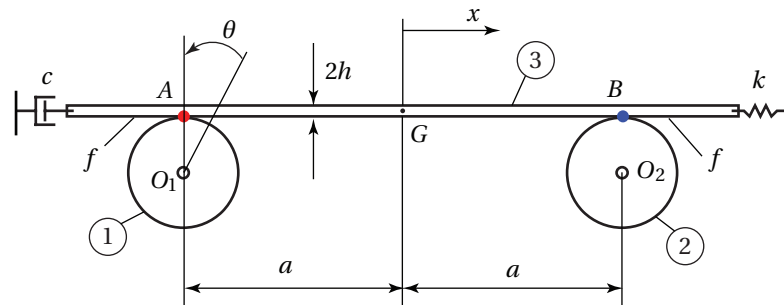
Per cui la soluzione generale risulta la seguente

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left( x_0 \cos(\omega_s t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_s} \sin(\omega_s t) \right)$$



## Oscillazioni di un Cinematismo a 1 GDL

---



**Figura 10.1** Schema meccanico.

Si consideri il semplice sistema meccanico riportato in Fig. 10.1. Si assume nota la geometria del sistema e si impongono le condizioni iniziali  $x_0$  e  $v_0$  della posizione e della velocità della sbarra. Il contatto fra i rulli e la sbarra è caratterizzato da rotolamento senza strisciamento. Si determinino

- La legge oraria  $x(t)$  in funzione delle condizioni iniziali imposte.
- Noto il coefficiente di attrito nel contatto fra i rulli e la sbarra, verificare se, con le condizioni iniziali imposte, può essere rispettato il vincolo di rotolamento senza strisciamento.

### 10.1 Dinamica

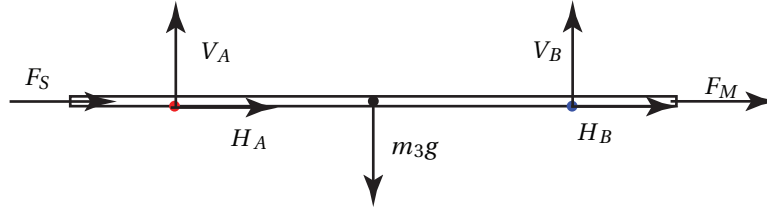
---

Cominciamo a scrivere le equazioni di congruenza che legano la rotazione dei rulli con lo spostamento orizzontale della sbarra. Per il vincolo di rotolamento senza strisciamento possiamo scrivere

$$r\theta = -x; \quad r\dot{\theta} = -\dot{x}; \quad r\ddot{\theta} = -\ddot{x}$$

Si scrivono ora le equazioni di equilibrio della sbarra ③ facendo riferimento al diagramma di corpo libero in Fig. 10.2, dove

$$F_S = -kx; \quad F_M = -c\dot{x}$$



**Figura 10.2** Diagramma di corpo libero di ③.

sono rispettivamente la forza esercitata dallo smorzatore e dalla molla:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= -kx - c\dot{x} + H_A + H_B \\
 0 &= V_A + V_B - mg \\
 \textcircled{3}: J_G\ddot{\varphi} &= V_B(a-x) + H_B h - V_A(a+x) + H_A h
 \end{aligned} \tag{10.1}$$

Nell'ipotesi in cui la sbarra rimanga orizzontale e in contatto con i rulli abbiamo  $\dot{\varphi} = 0$ .

Per quanto riguarda i rulli, siamo interessati solamente all'equilibrio alla rotazione intorno ai rispettivi centri<sup>1</sup>. Per cui, per il rullo ① abbiamo

$$\textcircled{1} H_A r = J_1 \ddot{\theta} \tag{10.2}$$

mentre per il rullo ② abbiamo

$$\textcircled{2} H_B r = J_2 \ddot{\theta} \tag{10.3}$$

Le reazioni vincolari esercitate dal telaio sui due rulli non interessano per la risoluzione del problema in esame.

Per scrivere l'equazione del moto è sufficiente considerare la prima equazione di (10.1) e poi le (10.2) e (10.3). Si ricavano infatti le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
 H_A &= \frac{J_1}{r} \ddot{\theta} = -\frac{J_1}{r^2} \ddot{x} \\
 H_B &= -\frac{J_2}{r^2} \ddot{x}
 \end{aligned}$$

per cui risulta

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} - \frac{J_1}{r^2} \ddot{x} - \frac{J_2}{r^2} \ddot{x}$$

Riorganizzando quest'ultima espressione si ottiene

$$\left[ m + \frac{1}{r^2} (J_1 + J_2) \right] \ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Per maggiore chiarezza si indicano

$$m_{eq} = \left[ m + \frac{1}{r^2} (J_1 + J_2) \right]; \quad c_{eq} = c; \quad k_{eq} = k$$

<sup>1</sup>I diagrammi di corpo libero di entrambi i rulli non vengono riportati per brevità.

Si noti che il termine  $\frac{J_1+J_2}{r^2}$  è la massa apparente traslante dei rulli. Con le sostituzioni di cui sopra il sistema si può quindi riscrivere nella forma generale

$$m_{eq}\ddot{x} - c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = 0$$

Indicando con  $\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$  la pulsazione naturale, con  $c_c = 2\sqrt{k_{eq}m_{eq}}$  lo smorzamento critico e con  $\zeta = \frac{c_{eq}}{c_c}$  il fattore di smorzamento, si ottiene la classica espressione

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

Si assume  $\zeta < 1$  e si ottiene quindi che il moto risultante è di tipo *periodico smorzato* ed ha la seguente soluzione

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left( x_0 \cos(\omega_s t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_s} \sin(\omega_s t) \right)$$

dove  $\omega_s = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ . Le grandezze che compaiono nell'espressione dell'equazione del moto sono tutte note e pertanto il moto è completamente noto.

Passiamo ora a verificare le condizioni di rotolamento senza strisciamento. Dalle relazioni della dinamica, una volta nota l'espressione di  $\ddot{x}$  si possono ricavare gli andamenti delle forze di contatto

$$H_A(t) = \frac{J_1}{r} \ddot{\theta}(t) = -\frac{J_1}{r^2} \ddot{x}$$

$$H_B(t) = \frac{J_2}{r} \ddot{\theta}(t) = -\frac{J_2}{r^2} \ddot{x}$$

Per cui, dalla seconda e terza equazione di (10.1) si ricavano  $V_A(t)$  e  $V_B(t)$ :

$$V_A(t) = -\frac{J_1+J_2}{r^2} \frac{h}{2a} \ddot{x}(t) + \frac{a-x(t)}{2a} mg$$

$$V_B(t) = \frac{J_1+J_2}{r^2} \frac{h}{2a} \ddot{x}(t) + \frac{a+x(t)}{2a} mg$$

In queste ultime due espressioni si nota che il termine

$$\frac{a+x(t)}{2a} mg$$

è il carico *statico* mentre il termine

$$\frac{J_1+J_2}{r^2} \frac{h}{2a} \ddot{x}(t)$$

rappresenta il trasferimento di carico *dinamico*.

Per verificare la condizione di rotolamento senza strisciamento devono essere verificate le seguenti espressioni

$$\frac{|H_A(t)|}{V_A(t)} = \frac{\frac{J_1}{r^2} |\ddot{x}(t)|}{-\frac{J_1+J_2}{r^2} \frac{h}{2a} \ddot{x}(t) + \frac{a-x(t)}{2a} mg} \leq f$$

$$\frac{|H_B(t)|}{V_B(t)} = \frac{\frac{J_2}{r^2} |\ddot{x}(t)|}{\frac{J_1+J_2}{r^2} \frac{h}{2a} \ddot{x}(t) + \frac{a+x(t)}{2a} mg} \leq f$$

In queste espressioni non abbiamo messo il modulo al denominatore in quanto facciamo l'ipotesi che le forze normali di contatto fra i rulli e la sbarra siano positive. In caso contrario infatti si avrebbe distacco. Si devono quindi verificare anche le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}V_A(t) > 0 &\Rightarrow \frac{a-x(t)}{2a} mg > \frac{J_1+J_2}{r^2} \frac{h}{2a} \ddot{x}(t) \\ &\Rightarrow \ddot{x}(t) < (a-x(t)) \frac{r^2}{h} \frac{mg}{J_1+J_2} \\ V_B(t) > 0 &\Rightarrow \frac{a+x(t)}{2a} mg > -\frac{J_1+J_2}{r^2} \frac{h}{2a} \ddot{x}(t)\end{aligned}$$

Si noti che in queste disequazioni si hanno funzioni del tempo da ambo i membri.

# 11

## Oscillazioni Libere di un Sistema a 2 GDL

---

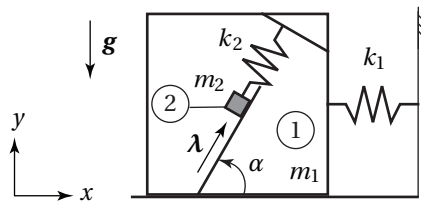


Figura 11.1 Schema meccanico.

Si consideri il semplice sistema meccanico riportato in figura 11.1. Si scrivano le equazioni che regolano la dinamica e si determinino i modi propri del sistema.

### 11.1 Dinamica

---

Prima di scrivere le equazioni della dinamica si scrive l'espressione della velocità assoluta  $v_2$  della massa ②

$$v_2 = (\dot{x}_1 + \dot{\lambda} \cos(\alpha), \dot{\lambda} \sin(\alpha))$$

dove  $\dot{x}_1$  è la velocità della massa ① lungo l'asse  $x$ . Si nota banalmente che la velocità di ① lungo l'asse  $y$  è nulla per effetto dei vincoli. L'energia cinetica totale del sistema risulta quindi la seguente

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\lambda}^2 + \dot{x}_1^2 + 2 \cos(\alpha) \dot{\lambda} \dot{x}_1)$$

In questo sistema l'energia potenziale è dovuta agli effetti gravitazionali e alle molle  $k_1$  e  $k_2$ :

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \lambda^2 + m_2 g \lambda \sin(\alpha)$$

Determinando le equazioni che regolano il moto del sistema attraverso le equazioni di Lagrange si ottiene

$$\begin{aligned} k_1 x_1 + m_1 \ddot{x}_1 + m_2 (\cos(\alpha) \ddot{\lambda} + \ddot{x}_1) &= 0 \\ k_2 \lambda + g m_2 \sin(\alpha) + m_2 [\ddot{\lambda} \sin^2(\alpha) + \cos(\alpha) (\cos(\alpha) \ddot{\lambda} + \ddot{x}_1)] &= 0 \end{aligned}$$

## 11.2 Oscillazioni libere

Si riscrivono le equazioni della dinamica del sistema nella classica notazione matriciale come segue

$$M\ddot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (11.1)$$

dove

$$M = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \cos(\alpha) \\ m_2 \cos(\alpha) & m_2 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Si cercano le soluzioni della (11.1) della forma

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{X}e^{i\omega t}$$

Sostituendo tale espressione nella (11.1) si ottiene

$$(-\omega^2 M + K)\mathbf{X}e^{i\omega t} = Z(\omega^2) = \mathbf{0}$$

Affinchè tale equazione sia verificata per ogni  $t$  è necessario imporre

$$\begin{aligned} 0 &= \det Z(\omega^2) \\ 0 &= (k_2 - m_2\omega^2)(k_1 - (m_1 + m_2)\omega^2) - m_2^2\omega^4 \cos^2(\alpha) \end{aligned}$$

La soluzione di quest'ultima equazione fornisce i valori delle pulsazioni proprie del sistema

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k_2 m_1 + (k_1 + k_2)m_2 - \sqrt{(k_1 m_2 + k_2(m_1 + m_2))^2 - 2k_1 k_2 m_2(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\alpha))}}{m_2(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\alpha))} \\ \omega_2^2 &= \frac{k_2 m_1 + (k_1 + k_2)m_2 + \sqrt{(k_1 m_2 + k_2(m_1 + m_2))^2 - 2k_1 k_2 m_2(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\alpha))}}{m_2(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\alpha))} \end{aligned}$$

A questo punto è necessario determinare gli autovettori della matrice  $Z(\omega^2)$  per determinare la forma dei modi propri. Il procedimento da seguire è qui riportato

- Si scrive  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$
- Si valuta  $Z(\omega_1^2)$
- La matrice ottenuta è sicuramente singolare e quindi le due equazioni ad essa associate sono linearmente dipendenti.
- Si fissa un valore diverso da zero per una delle componenti di  $\mathbf{X}$ , ad esempio  $X_1 = 1$ , e si ricava il valore dell'altra componente risolvendo una delle due equazioni di

$$Z(\omega_1^2)\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

- Si ripete lo stesso procedimento per l'altra pulsazione naturale  $\omega_2^2$ .

Si indicano i valori così ottenuti con

$$\mathbf{X}_1 = (X_{11}, X_{21}); \quad \mathbf{X}_2 = (X_{12}, X_{22})$$

e si costruisce la matrice modale  $U$  nel seguente modo

$$U = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

Attraverso tale matrice possiamo riscrivere (11.1) come segue

$$\mathbf{q} = U\mathbf{y}; \quad MU\ddot{\mathbf{y}} + KU\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

da cui, premoltiplicando per  $U^T$ , si ottiene

$$U^T MU\ddot{\mathbf{y}} + U^T KU\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

dove la matrice  $U^T MU$  risulta diagonale. Inoltre, normalizzando i vettori dei modi propri secondo la matrice di massa, ossia scegliendo

$$\tilde{U} = \left( \frac{\mathbf{X}_1}{\sqrt{\mathbf{X}_1^T M \mathbf{X}_1}}, \frac{\mathbf{X}_2}{\sqrt{\mathbf{X}_2^T M \mathbf{X}_2}} \right)$$

si ottiene il seguente importante risultato

$$\tilde{U}^T M \tilde{U} = I; \quad \tilde{U}^T K \tilde{U} = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2)$$

cioè il sistema risultante è disaccoppiato e pertanto si possono risolvere indipendentemente le due equazioni differenziali, invece di risolvere un sistema di due equazioni differenziali accoppiato.

### 11.3 Caso numerico

---

Si considerino i seguenti valori numerici

$$\begin{aligned} m_1 &= 10 \text{ kg}; & m_2 &= 1 \text{ kg}; & \alpha &= 60 \text{ deg} \\ k_1 &= 10 \text{ N/m}; & k_2 &= 1 \text{ N/m} \end{aligned}$$

In tal caso le matrici di (11.1) valgono

$$M = \begin{pmatrix} 11 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le frequenze proprie e le forme dei modi propri risultano di conseguenza

$$\omega_1^2 = 0.82248 \text{ rad/s}; \quad \omega_2^2 = 1.13101 \text{ rad/s}$$

$$\mathbf{X}_1 = (1, 2.31662); \quad \mathbf{X}_2 = (1, -4.31662)$$

mentre la matrice  $\tilde{U}$  risulta

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} 0.231352 & 0.198745 \\ 0.535955 & -0.857909 \end{pmatrix}$$

Per verifica si effettuano i seguenti calcoli

$$\tilde{U}^T M \tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{U}^T K \tilde{U} = \begin{pmatrix} 0.82248 & 0 \\ 0 & 1.13101 \end{pmatrix}$$

# 12

## Oscillazioni Forzate

---

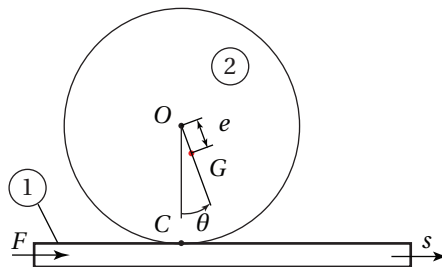


Figura 12.1 Schema meccanico.

Si consideri il semplice sistema meccanico riportato in Fig. 12.1. Si assume completamente nota la geometria del sistema: massa del disco  $m$ , momento d'inerzia  $J_G$  del disco, distanza  $e$  del baricentro del disco dal suo centro, massa  $M$  del corpo ①. Il contatto fra ① e ② è di rotolamento senza strisciamento, mentre il contatto fra ① e il suolo è privo di attrito. Viene imposto uno spostamento

$$s(t) = S_0 \cos(\Omega t)$$

al corpo ① come mostrato in Fig. 12.1.

Si determini l'equazione del moto in  $\theta(t)$  utilizzando i seguenti metodi:

- Equazioni di Lagrange
- Seconda equazione cardinale di ② scritta rispetto al centro delle velocità  $C_V$  di ② rispetto ad ①
- Seconda equazione cardinale di ② scritta rispetto al centro di istantanea rotazione  $C(t)$  di ② rispetto ad ①

### 12.1 Equazioni di Lagrange

---

Le coordinate lagrangiane per questo sistema siano  $s(t)$  e  $\theta(t)$ . L'energia cinetica  $T$  del sistema risulta la seguente

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2$$



dove (fare attenzione alla notazione vettoriale)

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_{C_V} + \mathbf{v}_{GC_V} = \dot{s}\mathbf{i} + \dot{\theta}\mathbf{k} \wedge C_V G$$

e

$$C_V G = (e \sin(\theta(t)), r - e \cos(\theta(t)))$$

Da cui

$$v_G^2 = e^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2 + (\dot{s} + (e \cos(\theta) - r) \dot{\theta})^2$$

L'energia cinetica  $T_2$  del corpo ② risulta quindi

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} (m\dot{s}^2 - 2m(r - e \cos(\theta))\dot{\theta}\dot{s} + (J_G + m(e^2 + r^2) - 2emr \cos(\theta))\dot{\theta}^2) \\ &= \frac{1}{2} J_C(\theta) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (m\dot{s}^2 - 2m(r - e \cos(\theta))\dot{s}\dot{\theta}) \end{aligned}$$

dove

$$J_C(\theta) = J_G + m(e^2 + r^2) - 2emr \cos(\theta)$$

è il momento d'inerzia (variabile con  $\theta$ ) di ② rispetto al centro d'istantanea rotazione  $C(t)$ . L'energia potenziale  $U$  del sistema è data dalla seguente relazione

$$U(\theta) = mge(1 - \cos(\theta))$$

I vari termini delle equazioni di Lagrange sono riportati di seguito. Per la prima coordinata lagrangiana si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt} (J_C(\theta) \dot{\theta} - m\dot{s}(r - e \cos(\theta))) \\ &= \frac{dJ_C(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}^2 + J_C(\theta) \ddot{\theta} - m\dot{s}(r - e \cos(\theta)) - m\dot{s}\dot{\theta} e \sin(\theta) \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \frac{dJ_C(\theta)}{d\theta} - me\dot{s}\dot{\theta} \sin(\theta) = emr\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - me\dot{s}\dot{\theta} \sin(\theta) \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= mge \sin(\theta) \end{aligned}$$

da cui si ottiene la seguente equazione del moto

$$emr \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + egm \sin(\theta) + J_C(\theta) \ddot{\theta} = m(r - e \cos(\theta)) \ddot{s} \quad (12.1)$$

Per quanto riguarda la seconda coordinata lagrangiana si hanno i seguenti termini

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} &= \frac{d}{dt} ((M + m)\dot{s} - m\dot{\theta}(r - e \cos(\theta))) \\ &= M\ddot{s} + m(-e \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + \ddot{s} + (e \cos(\theta) - r) \ddot{\theta}) \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

da cui discende

$$(m + M)\ddot{s} + m(e \cos(\theta) - r) \ddot{\theta} - em \sin(\theta) \dot{\theta}^2 = F(t) \quad (12.2)$$

Si noti che l'equazione (12.1), cioè l'equazione del moto in  $\theta(t)$ , rappresenta la dinamica diretta, mentre invece la (12.2) consente, una volta risolta la (12.1), di determinare la forza  $F(t)$  necessaria ad ottenere il moto imposto. La (12.2) è dunque la soluzione della dinamica inversa ed è infatti un'equazione algebrica in  $F(t)$ .

## 12.2 Seconda cardinale rispetto a $C_V$ di ② rispetto a ①

Il momento  $M_{C_V}$  delle forze esterne a ② rispetto a  $C_V$  è dato dalla seguente relazione

$$M_{C_V} = -mge \sin(\theta) \mathbf{k} \quad (12.3)$$

Dato che  $C_V$  appartiene a ② ne discendono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{C_V} &= \dot{s} \mathbf{i} \\ \mathbf{a}_{C_V} &= \mathbf{a}_{C_V}^{(r)} + \mathbf{a}_{C_V}^{(t)} = r\dot{\theta}^2 \mathbf{j} + \dot{s} \mathbf{i} \\ \mathbf{K}_{C_V}^{(r)} &= J_{C_V} \dot{\theta} \mathbf{k} = J_C(\bar{\theta}) \dot{\theta} \mathbf{k} \\ \dot{\mathbf{K}}_{C_V}^{(r)} &= J_C(\bar{\theta}) \ddot{\theta} \mathbf{k} \end{aligned}$$

Si noti che nella derivazione di  $\mathbf{K}_{C_V}^{(r)}$  il termine  $J_C(\bar{\theta})$  è costante in quanto  $C_V$  è un punto fisso su ②. Per le relazioni appena scritte la seconda equazione cardinale rispetto a  $C_V$  risulta la seguente

$$\begin{aligned} M_{C_V} &= \dot{\mathbf{K}}_{C_V}^{(r)} + C_V G \wedge (m \mathbf{a}_{C_V}) \\ -egm \sin(\theta) &= emr \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - mr \ddot{s} + em \cos(\theta) \ddot{s} + J_C(\theta) \ddot{\theta} \end{aligned}$$

che risulta uguale alla (12.1).

## 12.3 Seconda cardinale rispetto a $C(t)$ di ② rispetto a ①

Il momento delle forze calcolato rispetto a  $C(t)$  è identico alla (12.3), mentre è necessario prestare attenzione al fatto che  $C(t)$  non appartiene a ② e pertanto valgono le seguenti relazioni

$$\mathbf{v}_C = (\dot{s} - r\dot{\theta}) \mathbf{i}; \quad \mathbf{a}_C = (\ddot{s} - r\ddot{\theta}) \mathbf{i}$$

Vediamo due metodi alternativi per scrivere la seconda equazione cardinale rispetto al punto  $C(t)$ . Calcoliamo dapprima il valore di  $\mathbf{K}_C$  come segue

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_C &= \sum (CP_i \wedge m_i \mathbf{v}_{P_i}) \\ &= \sum (CP_i \wedge m_i (\mathbf{v}_{C_V} + \dot{\theta} \mathbf{k} \wedge CP_i)) \\ &= \sum (CP_i \wedge m_i (\dot{s} \mathbf{i} + \dot{\theta} \mathbf{k} \wedge CP_i)) \\ &= \sum (CP_i \wedge (m_i \dot{\theta} \mathbf{k} \wedge CP_i)) + \sum (CP_i \wedge (m_i \dot{s} \mathbf{i})) \\ &= J_C(\theta) \dot{\theta} \mathbf{k} + CG \wedge (m \dot{s} \mathbf{i}) \end{aligned}$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{\mathbf{K}}_C = J_C(\theta) \ddot{\theta} + \frac{\partial J_C(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta}^2 + \frac{dCG}{dt} \wedge (m \dot{s} \mathbf{i}) + CG \wedge (m \ddot{s} \mathbf{i})$$

dove

$$\frac{\partial J_C(\theta)}{\partial \theta} = 2emr \sin(\theta); \quad \frac{dCG}{dt} = (e \cos(\theta) \dot{\theta}, e \sin(\theta) \dot{\theta})$$

Inoltre si ha anche che

$$\dot{\mathbf{K}}_C = \sum ((\mathbf{v}_{P_i} - \mathbf{v}_C) \wedge (m_i \mathbf{v}_{P_i}) + CP_i \wedge (m_i \mathbf{a}_{P_i})) = -\mathbf{v}_C \wedge m \mathbf{v}_G + \mathbf{M}_I$$

dove  $\mathbf{M}_I$  è il momento delle forze d'inerzia. Per cui risulta

$$\mathbf{M}_I = \dot{\mathbf{K}}_C + \mathbf{v}_C \wedge m \mathbf{v}_G$$

Combinando insieme le relazioni appena scritte si ottiene la seconda equazione cardinale scritta rispetto al punto C:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C &= \mathbf{M}_I \\ \mathbf{M}_C &= J_C(\theta)\ddot{\theta} + \frac{\partial J_C(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta}^2 + \frac{dCG}{dt} \wedge (m\dot{s}\mathbf{i}) + CG \wedge (m\dot{s}\mathbf{i}) + \mathbf{v}_C \wedge m \mathbf{v}_G \\ -mge \sin(\theta) &= J_C(\theta)\ddot{\theta} + emr \sin(\theta)\dot{\theta}^2 + (mec \cos(\theta) - mr)\ddot{s} \end{aligned}$$

che equivale alla (12.1).

### Alternativa

In alternativa si può utilizzare il termine  $\mathbf{K}_C^{(r)}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_C^{(r)} &= \sum (CP_i \wedge m_i(\mathbf{v}_{P_i} - \mathbf{v}_C)) \\ &= \sum (CP_i \wedge m_i(\dot{\theta} \mathbf{k} \wedge CP_i + r\dot{\theta} \mathbf{i})) \\ &= J_C(\theta)\dot{\theta} \mathbf{k} + CG \wedge mr\dot{\theta} \mathbf{i} \end{aligned}$$

da cui

$$\dot{\mathbf{K}}_C^{(r)} = J_C(\theta)\ddot{\theta} + \frac{\partial J_C(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta}^2 + CG \wedge mr\ddot{\theta} \mathbf{i} + (\mathbf{v}_G - \mathbf{v}_C) \wedge mr\dot{\theta} \mathbf{i}$$

Esplicitando il valore dell'unica componente non nulla di  $\mathbf{K}_C^{(r)}$  si ha

$$\begin{aligned} K_C^{(r)} &= J_C(\theta)\dot{\theta} - m\dot{\theta}r^2 + em \cos(\theta)\dot{\theta}r \\ \dot{K}_C^{(r)} &= J_C(\theta)\ddot{\theta} - m\ddot{\theta}r^2 + em \sin(\theta)\dot{\theta}^2 r + em \cos(\theta)\ddot{\theta}r \end{aligned}$$

In definitiva la seconda equazione cardinale può essere scritta come segue

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C &= \dot{\mathbf{K}}_C^{(r)} + CG \wedge m \mathbf{a}_C \\ CG \wedge m \mathbf{a}_C &= (m\ddot{\theta}r^2 - m\dot{\theta}r - em \cos(\theta)\ddot{\theta}r + em \cos(\theta)\dot{\theta}^2 r) \mathbf{k} \\ -mge \sin(\theta) &= J_C(\theta)\ddot{\theta} + em \sin(\theta)\dot{\theta}^2 r - m\dot{\theta}r + em \cos(\theta)\dot{\theta}^2 r \end{aligned}$$

che coincide con la (12.1).

## 12.4 Piccole oscillazioni

---

Si studiano ora le piccole oscillazioni intorno alla posizione  $\theta = 0$ . Per prima cosa si effettua la linearizzazione nell'intorno di tale punto. Il momento d'inerzia  $J_C(\theta)$  viene quindi approssimato attraverso la seguente relazione

$$J_C(0) = J_G + m(r - e)^2$$

e risulta pertanto costante. L'equazione (12.1) può essere quindi riscritta come segue

$$egm\theta + J_C(0)\ddot{\theta} = m(r - e)\ddot{s} \quad (12.4)$$

Si cerca la soluzione particolare dell'equazione completa dove

$$\ddot{s} = s_0 \cos(\Omega t)$$

Consideriamo l'espressione complessa

$$\hat{s}(t) = s_0 e^{i\Omega t}$$

da cui segue

$$s(t) = \Re\{\hat{s}(t)\}$$

Derivando l'espressione di  $\hat{s}(t)$  si ottiene

$$\dot{\hat{s}} = i\Omega s_0 e^{i\Omega t}; \quad \ddot{\hat{s}} = -\Omega^2 s_0 e^{i\Omega t}$$

Si cerca una soluzione complessa del tipo

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}_0 e^{i\Omega t}; \quad \hat{\theta}_0 = \theta_0 e^{-i\varphi t}$$

Derivando tale espressione si ottiene

$$\dot{\hat{\theta}} = i\Omega \hat{\theta}_0 e^{i\Omega t}; \quad \ddot{\hat{\theta}} = -\Omega^2 \hat{\theta}_0 e^{i\Omega t}$$

Sostituendo le espressioni trovate nella (12.4) si ottiene

$$(-\Omega^2 J_C(0) + mge) \hat{\theta}_0 e^{i\Omega t} = -m(r-e)\Omega^2 s_0 e^{i\Omega t}$$

Dovendo soddisfare questa relazione per ogni istante  $t$  si ottiene

$$\hat{\theta}_0 = -\frac{m(r-e)\Omega^2 s_0}{mge - \Omega^2 J_C(0)}$$

Cerchiamo ora una forma più comoda per studiare le oscillazioni forzate del sistema. Si riscrive quindi l'equazione (12.4) utilizzando i coefficienti normali (si divide per  $J_C(0)$ )

$$\ddot{\theta} + \frac{mge}{J_C(0)}\theta = \frac{m(r-e)}{J_C(0)}\ddot{s} = -\frac{m(r-e)}{J_C(0)}\Omega^2 s_0 \cos(\Omega t)$$

Definendo

$$\omega_n^2 = \frac{mge}{J_C(0)}; \quad A = -\frac{m(r-e)s_0}{J_C(0)}$$

e utilizzando la forma complessa si ottiene

$$\begin{aligned} -\Omega^2 \hat{\theta} + \omega_n^2 \hat{\theta} &= A\Omega^2 e^{i\Omega t} \\ (-\Omega^2 + \omega_n^2) \hat{\theta}_0 e^{i\Omega t} &= A\Omega^2 e^{i\Omega t} \end{aligned}$$

Da cui, dividendo per  $\omega_n^2$  e risolvendo su  $\hat{\theta}_0$  si ottiene

$$\hat{\theta}_0 = \frac{A \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

L'ampiezza  $\theta_0$  della risposta forzata del sistema è data quindi da

$$\theta_0 = \left| \frac{A \left( \frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2}{1 - \left( \frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2} \right|$$

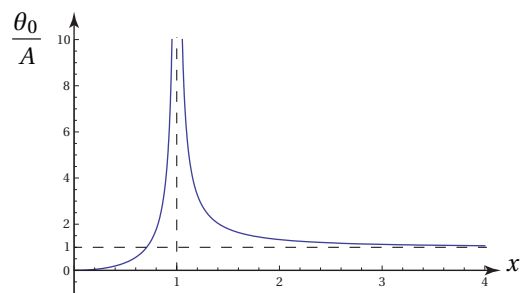
Indicando con

$$x = \left( \frac{\Omega}{\omega_n} \right)$$

si ottiene

$$\frac{\theta_0}{A} = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

il cui grafico qualitativo è riportato in Fig. 12.2. Si noti che in corrispondenza del valore  $x = 1$  si ha un asintoto verticale. Questa condizione corrisponde ad avere una frequenza della forzante uguale alla frequenza propria del sistema e pertanto si ha un fenomeno di risonanza.

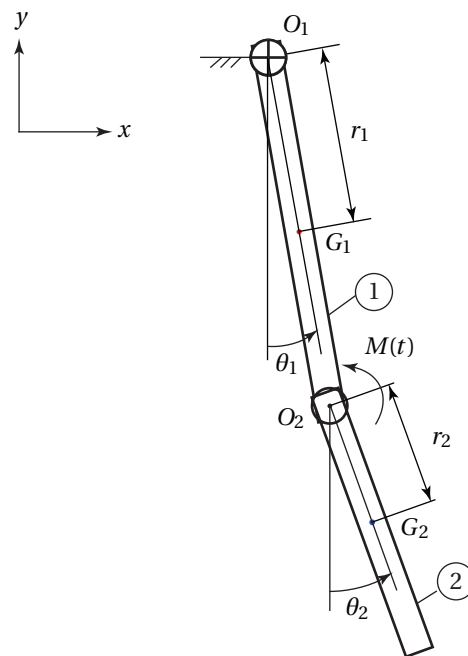


**Figura 12.2** Ampiezza della risposta forzata del sistema.

# 13

## Oscillazioni Forzate del Doppio Pendolo

---



**Figura 13.1** Schema meccanico.

Si consideri il sistema meccanico riportato in Fig. 13.1 del quale si assumono completamente note la geometria e le caratteristiche d'inerzia dei corpi rigidi ( $m_1, J_{G_1}, m_2, J_{G_2}$ ). Il giunto rotoidale in  $O_2$  è attuato con un momento interno  $M(t) = M_0 \cos(\Omega t)$ .

Si scrivano le equazioni del moto del sistema valide in grande e poi, nell'ipotesi di piccole oscillazioni nell'intorno di  $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$  si risolvano le oscillazioni forzate.

### 13.1 Dinamica

---

Per determinare le equazioni che regolano la dinamica del sistema si utilizzano le equazioni di Lagrange. In via preliminare si riportano le relazioni cinematiche necessarie al calcolo dell'ener-

gia cinetica:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{G_1} &= \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \wedge O_1 G_1 \\ \mathbf{v}_{G_2} &= \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \wedge O_1 O_2 + \dot{\theta}_2 \mathbf{k} \wedge O_2 G_2\end{aligned}$$

che in componenti si scrivono come segue

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{G_1} &= (r_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1, r_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1) \\ \mathbf{v}_{G_2} &= (l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + r_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2, l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + r_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2)\end{aligned}$$

L'energia cinetica  $T$  del sistema è quindi data dalla seguente relazione

$$\begin{aligned}T &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} J_{G_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} J_{G_2} \dot{\theta}_2^2 \\ &= \frac{1}{2} (J_{G_1} + m_1 r_1^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (l_1^2 m_2 \dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 m_2 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + (m_2 r_2^2 + J_{G_2}) \dot{\theta}_2^2)\end{aligned}$$

L'energia potenziale  $U$ , nel caso in esame, è dovuta solamente agli effetti gravitazionali e la sua espressione è la seguente

$$U = -g m_1 r_1 \cos(\theta_1) - g m_2 (l_1 \cos(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2))$$

I termini delle equazioni di Lagrange sono quindi i seguenti

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} &= m_2 \ddot{\theta}_1 l_1^2 + m_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 l_1 - m_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 \\ &\quad + m_2 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 l_1 + m_1 r_1^2 \ddot{\theta}_1 + J_{G_1} \ddot{\theta}_1 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_1} &= -l_1 m_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \frac{\partial u}{\partial \theta_1} &= g (l_1 m_2 + m_1 r_1) \sin(\theta_1) \\ Q_1^{(nc)} &= M(t) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial(\theta_2 - \theta_1)}{\partial \theta_1} \mathbf{k} = -M(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} &= -l_1 m_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + l_1 m_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \\ &\quad + l_1 m_2 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + (m_2 r_2^2 + J_{G_2}) \ddot{\theta}_2 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_2} &= l_1 m_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \frac{\partial u}{\partial \theta_2} &= g m_2 r_2 \sin(\theta_2) \\ Q_2^{(nc)} &= M(t) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial(\theta_2 - \theta_1)}{\partial \theta_2} \mathbf{k} = M(t)\end{aligned}$$

Combinando tutti i termini appena scritti si ottengono le seguenti equazioni del moto.

$$\begin{aligned}-M(t) &= l_1 m_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + g l_1 m_2 \sin(\theta_1) + g m_1 r_1 \sin(\theta_1) \\ &\quad + (m_2 l_1^2 + m_1 r_1^2 + J_{G_1}) \ddot{\theta}_1 + l_1 m_2 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 \\ M(t) &= m_2 \ddot{\theta}_2 r_2^2 - l_1 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 r_2 + g m_2 \sin(\theta_2) r_2 \\ &\quad + l_1 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 r_2 + J_{G_2} \ddot{\theta}_2\end{aligned}$$

## 13.2 Piccole oscillazioni forzate

---

Linearizzando le equazioni del moto (valide in grande) nell'intorno di  $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$  si ottiene

$$\begin{aligned} -M(t) &= g(l_1 m_2 + m_1 r_1) \theta_1 + (m_2 l_1^2 + m_1 r_1^2 + J_{G_1}) \ddot{\theta}_1 + l_1 m_2 r_2 \ddot{\theta}_2 \\ M(t) &= g m_2 r_2 \theta_2 + l_1 m_2 r_2 \ddot{\theta}_1 + (m_2 r_2^2 + J_{G_2}) \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (13.1)$$

Si riorganizzano tali equazioni nella classica forma matriciale<sup>1</sup>

$$M\ddot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = \mathbf{Q}_0 e^{i\Omega t} \quad (13.2)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (\theta_1, \theta_2); & \mathbf{Q}_0 &= (-M_0, M_0); \\ m_{11} &= J_{G_1} + m_2 l_1^2 + m_1 r_1^2; & m_{12} = m_{21} &= m_2 l_1 r_2; & m_{22} &= J_{G_2} m_2 r_2^2; \\ k_{11} &= g(m_2 l_1 + m_1 r_1); & k_{12} = k_{21} &= 0; & k_{22} &= g m_2 r_2 \end{aligned}$$

Si cercano soluzioni della forma

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{y} e^{i\Omega t}$$

per cui, sostituendo nella (13.2) si ottiene

$$(-\Omega^2 M + K) \mathbf{y} e^{i\Omega t} = \mathbf{Q}_0 e^{i\Omega t}$$

Risolvendo su  $\mathbf{y}$  si ottiene

$$\mathbf{y} = (-\Omega^2 M + K)^{-1} \mathbf{Q}_0$$

Si definisce la matrice  $Z(\Omega)$  come segue

$$Z(\Omega) = (-\Omega^2 M + K)$$

e si nota che tale matrice ha la stessa forma di quella che viene utilizzata per il calcolo dei modi propri del sistema. Per cui, imponendo nullo il determinante di  $Z(\Omega)$  si possono determinare le pulsazioni proprie.

## 13.3 Caso numerico

---

Siano assegnati i seguenti valori numerici

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 \text{ kg}; & l_1 &= 0.6 \text{ m}; & r_1 &= l_1/2 \\ J_{G_1} &= 0.0208 \text{ kg m}^2; & m_2 &= 0.75 \text{ kg}; & l_2 &= 0.35 \text{ m} \\ r_2 &= l_2/2; & J_2 &= 7.656 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2; & M_0 &= 0.5 \text{ N m} \end{aligned}$$

Le matrici del sistema linearizzato assumono pertanto i seguenti valori

$$M = \begin{pmatrix} 0.2708 & 0.065625 \\ 0.065625 & 0.0306248 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 6.13125 & 0 \\ 0 & 1.28756 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} -0.05 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

---

<sup>1</sup>Il termine forzante è stato scritto nella forma complessa.



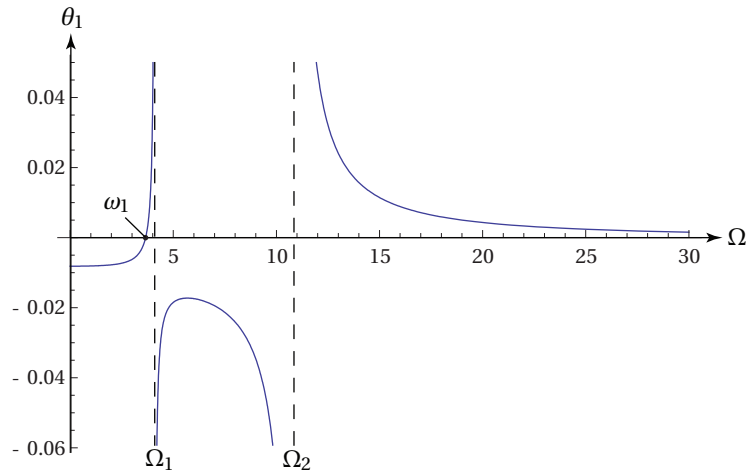
La matrice  $Z(\Omega)$  risulta quindi

$$Z(\Omega) = \begin{pmatrix} 6.13125 - 0.2708\Omega^2 & -0.065625\Omega^2 \\ -0.065625\Omega^2 & 1.28756 - 0.0306248\Omega^2 \end{pmatrix}$$

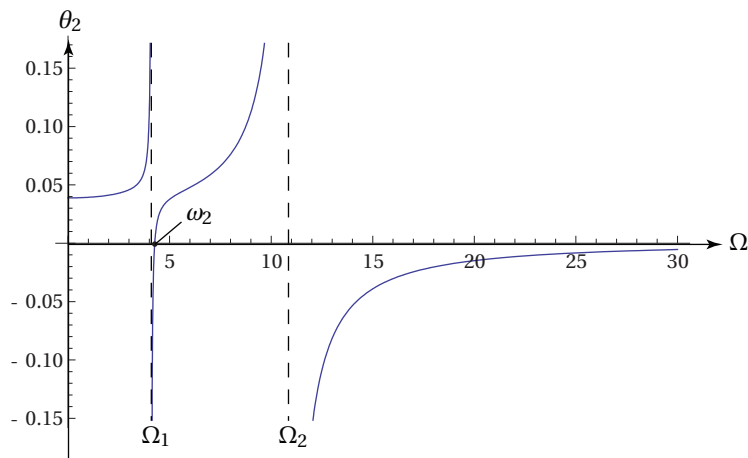
Di conseguenza le pulsazioni naturali risultano le seguenti

$$\Omega_1 = 4.101 \text{ rad/s}; \quad \Omega_2 = 10.851 \text{ rad/s}$$

L'ampiezza della risposta forzata al variare della frequenza  $\Omega$  della forzante è rappresentato nelle Figg. 13.2 e 13.3. Si noti che in corrispondenza delle due frequenze proprie del sistema si hanno



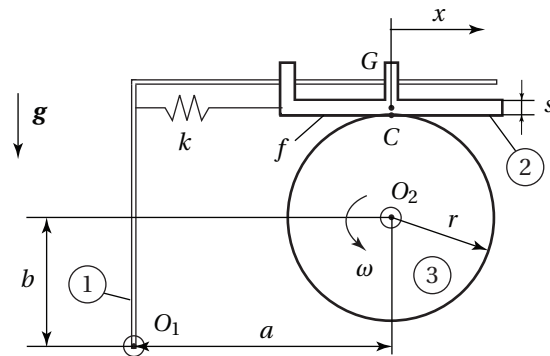
**Figura 13.2** Ampiezza di  $y_1(t)$ .



**Figura 13.3** Ampiezza di  $y_2(t)$ .

due asintoti verticali. Inoltre si nota che esistono due particolari valori di  $\Omega$  (indicati con  $\omega_1$  e  $\omega_2$ ) per i quali l'ampiezza di una delle due variabili è nulla. In particolare nel caso in cui  $\Omega = \omega_1$  si parla di smorzamento dinamico del corpo ①, mentre nel caso in cui  $\Omega = \omega_2$  si parla di smorzamento dinamico del corpo ②.

## Oscillazioni Forzate 2



**Figura 14.1** Schema meccanico.

Si consideri il sistema meccanico riportato in Fig. 14.1. Il disco ③ ruota ad una velocità angolare costante  $\omega$  tale per cui la velocità di strisciamento fra ② e ③ abbia lo stesso verso in ogni istante. Il contatto fra ② e ③ è caratterizzato da attrito radente con coefficiente  $f$ .

Si determini la condizione di equilibrio statico di ① e ② nel caso in cui ③ sia fermo, e nel caso in cui  $\omega$  sia assegnata. Inoltre si determini l'equazione del moto del sistema complessivo con  $\omega$  assegnata.

### 14.1 Statica

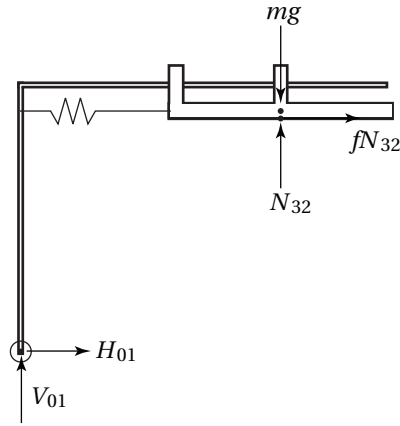
#### 14.1.1 Caso con $\omega = 0$

Nel caso di ③ fermo, si scrivono le equazioni di equilibrio del sottosistema ① + ② facendo riferimento al diagramma riportato in Fig. 14.2 (dove si considera  $fN_{32} = 0$  in quanto  $\omega = 0$ ).

$$\begin{aligned} H_{01} &= 0 \\ -mg + N_{32} + V_{01} &= 0 \\ \odot_{O_1} : N_{32}a - mga &= 0 \end{aligned}$$

La soluzione di tale sistema è banale e risulta

$$H_{01} = 0; \quad N_{32} = mg; \quad V_{01} = 0$$



**Figura 14.2** Schema delle forze sul sistema ① + ②.

### 14.1.2 Caso con $\omega = \text{cost} \neq 0$

In questo caso è necessario tenere di conto della forza d'attrito che si sviluppa fra ② e ③ e della forza esercitata dalla molla. Si scrive innanzitutto l'equilibrio di ② lungo  $x$

$$f\bar{N}_{32} - k\bar{x} = 0$$

Scriviamo ora l'equilibrio alla rotazione intorno a  $O_1$  del sottosistema ① + ②

$$-mg(a + \bar{x}) - f\bar{N}_{32}(b + r) + \bar{N}_{32}a = 0$$

Nelle due equazioni appena scritte si hanno due incognite  $\bar{N}_{32}$  e  $\bar{x}$  cioè la forza che si scambiano ② e ③ e l'elongazione della molla all'equilibrio. Risolvendo tali equazioni nelle due incognite si ottengono i seguenti risultati

$$\bar{N}_{32} = \frac{kmg a}{ak - f(bk + rk + gm)}; \quad \bar{x} = \frac{fmg a}{ak - f(bk + rk + gm)}$$

Affinchè la soluzione trovata abbia senso fisico è necessario che risulti  $\bar{N}_{32} > 0$ . In particolare il denominatore della soluzione di  $\bar{N}_{32}$  deve risultare positivo:

$$ak - f(bk + rk + gm) > 0$$

da cui discende, con  $k > 0$

$$k > \frac{fmg}{a - f(b+r)}; \quad a > f(b+r)$$

dove l'ultima relazione deve valere per avere  $k > 0$ .

## 14.2 Dinamica

Per determinare l'equazione del moto del sistema si scrive dapprima l'equilibrio lungo  $x$  del corpo ②.

$$m\ddot{x} = -kx + fN_{32} \quad (14.1)$$

Successivamente si scrive l'equilibrio alla rotazione intorno a  $O_1$  del sottosistema ① + ②.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 - mg(a+x) - fN_{32}(b+r) + N_{32}a &= \\ &= \left( \dot{K}_{G_1}^{(r)} + O_1G_1 \wedge m_1 \mathbf{a}_{G_1} + \dot{K}_{G_2}^{(r)} + O_1G_2 \wedge m_2 \mathbf{a}_{G_2} \right) \cdot \mathbf{k} \end{aligned}$$

Dato che ① non ha massa e ② ha un moto puramente traslatorio si ha

$$\begin{aligned} \dot{K}_{G_1}^{(r)} &= 0 \\ O_1G_1 \wedge m_1 \mathbf{a}_{G_1} &= 0 \\ \dot{K}_{G_2}^{(r)} &= 0 \\ O_2G_2 \wedge m_2 \mathbf{a}_{G_2} &= -m\ddot{x} \left( b+r + \frac{s}{2} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Per cui l'equilibrio alla rotazione di ① + ② risulta

$$\mathcal{Q}_1 - mg(a+x) - fN_{32}(b+r) + N_{32}a = -\ddot{x} \left( b+r + \frac{s}{2} \right) \quad (14.2)$$

Risolvendo la (14.2) si ottiene

$$N_{32} = \frac{m(2ag + 2xg - (2b + 2r + s)\ddot{x})}{2(a - f(b+r))}$$

Sostituendo questo risultato nella (14.1) si ottiene

$$m_{eq}\ddot{x} + k_{eq}x = F_{eq}$$

dove

$$m_{eq} = \frac{m(2a+fs)}{2(a-f(b+r))}; \quad k_{eq} = k + \frac{fmg}{f(b+r)-a}; \quad F_{eq} = \frac{afgm}{a-f(b+r)}$$

Si noti che l'espressione di  $F_{eq}$  risulta costante. Imponendo  $\ddot{x} = 0$  e risolvendo su  $x$  (cioè si cerca la soluzione particolare dell'equazione differenziale) si determina la medesima espressione di  $\bar{x}$  determinata in precedenza. La pulsazione propria  $\omega_n$  del sistema in esame è data dalla classica relazione

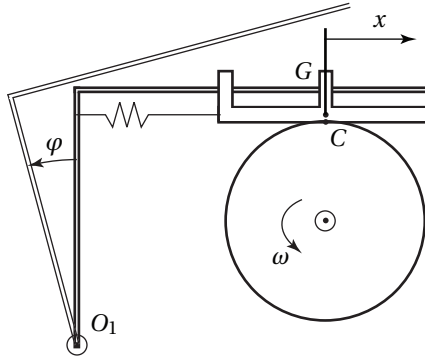
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{k(a-f(b+r)) - fmg}{m(a+f\frac{s}{2})}}$$

Affinchè si abbia un moto armonico è necessario che la quantità sotto radice sia positiva. In particolare la condizione da imporre è la stessa che si è imposta nel caso della soluzione statica con  $\omega \neq 0$ .

### 14.2.1 Dinamica con Equazioni di Lagrange

In questa sezione si riporta la scrittura delle equazioni del moto utilizzando le equazioni di Lagrange. È necessario precisare che il sistema in questione ha 3 gradi di libertà,  $x$ ,  $\theta$  e  $\varphi$ , e pertanto è necessario scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale in funzione di tali variabili (vedi Fig. 14.3). L'energia cinetica  $T$  del sistema si può quindi scrivere come segue (si ricordi che ① non ha massa nè inerzia)

$$T = T_2 + T_3 = \frac{1}{2}mv_{G_1}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad (14.3)$$



**Figura 14.3** Schema di riferimento per le equazioni di Lagrange.

dove

$$\mathbf{v}_{G_1} = \dot{\varphi} \mathbf{k} \wedge O_1 G_2 + \dot{x} \boldsymbol{\lambda} = \dot{x} \boldsymbol{\lambda} + \dot{\varphi} \mathbf{k} \wedge (O_1 G_2)$$

da cui

$$v_{G_1}^2 = \dot{x}^2 - (2b + 2r + s) \dot{\varphi} \dot{x} + \frac{1}{4} (4a^2 + 8xa + (2b + 2r + s)^2 + 4x^2) \dot{\varphi}^2$$

L'energia potenziale  $U$  del sistema complessivo risulta

$$U = \frac{1}{2} kx^2 + mgO_1 G_2 \cdot \mathbf{j} \quad (14.4)$$

### Termini non conservativi

Prima di scrivere le equazioni di Lagrange complete si determinano le espressioni dei termini non conservativi. Le forze non conservative che agiscono sul sistema sono

- il momento motore applicato sul disco ③ per mantenere  $\omega$  costante;
- la forza di contatto fra ② e ③.

Il termine  $Q_1^{(nc)}$  risulta

$$Q_1^{(nc)} = f N_{32} \mathbf{i} \cdot \frac{\partial x \mathbf{i}}{\partial x} = f N_{32}$$

Per quanto riguarda la seconda coordinata lagrangiana si ha

$$Q_2^{(nc)} = M(t) - f N_{32} \mathbf{i} \cdot \frac{\partial r \theta \mathbf{i}}{\partial \theta} = M(t) - f N_{32} r$$

Infine per l'ultima coordinata lagrangiana si ha

$$Q_3^{(nc)} = (N_{32} \mathbf{j} + f N_{32} \mathbf{i}) \cdot \frac{\partial O_1 C}{\partial \varphi} = a N_{32} - f N_{32} (b + r)$$

dove  $C$  è il punto di contatto fra ② e ③. Nelle espressioni sopra riportate si ricordi che  $\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$  e  $\ddot{\varphi} = 0$ .

### Equazioni del moto

Con i risultati determinati nella sezione precedente, le equazioni di Lagrange per il sistema in esame risultano le seguenti

$$\begin{aligned}m\ddot{x} + kx &= fN_{32} \\ J\ddot{\theta} &= -fN_{32}r + M(t) \\ gm(a + x(t)) - m(b + r - \frac{s}{2})\ddot{x} &= aN_{32} - fN_{32}(b + r)\end{aligned}$$

Si noti che la prima e la terza di tali equazioni coincidono con quelle determinate in precedenza utilizzando le equazioni cardinali della dinamica. Imponendo  $\ddot{\theta} = 0$ , dalla seconda equazione appena scritta si ricava

$$M(t) = fN_{32}$$

che fornisce l'espressione del momento necessario da applicare al disco ③ al fine di mantenere la velocità angolare  $\omega$  costante.

## Oscillazioni Forzate 3

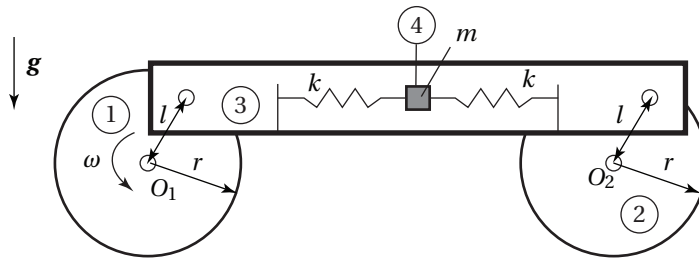


Figura 15.1 Schema meccanico.

Si consideri lo schema meccanico riportato in Fig. 15.1. I due dischi ① e ② hanno lo stesso raggio e le stesse caratteristiche d'inerzia (momento d'inerzia baricentrico  $J$ ). Il disco ① ruota ad una velocità angolare costante assegnata  $\omega$ . Si studino le oscillazioni forzate del sistema.

### 15.1 Dinamica

Per determinare le equazioni che regolano la dinamica del sistema in esame si fa ricorso alle equazioni di Lagrange. L'energia cinetica  $T$  del sistema è data da

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + 2\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right)$$

dove  $v$  è la velocità assoluta del corpo puntiforme ④. L'energia potenziale totale  $U$  è data da

$$U = 2\left(\frac{1}{2}kx^2\right) + mgl\sin(\theta)$$

dove  $x$  rappresenta lo spostamento relativo fra ④ e ③. Dalla cinematica si ottiene

$$\mathbf{v} = \dot{\theta}\mathbf{k} \wedge O_1A + \dot{x}\mathbf{i} = (\dot{x} - \dot{\theta}l\sin(\theta))\mathbf{i} + \dot{\theta}l\sin(\theta)\mathbf{j}$$

da cui

$$v^2 = \dot{\theta}^2 l^2 \sin^2(\theta) + \dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{\theta}l\sin(\theta) + \dot{\theta}^2 l^2 \cos^2(\theta) = \dot{\theta}^2 l^2 + \dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{\theta}l\sin(\theta)$$

Le due coordinate lagrangiane in questo sistema sono  $x$  e  $\theta$ . Scriviamo subito l'espressione dei termini non conservativi delle equazioni di Lagrange:

$$Q_1^{(nc)} = 0; \quad Q_2^{(nc)} = M(t)$$

I diversi termini dell'equazione di Lagrange relativa alla prima coordinata risultano i seguenti

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} - m\ddot{\theta}l \sin(\theta) - m\dot{\theta}^2 l \cos(\theta);$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 2kx$$

Mentre per la seconda coordinata lagrangiana si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\ddot{\theta} - m\ddot{x}l \sin(\theta) - m\dot{x}\dot{\theta}l \cos(\theta) + 2J\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -\dot{x} + \dot{\theta}l \cos(\theta); \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = mgl \cos(\theta)$$

Da cui le equazioni complete del moto risultano

$$m\ddot{x} - m\ddot{\theta}l \sin(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \cos(\theta) + 2kx = 0$$

$$(ml^2 + 2J)\ddot{\theta} - m\ddot{x}l \sin(\theta) - m\dot{x}\dot{\theta}l \cos(\theta) = M(t)$$

## 15.2 Vibrazioni

---

Si noti che la seconda delle due equazioni del moto del sistema serve solamente a determinare il valore del momento  $M(t)$  necessario affinché il corpo ① ruoti a velocità angolare costante. Per studiare le vibrazioni del sistema è quindi sufficiente considerare la prima equazione del moto riscritta nella classica forma

$$m_{eq}\ddot{x} + k_{eq}x = F_{eq}$$

Le grandezze presenti in tale equazione risultano i seguenti

$$m_{eq} = m; \quad k_{eq} = 2k; \quad F_{eq} = ml\omega^2 \cos(\omega t)$$

dove si riconosce che la forzante ha un'ampiezza proporzionale al quadrato della pulsazione. Per determinare l'ampiezza delle oscillazioni forzate si riscrive l'equazione precedente in forma complessa e si cerca una soluzione del tipo  $x(t) = qe^{i\omega t}$  con  $q$  complesso:

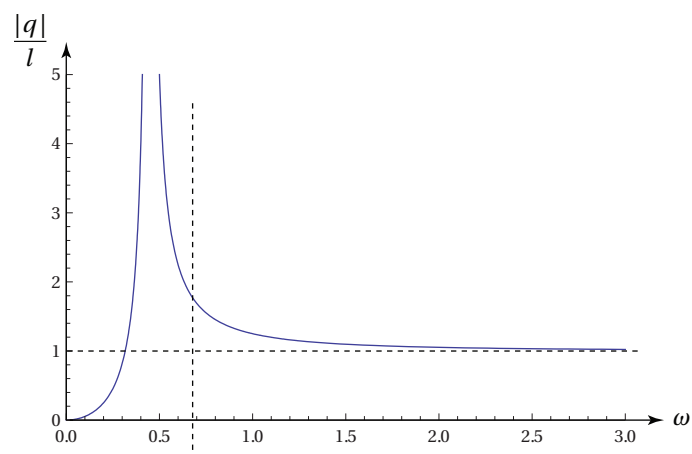
$$(-m_{eq}\omega^2 + k_{eq})qe^{i\omega t} = F_{eq} = ml\omega^2 e^{i\omega t}$$

da cui discende che

$$q = \frac{ml\omega^2}{k_{eq} - m_{eq}\omega^2} = \frac{l\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

dove  $\omega_n^2 = \frac{k_{eq}}{m_{eq}}$ . Il valore modulo dell'ampiezza delle oscillazioni forzate (normalizzato su  $l$ ) al variare di  $\omega$  è rappresentato nel grafico in Fig. 15.2 dove l'asintoto verticale è in corrispondenza di  $\omega = \omega_n$  e il valore di  $|q|$  per  $\omega \rightarrow \infty$  è pari a  $l$ .





**Figura 15.2** Ampiezza delle oscillazioni forzate al variare di  $\omega$ .

# 16

## Ruote Dentate a Evolvente

---

In questo capitolo vengono presentati alcuni casi numerici per il dimensionamento di ruote dentate ad evolvente.

### 16.1 Esercizio 1

---

Si progetti una trasmissione mediante ruote cilindriche a denti dritti e fianchi ad evolvente con le seguenti specifiche

- Rapporto di trasmissione  $\tau \simeq 2$
- Angolo di pressione della dentiera  $\alpha = 20^\circ$
- Modulo  $m = 3$  mm

#### 16.1.1 Preliminari

Nel seguito indicheremo sempre con indice 1 le grandezze relative al pignone, mentre con indice 2 le grandezze relative alla corona. Calcoliamo innanzitutto il numero minimo di denti  $z_{\min}$  per ruote normali senza correzione

$$z_{\min} = \left\lceil 1.25 \frac{2}{\sin^2 \alpha} \right\rceil = 22 \quad (16.1)$$

#### 16.1.2 Prima soluzione

Come primo tentativo scegliamo i seguenti valori del numero di denti dei due membri

$$z_1 = 22; \quad z_2 = 44$$

in modo tale che il rapporto di trasmissione sia quello desiderato. Di conseguenza i valori dei raggi delle primitive di taglio risultano

$$r_1 = \frac{m z_1}{2} = 33 \text{ mm}; \quad r_2 = \frac{m z_2}{2} = 66 \text{ mm}$$

da cui segue che l'interasse  $a$  è dato da

$$a = r_1 + r_2 = 99 \text{ mm}$$

Con i valori scelti di  $z_1$  e  $z_2$  risulta

$$z_1 + z_2 = 66 > 2z_{\min} = 44$$

e pertanto è possibile scegliere correzioni  $x_1$  e  $x_2$  complementari per le due ruote. Infatti per non avere interferenza di taglio deve valere

$$\frac{x_1}{m} \geq \frac{z_{\min} - z_1}{2} \sin^2 \alpha; \quad \frac{x_2}{m} \geq \frac{z_{\min} - z_2}{2} \sin^2 \alpha \quad (16.2)$$

e sommando membro a membro

$$\frac{x_1 + x_2}{m} \geq \frac{2z_{\min} - (z_1 + z_2)}{2} \sin^2 \alpha$$

si ottiene che il secondo membro dell'ultima espressione è negativo in quanto  $(z_1 + z_2) > 2z_{\min}$  e quindi è sufficiente scegliere  $x_1 = -x_2$  affinché sia verificata tale disuguaglianza.

Nel caso in cui  $x_1 = x_2 = 0$  calcoliamo il gioco  $c$  (*clearance*) fra le due ruote in condizioni di lavoro

$$c = a - r_{a1} - r_{f2}$$

dove  $r_{a1}$  è il raggio della circonferenza di testa del pignone e  $r_{f2}$  è il raggio della circonferenza di piede della corona. Sviluppando i conti (ricordandosi che  $x_1 = x_2 = 0$ ) si ha

$$c = a - (r_1 + m) - (r_2 - 1.25m) = 0.25m = 0.75 \text{ mm}$$

Scegliamo ora due valori di correzioni complementari ma diversi da zero:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.2m \\ x_2 &= -x_1 = -0.2m \end{aligned}$$

Verifichiamo che valgono le relazioni (16.2)

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{m} &= 0.2 \geq \frac{z_{\min} - z_1}{2} \sin^2 \alpha = 0 \\ \frac{x_2}{m} &= -0.2 \geq \frac{z_{\min} - z_2}{2} \sin^2 \alpha = -1.28676 \end{aligned}$$

Ovviamente l'interasse di lavoro non è cambiato in quanto le due correzioni sono complementari. Calcoliamo anche il gioco in questo caso

$$c = a - (r_1 + m + x_1) - (r_2 - (1.25m - x_2)) = 0.25m = 0.75 \text{ mm}$$

### Considerazioni

La soluzione considerata risulta semplice da determinare ma può non essere soddisfacente nel caso in cui si abbiano limitazioni sulle dimensioni dell'ingranaggio. Infatti con i valori scelti del numero di denti l'interasse fra le due ruote risulta di 99 mm, e pertanto l'ingombro totale risulta

$$r_{a1} + r_{a2} + a = (r_1 + m + x_1) + (r_2 + m + x_2) + a = 204 \text{ mm}$$

Per limitare le dimensioni dell'ingranaggio è necessario ricorrere a soluzioni diverse.

### 16.1.3 Seconda soluzione

Per ovviare ai problemi esposti in precedenza scegliamo

$$z_1 = 15; \quad z_2 = 30$$

in modo tale che il rapporto di trasmissione sia quello desiderato. Si nota fin da subito che  $z_1$  risulta inferiore al numero minimo di denti nel caso di correzione nulla. In questo caso i raggi delle circonferenze primitive di taglio risultano

$$r_1 = \frac{mz_1}{2} = 22.5 \text{ mm}; \quad r_2 = \frac{mz_2}{2} = 45 \text{ mm}$$

Notiamo che anche in questo caso vale

$$z_1 + z_2 = 45 > 2z_{\min}$$

e pertanto è possibile scegliere le correzioni  $x_1$  e  $x_2$  complementari fra loro ottenendo dunque che l'interasse di lavoro  $a$  risulti

$$a = r_1 + r_2 = 67.5 \text{ mm}$$

Scegliamo inizialmente, come nel caso precedente,  $x_1 = x_2 = 0$  e verifichiamo le (16.2)

$$0 \geq \frac{z_{\min} - z_1}{2} \sin^2 \alpha = 0.409422 \quad \text{Non verificata!}$$

$$0 \geq \frac{z_{\min} - z_2}{2} \sin^2 \alpha = -0.467911$$

Si nota che la prima espressione non è verificata ed è pertanto necessario scegliere un diverso valore di  $x_1$ . Si sceglie quindi  $x_1 = 0.41m$  e di conseguenza  $x_2 = -0.41m$ . Con tali valori delle correzioni procediamo a calcolare il gioco di testa  $c$  fra le due ruote

$$c = a - (r_1 + m + x_1) - (r_2 - (1.25m + x_2)) = 0.25m = 0.75 \text{ mm}$$

che risulta identico al caso precedente. L'ingombro totale della trasmissione in questo caso vale

$$r_{a1} + r_{a2} + a = (r_1 + m + x_1) + (r_2 + m + x_2) + a = 141 \text{ mm}$$

che è notevolmente ridotto rispetto al caso precedente.

#### 16.1.4 Terza soluzione

Qualora fosse necessario ridurre ulteriormente l'ingombro della trasmissione è necessario ricorrere ad una soluzione diversa. Scegliamo in questo caso

$$z_1 = 12; \quad z_2 = 24$$

che soddisfa ancora la condizione sul rapporto di trasmissione. I raggi delle circonferenze primitive di taglio risultano quindi

$$r_1 = \frac{mz_1}{2} = 18 \text{ mm}; \quad r_2 = \frac{mz_2}{2} = 36 \text{ mm}$$

da cui risulta

$$a = r_1 + r_2 = 54 \text{ mm}$$

Determiniamo innanzitutto i valori minimi ammissibili per gli scostamenti utilizzando le espressioni in (16.2)

$$\frac{x_{1\min}}{m} = \frac{z_{\min} - z_1}{2} \sin^2 \alpha = 0.568182; \quad \frac{x_{2\min}}{m} = \frac{z_{\min} - z_2}{2} \sin^2 \alpha = -0.113636$$

Notiamo che in questo caso si ha

$$z_1 + z_2 = 36 < 2z_{\min}$$

e pertanto non sarà possibile scegliere correzioni complementari per le due ruote. Questo implica che è necessario modificare l'interasse di lavoro fra le due ruote. Scegliamo allora i seguenti valori

$$x_1 = 0.6m; \quad x_2 = 0.36m$$

che verificano le condizioni (16.2). Calcoliamo ora l'angolo di lavoro  $\alpha'$  come segue

$$\begin{aligned} \operatorname{inv}\alpha' &= \tan\alpha' - \alpha' = \operatorname{inv}\alpha + \frac{2 \tan\alpha}{m} \left( \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \right) = 0.0343161 \\ \alpha' &= 0.455331 \equiv 26.0886 \text{ deg} \end{aligned}$$

Il nuovo interasse di lavoro  $a'$  risulta quindi

$$a' = a \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = 56.4999 \text{ mm}$$

e i raggi delle circonferenze primitive di lavoro

$$r'_1 = r_1 \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = 18.8333 \text{ mm}; \quad r'_2 = r_2 \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = 37.6666 \text{ mm}$$

Calcoliamo ora il gioco di testa fra le due ruote

$$\begin{aligned} c &= a' - (r_1 + m + x_1) - (r_2 - 1.25m + x_2) \\ &= m \left[ 0.25 - \frac{x_1 + x_2}{m} + \frac{z_1 + z_2}{2} \left( \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} - 1 \right) \right] = 0.12329m = 0.36987 \text{ mm} \end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso il gioco di testa è notevolmente ridotto rispetto alle due soluzioni precedenti. Per ottenere un valore di  $c$  imposto è necessario ricorrere alla procedura seguente.

Si fissa un valore di  $c$  (ad esempio  $c = 0.25m$ ) e si determina il valore  $c_1$  del gioco fra dentiera e pignone durante la generazione di quest'ultimo. Il gioco di testa fra le due ruote può essere quindi scritto come segue

$$c = 0.25m = a' - (r_1 + 1.25m + x_1 - c_1) - (r_2 - 1.25m + x_2)$$

Risolvendo rispetto a  $c_1$  si ottiene

$$c_1 = 0.25m + (x_1 + x_2) - (a' - a) = 0.37671m = 1.13013 \text{ mm}$$

Questo risultato implica che il dente del pignone così ottenuto è ribassato, cioè il dente ha un'altezza minore. Infatti, nel caso  $c_1 = 0.25m$  si ha un'altezza del dente pari a

$$2.25m = 6.75 \text{ mm}$$

mentre con  $c_1 = 0.37671m$  si ha un'altezza dente pari a

$$1.25 + (1.25 - 0.37671)m = 2.12329m = 6.36987 \text{ mm}$$

### Considerazioni

La soluzione appena trovata consente di ottenere una trasmissione meno ingombrante rispetto alle precedenti soluzioni in quanto l'ingombro vale

$$r_{a1} + r_{a2} + a' = (r_1 + m + x_1) + (r_2 + m + x_2) + a' = 119.38 \text{ mm}$$

oppure, nel caso di dente del pignone ribassato

$$r_{a1} + r_{a2} + a' = (r_1 + 1.25m + x_1 - c_1) + (r_2 + m + x_2) + a' = 119 \text{ mm}$$

Tuttavia è necessario tenere di conto del fatto che  $z_2$  è un multiplo intero di  $z_1$ . Questo comporta che un dente della corona venga in contatto con il medesimo dente del pignone ad ogni ciclo di ingranamento. Eventuali imperfezioni nella costruzione dei denti di entrambe le ruote potrebbero causare un rapido deterioramento delle superfici a contatto dovuto all'insistenza di tali imperfezioni sugli stessi denti. Risulta necessario quindi far sì che i numeri dei denti delle due ruote siano primi fra loro.

### 16.1.5 Quarta soluzione

Per tenere conto di tutte le specifiche e dei problemi presentati nella soluzione precedente scegliamo i seguenti valori del numero di denti delle due ruote

$$z_1 = 13; \quad z_2 = 25$$

Il rapporto di trasmissione in questo caso vale

$$\tau = \frac{25}{13} = 1.92308$$

che è comunque prossimo a due. I raggi delle primitive di taglio risultano dunque

$$r_1 = \frac{mz_1}{2} = 19.5 \text{ mm}; \quad r_2 = \frac{mz_2}{2} = 37.5 \text{ mm}$$

da cui

$$a = r_1 + r_2 = 57 \text{ mm}$$

Calcolando i valori minimi degli scostamenti in questo caso si ha

$$\frac{x_{1\min}}{m} = \frac{z_{\min} - z_1}{2} \sin^2 \alpha = 0.511364; \quad \frac{x_{2\min}}{m} = \frac{z_{\min} - z_2}{2} \sin^2 \alpha = -0.170455$$

e dunque anche in questo caso non è possibile utilizzare scostamenti complementari. Scegliendo ad esempio

$$x_1 = 0.6m; \quad x_2 = -0.1m$$

il nuovo angolo e il nuovo interasse di lavoro  $a'$  risultano (vedere la soluzione precedente per i dettagli sul calcolo di  $\alpha'$  e  $a'$ )

$$\alpha' = 0.409211 = 23.4461 \text{ deg}; \quad a' = 58.3829 \text{ mm}$$

I raggi delle primitive di lavoro valgono rispettivamente

$$r'_1 = r_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = 19.9731 \text{ mm}; \quad r'_2 = r_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = 38.4098 \text{ mm}$$

Il gioco di testa nel caso in cui il dente non sia ribassato vale

$$c = 0.210956m = 0.632867 \text{ mm}$$

con un ingombro totale dell'ingranaggio pari a

$$r_{a1} + r_{a2} + a' = (r_1 + m + x_1) + (r_2 + m + x_2) + a' = 122.883 \text{ mm}$$

Imponendo invece un gioco di testa in condizioni di lavoro pari a  $0.25m$  si ottiene un dente del pignone ribassato in cui

$$c_1 = 0.289044m = 0.867133 \text{ mm}$$

ottenendo un'ingombro totale pari a

$$r_{a1} + r_{a2} + a' = (r_1 + 1.25m + x_1 - c_1) + (r_2 + m + x_2) + a' = 122.766 \text{ mm}$$

### 16.1.6 Extra

Per concludere l'esercizio si valuta la condizione di appuntimento del dente risolvendo il seguente sistema

$$\frac{x_{\max}}{m} = \frac{z}{2} \left( \frac{\cos \alpha}{\cos \hat{\alpha}} - 1 \right) - 1$$

$$\frac{x_{\max}}{m} = \frac{z (\operatorname{inv} \hat{\alpha} - \operatorname{inv} \alpha - \pi/2)}{2 \tan \alpha}$$

dove  $z$  è il numero di denti della ruota che stiamo considerando. Considerando i diversi valori di  $z$  utilizzati nelle soluzioni presentate si ottiene che giustifica tutti i valori scelti degli scostamenti

$z$	$x_{\max}/m$	$\hat{\alpha}$ (deg)
12	0.820204	43.8651
13	0.876691	43.1834
15	0.983442	41.9989
22	1.30929	39.0454
24	1.39232	38.4183
25	1.43252	38.1296
30	1.62228	36.8831
44	2.08108	34.4868

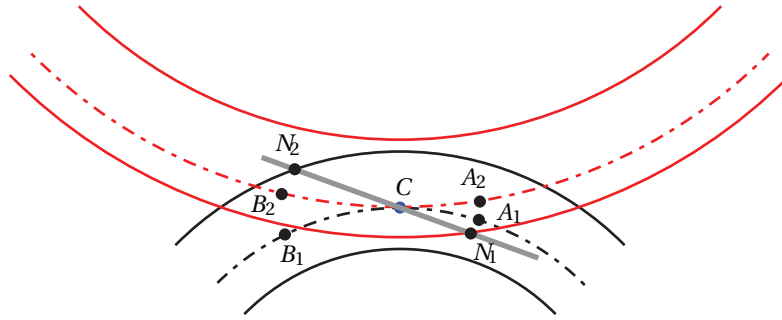
per entrambe le ruote.

## 16.2 Linea di contatto e arco d'azione

In questa sezione viene studiato l'ingranamento di due ruote dentate cilindriche con fianchi ad evolvente. In particolare vengono studiate le condizioni affinché il moto si trasmetta in maniera continua dalla ruota motrice alla ruota condotta. Si faccia riferimento alla Fig. 16.1 dove si assume che la ruota ① sia motrice e la ruota ② sia condotta. Alla ruota ① è applicato un momento  $T_1$  (motore) mentre alla ruota ② è applicato un momento  $T_2$  (resistente).

In tale figura il segmento  $N_1N_2$  è il *segmento di contatto* o *segmento di azione*. È opportuno distinguere due parti di questo segmento:

- Segmento di azione in accesso:  $N_1C$
- Segmento di azione in recesso:  $CN_2$

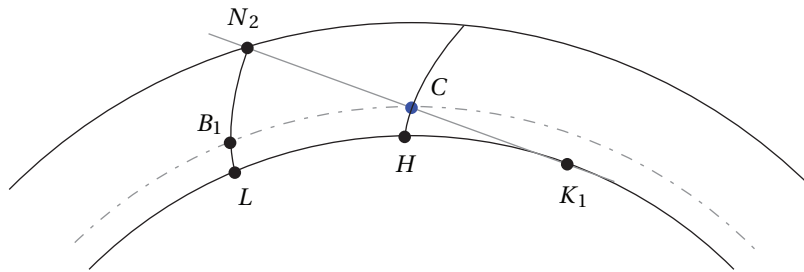


**Figura 16.1** Schema di riferimento per determinare l'arco d'azione e la linea di contatto.

Inoltre si definisce l'*arco d'azione* la lunghezza dell'arco, misurato sulle primitive, entro cui le due ruote sono in presa. In particolare l'arco  $\widehat{A_1B_1}$  è l'arco d'azione sulla primitiva  $\mathcal{C}_1$  mentre l'arco  $\widehat{A_2B_2}$  è l'arco d'azione sulla primitiva  $\mathcal{C}_2$ . Dato che le primitive delle due ruote rotolano l'una sull'altra ne discende che

$$\widehat{A_1B_1} = \widehat{A_2B_2}$$

Affinchè la ruota ① trasmetta alla ruota ② un moto continuo, l'arco di azione deve essere maggiore del passo. Consideriamo ora il moto delle due ruote nella fase di recesso, ossia nel seg-



**Figura 16.2** Dettaglio sull'arco d'azione in recesso.

mento  $CN_2$  e si faccia riferimento alla Fig. 16.2 dove sono state rappresentate le circonferenze di base, primitiva e di testa della ruota ①. Per la geometria dell'evolvente si ha

$$CN_2 = \widehat{LH}$$

Inoltre si nota che i due archi  $\widehat{CB_1}$  e  $\widehat{LH}$  sono sottesi dallo stesso angolo e pertanto

$$\frac{\widehat{LH}}{r_{b1}} = \frac{\widehat{CB_1}}{r_1}; \quad \frac{\widehat{LH}}{\widehat{CB_1}} = \frac{r_{b1}}{r_1} = \cos(\alpha)$$

da cui discende

$$\frac{CN_2}{\widehat{CB_1}} = \frac{\widehat{LH}}{\widehat{CB_1}} = \cos(\alpha)$$

$$\widehat{CB_1} = \frac{CN_2}{\cos(\alpha)}$$

In maniera del tutto analoga è possibile determinare l'espressione dell'arco  $\widehat{A_1C}$ . Per cui, in definitiva, il calcolo dell'arco di azione si riduce al calcolo del segmento di contatto.



### 16.2.1 Segmento di contatto

Nel seguito indicheremo con  $e_1$  e  $e_2$  l'addendum delle due ruote. Determiniamo ora la lunghezza del segmento di contatto in accesso. Tale segmento individua il triangolo  $O_2\hat{C}N_1$ . Ne discendono pertanto le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} O_2N_1 &= r_2 + e_2 \\ O_2C &= r_2 \\ O_2N_1 &= O_2C^2 + CN_1^2 - 2(O_2C)(CN_1)\cos(\pi/2 + \alpha) \end{aligned}$$

dove l'ultima relazione discende dal teorema di Carnot. Dato che  $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin(\alpha)$  si ottiene

$$(r_2 + e_2)^2 = r_2^2 + CN_1^2 + 2(CN_1)r_2\sin(\alpha)$$

Risolvendo tale espressione rispetto a  $CN_1$  si ottiene

$$CN_1 = -r_2\sin(\alpha) + \sqrt{r_2^2\sin^2(\alpha) + e_2(e_2 + 2r_2)} \quad (16.3)$$

In maniera del tutto analoga è possibile determinare la lunghezza del segmento in recesso e si ottiene

$$CN_2 = -r_1\sin(\alpha) + \sqrt{r_1^2\sin^2(\alpha) + e_1(e_1 + 2r_1)} \quad (16.4)$$

da cui indicando con

$$s = \frac{N_1N_2}{\cos(\alpha)}$$

la lunghezza dell'arco d'azione, si ottiene

$$s = \frac{1}{\cos(\alpha)} \left[ r_1\sqrt{\sin^2(\alpha) + \left(2 + \frac{e_1}{r_1}\right)\frac{e_1}{r_1}} + r_2\sqrt{\sin^2(\alpha) + \left(2 + \frac{e_2}{r_2}\right)\frac{e_2}{r_2}} - (r_1 + r_2)\sin(\alpha) \right] \quad (16.5)$$

#### Caso di ruote uguali e normali

In tal caso si ha

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 = r \\ e_1 &= e_2 = m \end{aligned}$$

e pertanto la (16.5) diventa

$$s = \frac{2r}{\cos(\alpha)} \left[ \sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{1}{z}\left(1 + \frac{4}{z}\right)} - \sin(\alpha) \right]$$

dove  $z$  è il numero di denti delle due ruote. Infatti da

$$\begin{aligned} 2\pi r &= m\pi z \\ r &= \frac{mz}{2} \end{aligned}$$

in questo caso si ottiene

$$\frac{e}{r} = \frac{m}{\frac{mz}{2}} = \frac{2}{z}$$

Per la condizione di continuità della trasmissione del moto fra pignone e corona si deve avere

$$\frac{s}{p} > 1 \quad (16.6)$$

da cui, rielaborando l'espressione di  $s$

$$\sqrt{z^2 \sin^2(\alpha) + 4(1+z) - z \sin(\alpha)} > \pi \cos(\alpha)$$

e risolvendo rispetto al numero di denti  $z$  si ottiene

$$z > \frac{\pi^2 \cos^2(\alpha) - 4}{2 - (2\pi \sin(\alpha) \cos(\alpha))}$$

### Caso di ruote diverse e corrette

Assumendo di avere un ingranaggio senza variazione di interasse si ha  $x_2 = -x_1 = x$ , da cui discende

$$e_1 = m + x; \quad e_2 = m - x$$

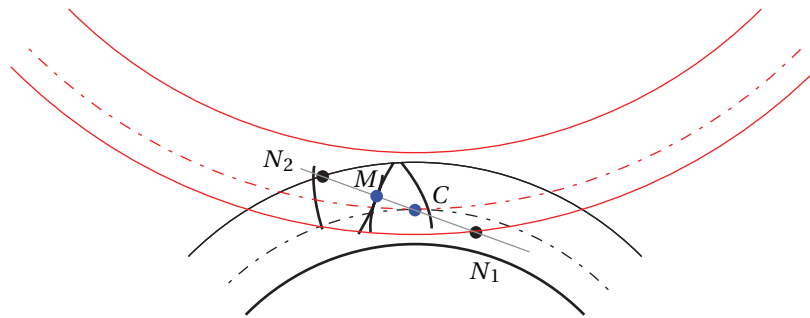
Con un valore di  $x$  positivo parliamo in questo caso di pignone *long-addendum* e ruota *short-addendum*. Attraverso le classiche relazioni

$$r_1 = \frac{mz_1}{2}; \quad r_2 = \frac{mz_2}{2}$$

si può risolvere la disequazione (16.6) nell'incognita  $z_1$  oppure  $z_2$ .

## 16.3 Rendimento delle ruote dentate cilindriche

Con i risultati trovati nella sezione precedente determiniamo ora il rendimento delle ruote dentate cilindriche. Si faccia riferimento alla Fig. 16.3 dove si assume che il pignone (ruota ①) sia motore mentre la corona (ruota ②) sia condotta. Inoltre sia nota la coppia resistente  $T_2$  e si assuma un coefficiente di attrito  $f$  nel contatto fra le due ruote. Si determina ora la coppia  $T_1$  da



**Figura 16.3** Schema di riferimento per il calcolo del rendimento.

applicare alla ruota motrice per mantenere costante la velocità di rotazione di ②. Cominciamo notando che il contatto fra ① e ② è caratterizzato da rotolamento e strisciamento. Si indica con  $M$  il punto di contatto fra le due ruote, con  $M_1$  il punto di ① coincidente con  $M$  e con  $M_2$  il punto di ② coincidente con  $M$ . Le velocità dei due punti  $M_1$  e  $M_2$  sono date rispettivamente dalle

seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{M_1} &= \omega_1 \mathbf{k} \wedge O_1 M_1 \\ \mathbf{v}_{M_2} &= -\omega_2 \mathbf{k} \wedge O_2 M_2\end{aligned}$$

**Attenzione al segno delle velocità angolari: in questo caso per la ruota ② è stato scelto il verso positivo orario.** Possiamo riscrivere le precedenti relazioni come segue

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{M_1} &= \omega_1 \mathbf{k} \wedge O_1 C + \omega_1 \mathbf{k} \wedge C M_1 \\ \mathbf{v}_{M_2} &= -\omega_2 \mathbf{k} \wedge O_2 C - \omega_2 \mathbf{k} \wedge C M_2\end{aligned}$$

La velocità di strisciamento  $\mathbf{v}_{12}$  nel punto di contatto è data dalla seguente relazione

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_{M_1} - \mathbf{v}_{M_2} = \omega_1 \mathbf{k} \wedge O_1 C + \omega_2 \mathbf{k} \wedge O_2 C + (\omega_1 + \omega_2) \mathbf{k} \wedge C M = (\omega_1 + \omega_2) \mathbf{k} \wedge C M$$

dove l'ultima relazione vale in quanto

$$\begin{aligned}\omega_1 \mathbf{k} \wedge O_1 C + \omega_2 \mathbf{k} \wedge O_2 C &= \omega_1 \mathbf{k} \wedge (\mathbf{j} r_1) + \frac{\omega_1 r_1}{r_2} \mathbf{k} \wedge (-\mathbf{j} r_2) \\ &= \omega_1 \mathbf{k} \wedge (\mathbf{j} r_1) - \omega_1 \mathbf{k} \wedge (\mathbf{j} r_1) = 0\end{aligned}$$

L'entità della velocità di strisciamento lungo la direzione tangente alle due superfici nel punto di contatto risulta pertanto

$$v_{12} = (\mathbf{v}_{M_1} - \mathbf{v}_{M_2}) \cdot \boldsymbol{\tau} = \pm (\omega_1 + \omega_2) |C M|$$

Da quest'ultima relazione si nota che  $\mathbf{v}_{12} = 0$  solamente se  $M \equiv C$ , mentre altrimenti vale

- $\mathbf{v}_{12} \cdot \boldsymbol{\tau} = -(\omega_1 + \omega_2) |C M|$  in fase di accesso ( $M \in N_1 C$ ).
- $\mathbf{v}_{12} \cdot \boldsymbol{\tau} = (\omega_1 + \omega_2) |C M|$  in fase di recesso ( $M \in C N_2$ ).

Scriviamo ora la forza che il dente di ① esercita sul dente di ②. Tale forza ha una componente normale  $N_{12} = N$  alle superfici dei denti e una componente tangenziale  $T_{12} = T$  tale per cui

$$T = f N \text{sign}(\mathbf{v}_{12} \cdot \boldsymbol{\tau})$$

Per determinare il momento necessario da applicare al pignone per mantenere costante la velocità angolare delle due ruote si deve fare distinzione fra la fase di accesso e la fase di recesso. *Per semplicità si assume che ci sia una sola coppia di denti in presa.*

### Fase di accesso

Per quanto riguarda la ruota condotta abbiamo

$$T_2 = N [r_2 \cos(\alpha) - f (r_2 \sin(\alpha) + C M)]$$

mentre per la ruota motrice

$$T_{1a} = N [r_1 \cos(\alpha) - f (r_1 \sin(\alpha) - C M)]$$

da cui discende

$$T_{1a} = T_2 \frac{r_1 \cos(\alpha) - f (r_1 \cos(\alpha) - C M)}{r_2 \cos(\alpha) - f (r_2 \cos(\alpha) + C M)} = T_2 \frac{r_1}{r_2} \frac{1 - f \left( \tan(\alpha) - \frac{s}{r_1} \right)}{1 - f \left( \tan(\alpha) - \frac{s}{r_2} \right)} \quad (16.7)$$

dove

$$s = \frac{C M}{\cos(\alpha)}$$

### Fase di recesso

In questo caso per la ruota condotta abbiamo

$$T_2 = N [r_2 \cos(\alpha) + f (r_2 \sin(\alpha) - CM)]$$

mentre per la ruota motrice vale

$$T_{1r} = N [r_1 \cos(\alpha) + f (r_1 \sin(\alpha) + CM)]$$

da cui

$$T_{1r} = T_2 \frac{r_1 \cos(\alpha) + f (r_1 \cos(\alpha) + CM)}{r_2 \cos(\alpha) + f (r_2 \cos(\alpha) - CM)} = T_2 \frac{r_1}{r_2} \frac{1 + f \left( \tan(\alpha) + \frac{s}{r_1} \right)}{1 + f \left( \tan(\alpha) - \frac{s}{r_2} \right)} \quad (16.8)$$

### 16.3.1 Rendimento

Indicando con  $T_{10}$  la coppia necessaria da applicare al pignone nel caso di assenza d'attrito fra le due ruote si ha

$$T_{10} = T_2 \frac{r_1}{r_2}$$

Il rendimento istantaneo della trasmissione è diverso nel caso di fase di accesso ( $\eta_{ia}$ ) o fase di recesso ( $\eta_{ir}$ ) e risulta definito da

$$\eta_{ia} = \frac{T_{10}}{T_{1a}} = \frac{1 - f \left( \tan(\alpha) + \frac{s}{r_1} \right)}{1 - f \left( \tan(\alpha) - \frac{s}{r_2} \right)}; \quad \eta_{ir} = \frac{T_{10}}{T_{1r}} = \frac{1 + f \left( \tan(\alpha) - \frac{s}{r_1} \right)}{1 + f \left( \tan(\alpha) + \frac{s}{r_2} \right)}$$

Da queste due ultime relazioni si nota che

$$\eta_{ia} < \eta_{ir}$$

per cui è importante limitare al minimo la parte di accesso in quanto in tale condizione il rendimento è peggiore. Per questo motivo, nel caso di pignone motore (riduttore), è preferibile avere un pignone *long-addendum* e una corona *short-addendum*, mentre nel caso di corona motrice (moltiplicatore) è preferibile avere pignone *short-addendum* e corona *long-addendum* (si faccia riferimento alle espressioni (16.3) e (16.4)).

### 16.3.2 Rendimento medio

Per determinare il rendimento medio della trasmissione si assume per semplicità che l'arco di azione sia uguale al passo. In tal caso il lavoro resistente  $L_r$  è espresso da

$$L_r = T_2 \frac{p}{r_2}$$

mentre il lavoro motore è fornito dalla seguente espressione

$$L_m = \frac{1}{r_1} \int_{s \rightarrow p} T_1 ds = \frac{1}{r_1} \int_0^{s_1} T_{1a} ds + \int_0^{s_2} T_{1r} ds$$

dove  $s_1$  e  $s_2$  sono le lunghezze degli archi di accesso e di recesso rispettivamente. Linearizzando le espressioni (16.7) e (16.8) si ottiene

$$T_{1a} \simeq T_2 \frac{r_1}{r_2} \left[ 1 + \frac{f}{1 - f \tan(\alpha)} s \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right]$$

$$T_{1r} \simeq T_2 \frac{r_1}{r_2} \left[ 1 + \frac{f}{1 + f \tan(\alpha)} s \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right]$$

da cui l'espressione del lavoro motore risulta

$$L_m = T_2 \frac{1}{r_2} \left[ p + \frac{f}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \left( \frac{s_1^2}{1 - f \tan(\alpha)} + \frac{s_2^2}{1 + f \tan(\alpha)} \right) \right]$$

Un'ulteriore approssimazione può essere fatta notando che il termine  $f \tan(\alpha)$  è solitamente trascurabile rispetto a 1 e pertanto è possibile scrivere

$$L_m \simeq T_2 \frac{1}{r_2} \left[ p + \frac{f}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) (s_1^2 + s_2^2) \right]$$

A questo punto il rendimento medio  $\eta$  si può scrivere come segue

$$\eta = \frac{L_r}{L_m} = \frac{1}{1 + \frac{f}{2p} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) (s_1^2 + s_2^2)}$$

Infine indicando con  $\epsilon$  la frazione dell'arco d'azione in accesso e indicando

$$s_1 = \epsilon p; \quad s_2 = (1 - \epsilon)p$$

si ottiene

$$\eta \simeq \frac{1}{1 + \frac{fp}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) (2\epsilon^2 - 2\epsilon + 1)}$$

Si nota che il rendimento massimo si ha per  $(2\epsilon^2 - 2\epsilon + 1)$  minimo in quanto le altre quantità sono costanti al variare di  $\epsilon$ . Tale valore minimo si ottiene per  $\epsilon = \epsilon^* = 0.5$ .

Qualora non si trascurasse il termine  $f \tan(\alpha)$  nell'espressione del lavoro motore si ottiene un valore massimo del rendimento per

$$\epsilon^* = \frac{1}{2} (1 - f \tan(\alpha))$$

dal quale si deduce che il rendimento massimo si ha quando l'arco di accesso risulta inferiore dell'arco di recesso.

## Oscillazioni di un Rotismo

---

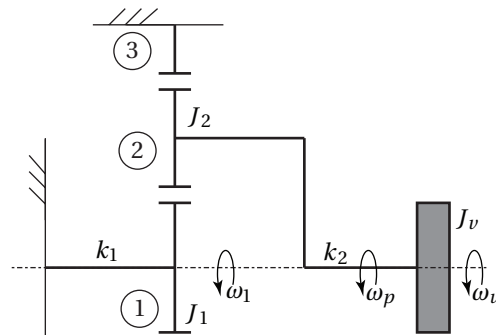


Figura 17.1 Schema meccanico.

Si consideri rotismo riportato in Fig. 17.1. Assumendo noti il numero di denti ( $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ ) e il modulo ( $m$ ) delle ruote dentate presenti, si studino le oscillazioni libere del sistema in esame.

### 17.1 Risoluzione del rotismo

---

Cominciamo la risoluzione dell'esercizio determinando le relazioni cinematiche fra i diversi corpi presenti nel sistema. Il rapporto di trasmissione  $\tau_0$  è definito come segue

$$\tau_0 = \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$$

che, per la formula di Willis, risulta

$$\tau_0 = \frac{\omega_3 - \omega_p}{\omega_1 - \omega_p} = -\frac{z_1}{z_3} \quad (17.1)$$

Il rapporto di trasmissione  $\bar{\tau}$  fra il corpo ① e il corpo ② risulta invece

$$\bar{\tau} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{\omega_2 - \omega_p}{\omega_1 - \omega_p} = -\frac{z_1}{z_2} \quad (17.2)$$

Dalle precedenti relazioni, poichè  $\theta_3 = 0$  si ha

$$\tau_0 = -\frac{\theta_p}{\theta_1 - \theta_p}; \quad \frac{1}{\tau_0} = 1 - \frac{\theta_1}{\theta_p}; \quad \frac{\theta_1}{\theta_p} = 1 - \frac{1}{\tau_0} = \frac{\tau_0 - 1}{\tau_0}$$

da cui

$$\theta_p = \theta_1 \frac{\tau_0}{\tau_0 - 1}$$

Una volta determinato  $\theta_p$  si ricava  $\theta_2$  attraverso la (17.2):

$$\frac{\frac{\theta_2}{\theta_p} - 1}{\frac{\theta_1}{\theta_p} - 1} = \bar{\tau}$$

da cui

$$\frac{\theta_2}{\theta_p} - 1 = \bar{\tau} \left( \frac{\tau_0 - 1}{\tau_0} - 1 \right) = -\frac{\bar{\tau}}{\tau_0}$$

Ne discende che

$$\frac{\theta_2}{\theta_p} = 1 - \frac{\bar{\tau}}{\tau_0}; \quad \theta_p = \theta_2 \frac{\tau_0}{\tau_0 - \bar{\tau}}$$

e infine

$$\theta_2 = \frac{\tau_0 - \bar{\tau}}{\tau_0} \theta_p = \frac{\tau_0 - \bar{\tau}}{\tau_0} \frac{\tau_0}{\tau_0 - 1} \theta_1 = \frac{\tau_0 - \bar{\tau}}{\tau_0 - 1} \theta_1$$

Mediante i conti appena svolti abbiamo determinato le espressioni

$$\theta_p = \theta_p(\theta_1) = c_1 \theta_1; \quad \theta_2 = \theta_2(\theta_1) = c_2 \theta_1$$

dove

$$c_1 = \frac{\tau_0}{\tau_0 - 1}; \quad c_2 = \frac{\tau_0 - \bar{\tau}}{\tau_0 - 1}$$

Il modulo della velocità  $v_{O_2}$  del centro di massa di ② risulta pertanto

$$v_{O_2} = \dot{\theta}_p r_p = \dot{\theta}_p (r_1 + r_2) = \dot{\theta}_p (z_1 + z_2) \frac{m}{2}$$

## 17.2 Dinamica

---

Passiamo ora a scrivere l'espressione della dinamica del sistema utilizzando le equazioni di Lagrange. Determiniamo innanzitutto l'energia cinetica  $T$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{O_2}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J_v \dot{\theta}_v^2$$

L'energia cinetica traslazionale dei corpi ①, ③ e del volano  $J_v$  è zero in quanto i rispettivi baricentri hanno velocità nulla. Trascurando gli effetti gravitazionali, l'energia potenziale  $U$  in questo caso è dovuta solamente agli effetti delle molle torsionali e pertanto risulta

$$U = \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (\theta_v - \theta_p)^2$$

Il sistema ha globalmente due gradi di libertà  $\theta_1$  e  $\theta_v$ . I termini delle due equazioni di Lagrange sono i seguenti:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = \ddot{\theta}_1 (J_1 + m_2 r_p^2 c_1^2 + J_2 c_2^2); \quad \frac{\partial T}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = k_1 \theta_1 + k_2 (\theta_v - c_1 \theta_1) (-c_1) = (k_1 + k_2 c_1^2) \theta_1 - c_1 k_2 \theta_v$$

per la prima coordinata. Per quanto riguarda la seconda coordinata lagrangiana invece si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_v} = J_v \ddot{\theta}_v; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta_v} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_v} = k_2 (\theta_v - c_1 \theta_1) = k_2 \theta_v - c_1 k_2 \theta_1$$

Indicando con

$$J_{1r} = J_1 + m_2 r_p^2 c_1^2 + J_2 c_2^2; \quad k_{1r} = k_1 + k_2 c_1^2$$

le equazioni di Lagrange risultano le seguenti

$$J_{1r} \ddot{\theta}_1 + k_{1r} \theta_1 - c_1 k_2 \theta_v = 0$$

$$J_v \ddot{\theta}_v + k_2 \theta_v - c_1 k_2 \theta_1 = 0$$

Il sistema di equazioni differenziali così ottenuto può essere riscritto nella classica forma matriciale

$$M \ddot{\boldsymbol{\theta}} + K \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$$

dove

$$M = \begin{pmatrix} J_{1r} & 0 \\ 0 & J_v \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} k_{1r} & -c_1 k_2 \\ -c_1 k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

Le pulsazioni proprie del sistema si determinano imponendo nullo il determinante della matrice  $(\lambda M + K)$ :

$$\det(\lambda M + K) = (J_{1r} J_v) \lambda^2 + (k_2 J_{1r} + k_{1r} J_v) \lambda + (k_{1r} k_2 - c_1^2 k_2^2) = 0$$

da cui

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(k_2 J_{1r} + k_{1r} J_v) \pm \sqrt{(k_2 J_{1r} + k_{1r} J_v)^2 - 4(J_{1r} J_v)(k_{1r} k_2 - c_1^2 k_2^2)}}{2 J_{1r} J_v}$$

Le pulsazioni proprie  $\omega_1$  e  $\omega_2$  risultano pertanto

$$\omega_1 = \sqrt{-\lambda_1}; \quad \omega_2 = \sqrt{-\lambda_2}$$

Per determinare la forma dei modi propri si indichi con

$$Q(\lambda) = \lambda M + K$$

e si risolva

$$Q(\lambda) \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$$



che in componenti risulta

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 J_{1r} + k_{1r} & -c_1 k_2 \\ -c_1 k_2 & \lambda_1 J_v + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Imponendo  $x_{11} = 1$  si risolve la seconda riga dell'equazione matriciale appena scritta e si determina

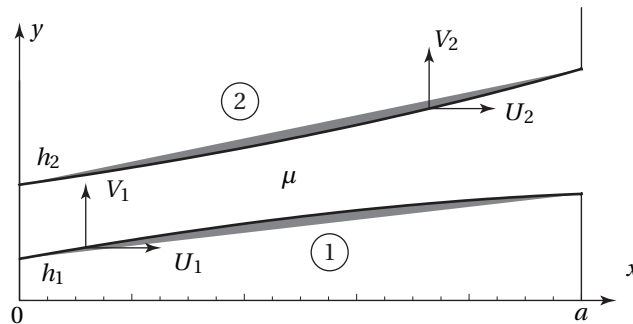
$$x_{12} = \frac{\lambda_1 J_{1r} + k_{1r}}{c_1 k_2}$$

Per determinare la forma del secondo modo proprio (quello associato alla pulsazione propria  $\omega_2$ ) si procede in maniera analoga imponendo questa volta  $x_{21} = 1$  e risolvendo su  $x_{22}$ , ottenendo

$$x_{22} = \frac{\lambda_2 J_{1r} - k_{1r}}{c_1 k_2}$$

In questo capitolo vengono studiate le caratteristiche di tipologie diverse di coppie lubrificate. Particolare attenzione è rivolta ai pattini lubrificati con differenti forme di meato. L'obiettivo è quello di confrontare i diversi tipi di meato in termini di capacità portante, pressione massima del fluido e coefficiente d'attrito.

### 18.1 Richiami di teoria



**Figura 18.1** Schema di riferimento per un meato di forma generica.

Si consideri la Fig. 18.1 e partiamo dalla forma generale dell'equazione di Reynolds

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{(h_2 - h_1)^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(h_2 - h_1)^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\
 & = 6 \left\{ (U_1 - U_2) \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) + (W_1 - W_2) \left( \frac{\partial h_2}{\partial z} + \frac{\partial h_1}{\partial z} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial W_1}{\partial z} + \frac{\partial W_2}{\partial z} \right) (h_2 - h_1) + 12 (V_2 - V_1) \right\}
 \end{aligned} \tag{18.1}$$

dove  $\mu$  e  $p$  sono rispettivamente la viscosità (assunta costante) e la pressione del fluido, i due membri ① e ② della coppia hanno velocità rispettivamente  $(U_1, V_1, W_1)$  e  $(U_2, V_2, W_2)$ . Inoltre si ha

$$(x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2$$

La forma del meato  $\mathcal{M}$  è definita da

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\} \quad (18.2)$$

Cerchiamo ora di riscrivere la (18.1) in funzione dell'altezza del meato  $h(x, z)$  definita come segue

$$h(x, z) = h_2(x, z) - h_1(x, z)$$

Il primo membro della (18.1) si trasforma banalmente in

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

Per trasformare il secondo membro invece facciamo le seguenti assunzioni

- Le velocità in direzione  $x$  dei bordi dei due corpi sono costanti, e quindi indipendenti da  $x$ :

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial U_2}{\partial x} = 0$$

- Le velocità in direzione  $z$  dei bordi dei due corpi sono costanti, e quindi indipendenti da  $z$ :

$$\frac{\partial W_1}{\partial z} = \frac{\partial W_2}{\partial z} = 0$$

Con queste ipotesi si riscrive il secondo membro della (18.1) come segue

$$6(U_1 - U_2) \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) + 6(W_1 - W_2) \left( \frac{\partial h_2}{\partial z} + \frac{\partial h_1}{\partial z} \right) + 12(V_2 - V_1)$$

Al fine di riscrivere tale membro in funzione di  $h = h_2 - h_1$  si utilizza la seguente scrittura (si aggiunge e si toglie la stessa quantità):

$$\begin{aligned} & 6(U_1 - U_2) \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) \\ & + 6(W_1 - W_2) \left( \frac{\partial h_2}{\partial z} - \frac{\partial h_1}{\partial z} + \frac{\partial h_1}{\partial z} + \frac{\partial h_1}{\partial z} \right) + 12(V_2 - V_1) \end{aligned}$$

che può quindi essere riscritta come

$$\begin{aligned} & 6(U_1 - U_2) \frac{\partial(h_2 - h_1)}{\partial x} + 6(W_1 - W_2) \frac{\partial(h_2 - h_1)}{\partial z} \\ & + 12(V_2 - V_1) - 12(U_2 - U_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} - 12(W_1 - W_2) \frac{\partial h_1}{\partial z} \end{aligned}$$

Da cui, definendo

$$\begin{aligned} V_1^* &= V_1 - U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} - W_1 \frac{\partial h_1}{\partial z} \\ V_2^* &= V_2 - U_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} - W_2 \frac{\partial h_1}{\partial z} \end{aligned}$$

si ottiene

$$6 \left\{ (U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + (W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} \right\} + 12(V_2^* - V_1^*)$$

Nel caso in cui valgano le seguenti relazioni

$$W_1 = W_2 = 0$$

$$V_1 = U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x}$$

$$V_2 = U_2 \frac{\partial h_2}{\partial x}$$

cioè nel caso in cui la velocità del meato sia tangente al meato stesso, la precedente espressione si riscrive come

$$\begin{aligned} 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 12(V_2 - V_1) - 12(U_2 - U_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} &= \\ 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \left( U_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} - U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) - 12(U_2 - U_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} &= \\ 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 12U_2 \left( \frac{\partial(h_2 - h_1)}{\partial x} \right) &= \\ 6(U_1 + U_2) \frac{\partial h}{\partial x} & \end{aligned}$$

In definitiva l'equazione di Reynolds (18.1) può essere riscritta come segue

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6(U_1 + U_2) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (18.3)$$

Assumendo un fluido di tipo newtoniano si ha che la tensione tangenziale  $\tau$  fra due strati adiacenti di fluido, in moto laminare vale

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Ai fini dell'equilibrio lungo  $x$  di un elemento infinitesimo di fluido deve valere

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

da cui discende

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Integrando ambo i membri dell'ultima espressione e ponendo le seguenti condizioni

$$y = 0 \rightarrow u = -U$$

$$y = h \rightarrow u = 0$$

si ottiene

$$u(x, y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y - h(x)) + U \left( \frac{y}{h} - 1 \right) \quad (18.4)$$

L'equazione di Reynolds (18.3) si può ulteriormente semplificare considerando un pattino di lunghezza  $z$  infinita per il quale quindi la pressione  $p$  dipende solamente da  $x$ :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Si ottiene quindi la seguente equazione di Reynolds semplificata

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -6U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (18.5)$$

Per valutare la distribuzione delle pressioni e delle forze risultanti si integra la (18.5):

$$h^3 \frac{\partial p}{\partial x} = -6\mu U h + C_1$$

dove  $C_1$  è una costante d'integrazione. Ne discende quindi che

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{6\mu U}{h^2} + \frac{C_1}{h^3}$$

Integrando questa espressione fra 0 e  $x$  e ponendo  $p(0) = p(a) p_a$ , dove  $p_a$  è la pressione esterna, si ottiene

$$p(x) - p_a = \int_0^x -\frac{6\mu U}{h(\xi)^2} d\xi + C_1 \int_0^x \frac{1}{h(\xi)^3} d\xi$$

da cui

$$p(a) - p_a = \int_0^a -\frac{6\mu U}{h(\xi)^2} d\xi + C_1 \int_0^a \frac{1}{h(\xi)^3} d\xi = 0$$

$$C_1 = 6\mu U \frac{\int_0^a \frac{1}{h(\xi)^2} d\xi}{\int_0^a \frac{1}{h(\xi)^3} d\xi} = 6\mu U h^*$$

dove si è posto

$$h^* = \frac{\int_0^a \frac{1}{h(\xi)^2} d\xi}{\int_0^a \frac{1}{h(\xi)^3} d\xi}$$

In questo modo è possibile scrivere quanto segue

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{6\mu U}{h^2} \left( 1 - \frac{h^*}{h} \right)$$

Ne discende quindi che  $h^*$  è il valore di altezza del meato per cui si annulla la quantità  $\frac{\partial p}{\partial x}$  e quindi dove la sovrappressione  $p(x) - p_a$  è massima. Si noti che in corrispondenza del valore  $h^*$  il profilo di velocità nel meato è lineare in quanto nell'espressione (18.4) rimane diverso da zero solamente il termine  $U\left(\frac{y}{h} - 1\right)$ .

Il fatto che in corrispondenza di  $h^*$  si abbia un massimo della sovrappressione viene ora giustificato. Indicando con  $x^*$  l'ascissa alla quale il meato assume altezza pari a  $h^*$  si ha:

- Per  $x < x^*$  si ha  $h < h^*$  e pertanto il termine

$$\left( 1 - \frac{h^*}{h} \right) < 0$$

da cui discende de

$$\frac{\partial p}{\partial x} > 0$$

- In maniera analoga, se  $x > x^*$  si ha  $h > h^*$  e pertanto

$$\left(1 - \frac{h^*}{h}\right) > 0$$

da cui discende de

$$\frac{\partial p}{\partial x} < 0$$

Per cui il punto in cui  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  è un punto di massimo.

La capacità portante  $P_1$  per unità di spessore del meato può essere facilmente determinata una volta noto l'andamento della pressione all'interno del meato stesso. A tal fine è sufficiente risolvere il seguente integrale

$$P_1 = \int_0^a (p(x) - p_a) dx \quad (18.6)$$

Tale forza verticale risulta applicata su una retta che, in generale, non passa per la mezzeria del meato. Per determinare la retta di applicazione di  $P_1$  è necessario risolvere la seguente equazione rispetto ad  $e$  (eccentricità):

$$P_1 \left(\frac{a}{2} - e\right) = \int_0^a (p(x) - p_a) x dx$$

che conduce a

$$e = \frac{a}{2} - \frac{\int_0^a (p(x) - p_a) x dx}{P_1} \quad (18.7)$$

L'azione tangenziale  $T_1$  applicata dal fluido alla parete mobile viene ricavata attraverso la seguente espressione

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^a \tau|_{y=0} dx = \int_0^a \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \right) dx \\ &= \int_0^a \left( \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h(x)) + U \left( \frac{y}{h} - 1 \right) \right) \right) dx \\ &= \int_0^a \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y-h)_{y=0} + \frac{\mu U}{h} \right) dx \\ &= \int_0^a \left( -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu U}{h} \right) dx \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione di  $\frac{\partial p}{\partial x}$  si ottiene in definitiva

$$T_1 = \int_0^a U \mu \frac{4h - 3h^*}{h^2} dx \quad (18.8)$$

Si noti che l'espressione dell'azione tangenziale  $T_2$  trasmessa dal meato al corpo fisso risulta in generale diversa dal valore di  $T_1$ . Infatti si ha

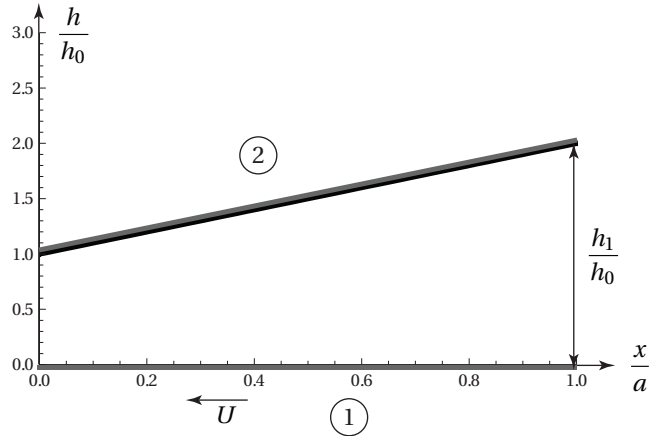
$$\begin{aligned} T_2 &= \int_0^a \tau|_{y=h} dx = \int_0^a \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y-h)_{y=h} + \frac{\mu U}{h} \right) dx \\ &= \int_0^a \left( \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu U}{h} \right) dx \\ &= \int_0^a U \mu \frac{3h^* - 2h}{h^2} dx \end{aligned}$$

Infine si definisce il coefficiente d'attrito  $f$  del meato attraverso il seguente rapporto

$$f = \frac{T_1}{P_1} \quad (18.9)$$

## 18.2 Pattino lineare

Si riporta come primo caso analizzato il pattino lubrificato con profilo lineare, rappresentato in Fig. 18.2. L'altezza  $h$  del meato in funzione dell'ascissa  $x$  si può esprimere come segue



**Figura 18.2** Pattino lineare.

$$h(x) = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{a} x = h_0 \left( 1 + \frac{m}{a} x \right)$$

dove

$$m = \frac{h_1 - h_0}{h_0}$$

Nel seguito si assume che

$$h_1 = 2h_0; \quad m = 1$$

Si ricorda che dalla teoria si ottiene che il valore  $h^*$  per cui la sovrappressione nel meato è massima (ossia dove si annulla la quantità  $\frac{\partial p}{\partial x}$ ) è dato da

$$h^* = \frac{\int_0^a \frac{1}{h(x)^2} dx}{\int_0^a \frac{1}{h(x)^3} dx} \quad (18.10)$$

che in questo caso diventa

$$h^* = h_0 \frac{\int_0^a \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{a} x\right)^2} dx}{\int_0^a \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{a} x\right)^3} dx}$$

Sostituendo l'espressione dell'altezza del meato  $h(x)$  e risolvendo i due integrali si arriva alla seguente espressione

$$h^* = 2h_0 \frac{1+m}{2+m} = 1.33h_0$$

Si ricorda che l'espressione dell'andamento della pressione lungo il meato è dato è la seguente

$$p(x) - p_a = -6\mu U \left( \int_0^x \frac{1}{h^2} dx - h^* \int_0^x \frac{1}{h^3} dx \right)$$

dove  $p_a$  è la pressione ambiente, all'esterno del meato. Il valore della pressione massima  $(p - p_a)|_{\max}$  risulta quindi

$$(p - p_a)|_{\max} = 0.042 \frac{6aU\mu}{h_0^2}$$

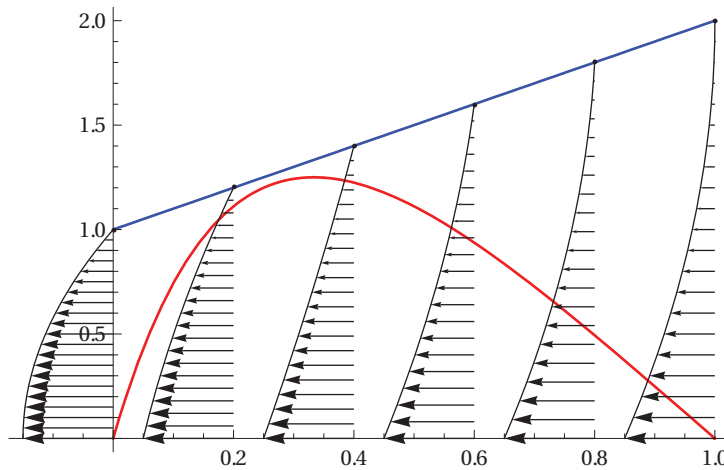
Il valore  $x^*$  dell'ascissa  $x$  tale per cui si ottiene il valore  $h^*$  è quindi dato da

$$x^* = \frac{a}{2+m} = 0.33a$$

Una volta noto l'andamento della pressione, il campo di velocità del fluido lungo l'asse  $x$  può essere determinato dalla seguente relazione

$$u(x, y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + U \left( \frac{y}{h} - 1 \right)$$

L'andamento della sovrappressione nel meato e il campo di velocità del fluido sono rappresentati in Fig. 18.3 La capacità di carico  $P_1$  del pattino lineare può essere determinata attraverso



**Figura 18.3** Andamento qualitativo della sovrappressione (rosso) e campo di velocità nel pattino lineare.

$$P_1 = \int_0^a (p(x) - p_a) dx$$

che in questo caso risulta

$$P_1 = 0.16 \frac{a^2 U \mu}{h_0^2}$$



Per il calcolo della forza tangenziale  $T_1$  trasmessa dal fluido al membro in moto si ricorre alla seguente espressione

$$T_1 = \int_0^a \tau_{y=0} dx$$

dove dalla teoria abbiamo (si veda l'espressione (18.8))

$$\tau = \mu \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

Per cui, nel caso in esame si ha

$$T_1 = 0.77 \frac{\mu U a}{h_0}$$

Ne discende che il coefficiente d'attrito  $f$  definito in (18.9) nel caso in esame vale

$$f = 4.86 \frac{h_0}{a}$$

Infine si calcola l'eccentricità  $e$  del pattino che è definita come segue

$$P_1 \left( \frac{a}{2} - e \right) = \int_0^a (p(x) - p_a) x dx$$

da cui

$$e = \frac{a}{2} - \frac{\int_0^a (p(x) - p_a) x dx}{P_1} = \frac{a}{2} - \frac{\int_0^a (p(x) - p_a) x dx}{\int_0^a (p(x) - p_a) dx}$$

che in questo caso vale

$$e = 0.069 a$$

### 18.3 Pattino esponenziale

---

Studiamo ora le caratteristiche del pattino con profilo esponenziale rappresentato in Fig. 18.4. Al fine di confrontare tale forma con il pattino lineare si impone che

$$h(0) = h_0; \quad h(a) = h_1$$

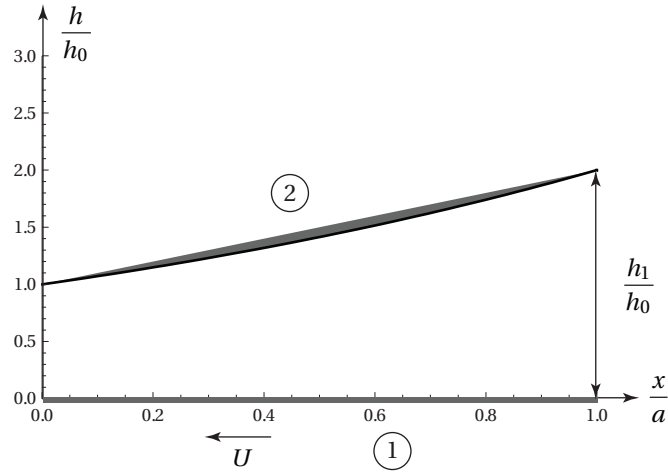
La forma del meato  $h(x)$ , in questo caso ha la seguente espressione

$$h(x) = h_0 e^{\lambda \frac{x}{a}}$$

dove, per le condizioni poste vale

$$h_1 = h_0 e^{\lambda}$$

$$\lambda = \log \left( \frac{h_1}{h_0} \right)$$



**Figura 18.4** Pattino esponenziale.

Si ripercorrono ora gli stessi passi seguiti per il calcolo del pattino lineare. Il valore  $h^*$  per cui si ha il picco di sovrappressione è dato da<sup>1</sup>

$$h^* = -\frac{3e^{-\lambda} h_0 \sinh(\lambda)}{-1 + e^{-3\lambda}} = 1.286h_0$$

L'andamento della sovrappressione nel meato è quindi dato da

$$p(x) - p_a = -\frac{6aU\mu}{h_0^2} \frac{\left( \frac{2e^{2\lambda} \left( -1 + e^{-\frac{3x\lambda}{a}} \right) \sinh(\lambda)}{-1 + e^{3\lambda}} - e^{-\frac{2x\lambda}{a}} + 1 \right)}{2\lambda}$$

mentre il valore massimo della pressione è

$$(p - p_a)|_{\max} = 0.042 \frac{6aU\mu}{h_0^2}$$

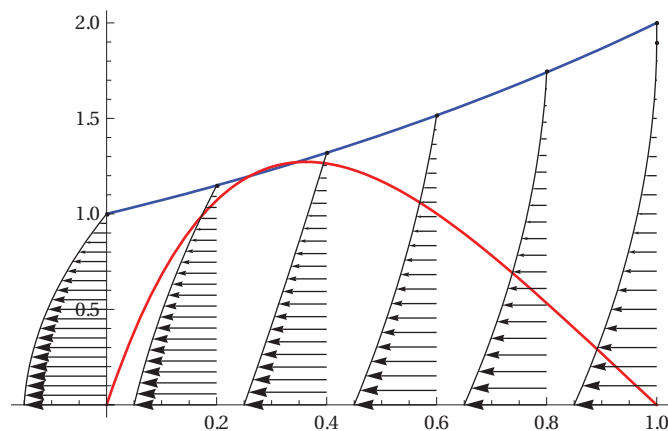
Si noti che tale valore risulta leggermente più alto rispetto al caso del pattino lineare. Inoltre il valore  $x^*$  a cui si raggiunge il picco di sovrappressione è dato da

$$x^* = \frac{a \log \left( \frac{3e^{-\lambda} \sinh(\lambda)}{1 - e^{-3\lambda}} \right)}{\lambda} = 0.36a$$

che risulta più *centrato* rispetto al caso del pattino lineare. L'andamento della sovrappressione e del campo di velocità del fluido all'interno del meato è rappresentato in Fig. 18.5. La capacità di carico  $P_1$  di questo tipo di pattino è data da

$$P_1 = \frac{a^2 U \mu (-3\lambda + \sinh(\lambda) + \sinh(2\lambda))}{(1 + e^\lambda + e^{2\lambda}) h_0^2 \lambda^2} = 0.162 \frac{a^2 U \mu}{h_0^2}$$

<sup>1</sup>Ricordare che  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$



**Figura 18.5** Andamento qualitativo della sovrappressione (rosso) e campo di velocità nel pattino esponenziale.

Confrontando tale valore con quello relativo al pattino lineare si vede che in questo caso la capacità di carico è maggiore di circa il 2%.

La forza tangenziale  $T_1$  trasmessa dal fluido al membro in moto risulta

$$T_1 = \frac{ae^{-\lambda}(-1 + e^\lambda)U\mu(7 \cosh(\lambda) - 1)}{2h_0\lambda(2 \cosh(\lambda) + 1)} = 0.799 \frac{aU\mu}{h_0}$$

da cui discende che il coefficiente d'attrito  $f$  vale

$$f = \frac{T_1}{P_1} = 4.92 \frac{h_0}{a}$$

che risulta maggiore rispetto al caso lineare.

In maniera analoga al caso del pattino lineare si calcola l'eccentricità  $e$  che risulta

$$e = 0.058a$$

Si nota che l'eccentricità è minore rispetto al caso del pattino lineare e pertanto la retta d'azione nel caso esponenziale risulta più vicina alla mezzzeria.

## 18.4 Pattino a gradino

Calcoliamo ora le caratteristiche di un pattino a gradino rappresentato in Fig. 18.6. Anche in questo caso per confrontare i risultati con quelli dei profili di meato calcolati in precedenza si impone

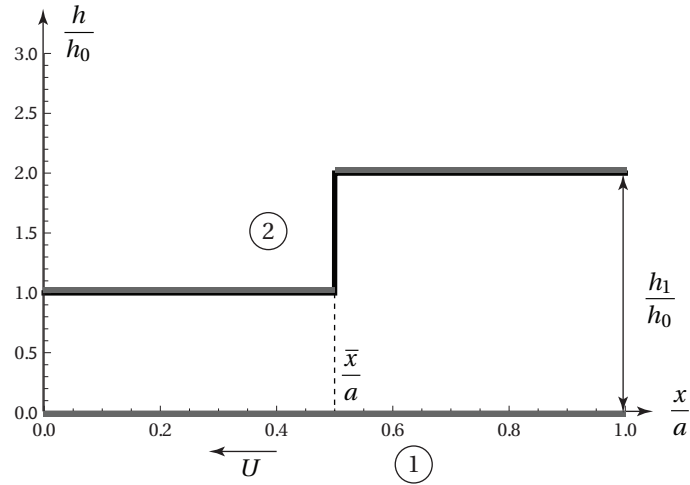
$$h_1 = 2h_0$$

Inoltre, per semplicità si assume che il valore di  $x = \bar{x}$  per cui si ha la discontinuità nel profilo sia per  $\bar{x} = a/2$ . L'espressione dell'altezza del meato risulta quindi

$$h(x) = \begin{cases} h_0 & x < \frac{a}{2} \\ h_1 & x \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$

Si noti che per il calcolo del valore di  $h^*$  la discontinuità nell'espressione di  $h(x)$  non comporta alcun problema in quanto gli integrali possono essere risolti separatamente per le due parti del profilo del meato. Il valore di  $h^*$  risulta pertanto

$$h^* = 1.11h_0$$



**Figura 18.6** Pattino a gradino.

L'andamento della pressione nel meato in questo caso è facilmente ricavabile e risulta

$$p(x) - p_a = \begin{cases} \frac{2Ux\mu}{3h_0^2} & x < a/2 \\ \frac{2U(a-x)\mu}{3h_0^2} & x \geq a/2 \end{cases}$$

ed è pertanto banale ricavare che

$$x^* = \frac{a}{2}$$

Il valore massimo della sovrappressione risulta in questo caso

$$(p - p_a)_{\max} = 0.055 \frac{6aU\mu}{h_0^2}$$

L'andamento della sovrappressione e del campo di velocità del fluido all'interno del meato sono rappresentati in Fig. 18.7 La capacità di carico  $P_1$  in questo caso risulta

$$P_1 = \frac{a^2 U \mu}{6 h_0^2} = 0.1667 \frac{a^2 U \mu}{h_0^2}$$

mentre la forza tangenziale trasmessa  $T_1$  vale

$$T_1 = \frac{11aU\mu}{12h_0} = 0.9167 \frac{aU\mu}{h_0}$$

per cui il coefficiente d'attrito  $f$  risulta

$$f = \frac{T_1}{P_1} = 5.5 \frac{h_0}{a}$$

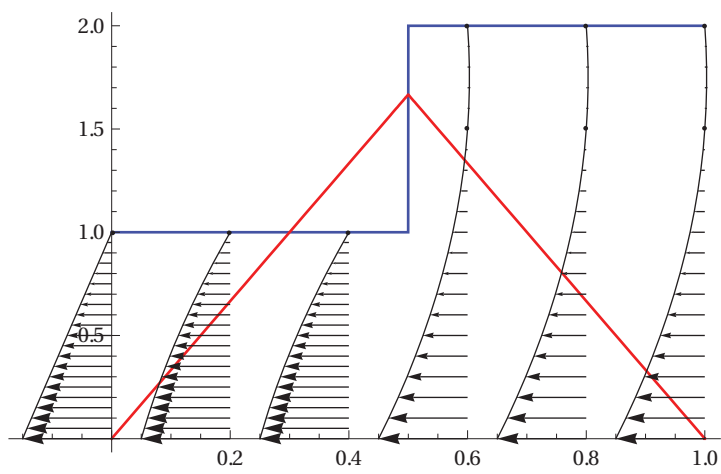
che risulta notevolmente più alto rispetto ai due casi precedenti.

Per concludere l'analisi sul pattino a gradino si calcola il valore dell'eccentricità  $e$  che nel caso particolare risulta

$$e = 0$$

Qualora il pattino a scalino non fosse simmetrico, ovvero, in generale,  $\bar{x} = \epsilon a$  si avrebbe

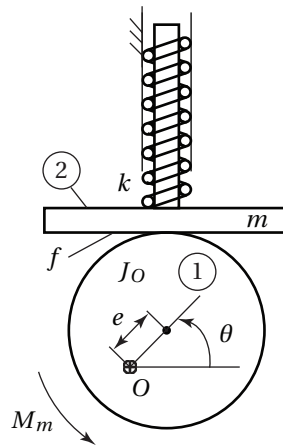
$$e = \frac{1}{6}(a - 2a\epsilon)$$



**Figura 18.7** Andamento qualitativo della sovrappressione (rosso) e campo di velocità nel pattino a gradino.

## Grado di irregolarità di una camma

---



**Figura 19.1** Schema meccanico.

Si consideri il meccanismo riportato in Fig. 19.1. Si determini il grado di irregolarità di tale meccanismo nel caso in cui non sia presente attrito fra la camma e il piattello, e nel caso in cui vi sia presente attrito caratterizzato da un coefficiente  $f$  noto.

### 19.1 Caso senza attrito

---

Cominciamo a studiare il sistema nel caso non vi sia attrito fra ① e ②. Dall'analisi di posizione e dalla cinematica si ottengono le seguenti relazioni

$$x = e \sin(\theta); \quad \dot{x} = e\dot{\theta} \cos(\theta); \quad \ddot{x} = e[-\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \ddot{\theta} \cos(\theta)]$$

L'energia cinetica totale  $T$  del sistema è data dalla seguente espressione

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (J_O + m e^2 \cos^2(\theta)) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (J_O + J_1(\theta)) \dot{\theta}^2$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale si assume che non vi siano effetti gravitazionali e che la molla sia a riposo quando la quota della faccia inferiore del piattello assuma valore zero. L'energia potenziale  $U$  del sistema si scrive quindi come segue

$$U = \frac{1}{2} k (r + e \sin(\theta))^2$$

A questo punto possiamo scrivere l'equazione del moto utilizzando le equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = (J_O + me^2 \cos^2(\theta)) \ddot{\theta} - 2me^2 \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \sin(\theta); \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = -me^2 \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = k(r + e \sin(\theta)) e \cos(\theta)$$

da cui segue l'equazione del moto del sistema

$$(J_O + me^2 \cos^2(\theta)) \ddot{\theta} - 2me^2 \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + ke(r + e \sin(\theta)) \cos(\theta) = M_m$$

Volendo considerare la seguente espressione dell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} (J_O + J_1(\theta)) \dot{\theta}^2$$

il termine inerziale derivante dalle equazioni di Lagrange risulta

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = (J_O + J_1(\theta)) \ddot{\theta} + \frac{dJ_1(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \frac{dJ_1(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}^2 = (J_O + J_1(\theta)) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \frac{dJ_1(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}^2$$

dove

$$\frac{1}{2} \frac{dJ_1(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}^2 = -me^2 \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \sin(\theta)$$

Conviene riordinare i termini dell'equazione del moto del sistema in modo tale da isolare la componente del momento resistente:

$$(J_O + J_1(\theta)) \ddot{\theta} - me^2 \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) = M_m - ke(r + e \sin(\theta)) \cos(\theta) = M_m - M_r$$

Calcoliamo ora il lavoro del momento resistente  $L_r$  in un ciclo:

$$L_r = \int_0^{2\pi} M_r(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \left( ker \cos(\theta) + \frac{ke^2}{2} \sin(2\theta) \right) d\theta = ker [\sin(\theta)]_0^{2\pi} + \frac{ke^2}{4} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta) d(2\theta)$$

$$= 0 + \frac{ke^2}{4} [-\cos(2\theta)]_0^{2\pi} = 0 + 0 = 0$$

Come era lecito aspettarsi il lavoro resistente è identicamente nullo. Questo è giustificato dal fatto che, non essendoci attrito, il sistema è conservativo e quindi, per mantenere l'energia meccanica totale del sistema, *assumendo un momento motore costante*, il valore di  $M_m$  deve essere nullo, in caso contrario infatti, il sistema accelererebbe.

Utilizziamo adesso l'approssimazione di Tredgold che consiste nel sostituire il momento d'inerzia reale (ridotto all'asse della camma) con un momento d'inerzia *medio*  $J_r$  come segue

$$J_r = J_O + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_1(\theta) d\theta = J_O + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} me^2 \cos^2(\theta) d\theta$$

$$= J_O + \frac{me^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = J_O + \frac{me^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = J_O + \frac{me^2}{2}$$

ed effettuare la seguente approssimazione (con  $\omega_m$  costante)

$$\frac{1}{2} \frac{dJ_1(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}^2 \simeq \frac{1}{2} \frac{dJ_1(\theta)}{d\theta} \omega_m^2$$

La dinamica del sistema può essere quindi scritta nella seguente forma approssimata

$$J_r \ddot{\theta} = -\frac{1}{2} \frac{dJ_1(\theta)}{d\theta} \omega_m^2 - M_r(\theta) = \frac{me^2}{2} \sin(2\theta) \omega_m^2 - ke(r + e \sin(\theta)) \cos(\theta)$$

$$= \frac{1}{2} e^2 (m\omega_m^2 - k) \sin(2\theta) - ker \cos(\theta) = f(\theta)$$

Calcoliamo ora l'integrale di ambo i membri della precedente espressione da zero fino a un valore generico  $\bar{\theta}$

$$\int_0^{\bar{\theta}} J_r \ddot{\theta} d\theta = \int_0^{\bar{\theta}} f(\theta) d\theta$$

Ricordandosi che  $d\theta = \dot{\theta} dt$  possiamo riscrivere la precedente espressione come segue

$$\int_0^{\bar{\theta}} J_r \ddot{\theta} \dot{\theta} dt = \int_0^{\bar{\theta}} f(\theta) d\theta$$

da cui, risolvendo

$$\left[ \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 \right]_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}(t)} = \int_0^{\bar{\theta}} f(\theta) d\theta; \quad \frac{1}{2} J_r (\omega(\bar{\theta})^2 - \omega_0^2) = \int_0^{\bar{\theta}} f(\theta) d\theta$$

Pertanto è possibile scrivere quanto segue

$$\frac{1}{2} J_r (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = \left[ \int_0^{\bar{\theta}} f(\theta) d\theta \right]_{\max} - \left[ \int_0^{\bar{\theta}} f(\theta) d\theta \right]_{\min}$$

Per determinare i valori estremi dell'integrale a secondo membro si nota che tali valori estremi si ottengono per<sup>1</sup>  $f(\theta) = 0$  cioè

$$\frac{1}{2} e^2 (m\omega_m^2 - k) \sin(2\theta) - ker \cos(\theta) = 0 \Rightarrow \cos(\theta) [e^2 (m\omega_m^2 - k) \sin(\theta) - ker] = 0$$

Le soluzioni di questa equazione in  $\theta$  sono le seguenti

- Dal termine  $\cos(\theta) = 0$  si ottengono due soluzioni

$$\theta = \frac{\pi}{2}; \quad \theta = \frac{3\pi}{2}$$

- Dal termine

$$\sin(\theta) = \frac{ker}{e^2 (m\omega_m^2 - k)}$$

si ottiene

$$\theta = \arcsin\left(\frac{kr}{e(m\omega_m^2 - k)}\right)$$

---

<sup>1</sup>Si annulla la derivata prima dell'integrale.



Affinchè tale soluzione abbia senso<sup>2</sup> deve valere (assumendo  $e(m\omega_m^2 - k) > 0$ )

$$\frac{kr}{e(m\omega_m^2 - k)} < 1 \Rightarrow em\omega_m^2 > kr \Rightarrow em\omega_m^2 > k(e+r)$$

e anche

$$\frac{kr}{e(m\omega_m^2 - k)} > -1 \Rightarrow kr > -em\omega_m^2 + ek \Rightarrow em\omega_m^2 > k(e-r)$$

L'ultima relazione scritta è sempre valida in quanto  $e < r$  e tutte le altre quantità sono positive.

È facilmente verificabile che la condizione di esistenza posta sulla funzione  $\arcsin(\cdot)$  è in contrasto con la condizione di non-distacco fra la camma e il piattello e pertanto tale soluzione è da scartare in quanto non ha senso fisico. Infatti, scrivendo l'equilibrio verticale della valvola si ha

$$N(t) - k(r+x) = m\ddot{x}$$

e nell'ipotesi in cui  $\dot{\theta} \simeq \omega_m$  (costante) risulta

$$N(t) - k(r + e \sin(\theta)) = -me\omega_m^2 \sin(\theta)$$

da cui

$$N(t) = k(r + e \sin(\theta)) - me\omega_m^2 \sin(\theta) = (kr + ke \sin(\theta)) - me\omega_m^2 \sin(\theta)$$

Assumendo per ipotesi che  $m\omega_m^2 - k > 0$  il valore della forza  $N(t)$  è data dalla differenza di una quantità costante ( $kr$ ) che rappresenta il precarico, e una quantità armonica. Pertanto il valore minimo di tale forza si ha nelle condizioni in cui  $\sin(\theta)$  è massimo e risulta

$$N(t)_{\min} = kr - e(m\omega_m^2 - k)$$

Affinchè si abbia sempre contatto fra la camma e il piattello è necessario che risulti  $N(t) > 0$  ad ogni istante, e in particolare che  $N(t)_{\min} > 0$ . Pertanto deve valere

$$kr - e(m\omega_m^2 - k) > 0 \Rightarrow em\omega_m^2 < k(r+e) \Rightarrow \omega_m^2 < \frac{k(r+e)}{em}$$

che è in contrasto con la condizione di esistenza dell'argomento della funzione  $\arcsin(\cdot)$ .

Calcoliamo il valore del lavoro resistente  $L_r^*$  quando vale  $f(\theta) = 0$ :

$$\begin{aligned} L_r^*(\bar{\theta}) &= \int_0^{\bar{\theta}} \left( \frac{1}{2} e^2 (m\omega_m^2 - k) \sin(2\theta) - ker \cos(\theta) \right) d\theta \\ &= \left[ -\frac{1}{4} e^2 (m\omega_m^2 - k) \cos(2\theta) - ker \sin(\theta) \right]_0^{\bar{\theta}} \\ L_r^*(\pi/2) &= -ker + \frac{1}{2} e^2 (m\omega_m^2 - k) \\ L_r^*(3\pi/2) &= ker + \frac{1}{2} e^2 (m\omega_m^2 - k) \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>L'argomento della funzione  $\arcsin$  deve essere compreso in  $(-1, 1)$ .

Nell'ipotesi in cui  $\omega_m > \sqrt{k/m}$ , ossia  $m\omega_m^2 - k > 0$  si ha

$$L_r^*(\pi/2) < L_r^*(3\pi/2)$$

per cui

$$\frac{1}{2}J_r(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = L_r^*(3\pi/2) - L_r^*(\pi/2) = 2ker \Rightarrow (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = \frac{4ker}{J_r} = \frac{4ker}{J_0 + \frac{me^2}{2}}$$

Da quest'ultima relazione discende che il grado di irregolarità  $\delta$  risulta

$$\delta = \frac{(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2)}{2\omega_m^2} = \frac{2ker}{\left(J_0 + \frac{me^2}{2}\right)\omega_m^2}$$

## 19.2 Caso con attrito

---

Consideriamo ora il caso in cui vi sia attrito fra la camma e il piattello. Cominciamo scrivendo le equazioni del moto utilizzando le equazioni cardinali (la prima equazione è l'equilibrio alla rotazione della camma intorno al punto  $O$ , mentre la seconda equazione è l'equilibrio verticale della valvola):

$$\begin{aligned} \odot : J_O\ddot{\theta} &= M_m - N\cos(\theta) - fN(r + e\sin(\theta)) \\ m\ddot{x} &= N - k(r + e\sin(\theta)) \end{aligned}$$

Determinando  $N$  dalla seconda equazione e sostituendo nella prima si ottiene

$$\begin{aligned} (J_0 + me^2\cos^2(\theta))\ddot{\theta} &= M_m + me^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}^2 - ke(r + e\sin(\theta))\cos(\theta) \\ &\quad - f(r + e\sin(\theta)) [me(-\dot{\theta}^2\sin(\theta) + \ddot{\theta}\cos(\theta)) + k(r + e\sin(\theta))] \end{aligned}$$

Indicando con

$$M_a(\theta) = f(r + e\sin(\theta)) [me(-\dot{\theta}^2\sin(\theta) + \ddot{\theta}\cos(\theta)) + k(r + e\sin(\theta))]$$

il momento della forza d'attrito si ottiene

$$(J_0 + me^2\cos^2(\theta))\ddot{\theta} = M_m + me^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}^2 - ke(r + e\sin(\theta))\cos(\theta) - M_a(\theta)$$

Analogamente al caso senza attrito, consideriamo la seguente approssimazione

$$\dot{\theta} \simeq \omega_m = \text{costante}; \quad \ddot{\theta} = 0$$

per cui risulta

$$M_a(\theta) = f(r + e\sin(\theta)) (-me\omega_m^2\sin(\theta) + k(r + e\sin(\theta)))$$

da cui discende il lavoro della forza d'attrito  $L_{a_p}$ :

$$L_{a_p} = \int_0^{2\pi} M_a(\theta) d\theta = f\pi((k - m\omega_m^2)e^2 + 2kr^2)$$

Il momento motore  $M_m$  costante che, nell'arco di un periodo, fornisce lo stesso lavoro dissipato attraverso l'attrito vale quindi

$$M_m = \frac{L_m}{2\pi} = \frac{L_{a_p}}{2\pi} = \frac{f((k - m\omega_m^2)e^2 + 2kr^2)}{2}$$

Per il calcolo del grado di irregolarità si fa ancora uso dell'approssimazione di Tredgold:

$$(J_0 + J_1(\theta))\ddot{\theta} = J_r\ddot{\theta} = f(\theta)$$

dove in questo caso si ha

$$f(\theta) = \frac{f}{2} ((k - m\omega_m^2)e^2 + 2kr^2) + me^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \omega_m^2 - ke(r + e \sin(\theta)) \cos(\theta) \\ - f(r + e \sin(\theta)) [-m\omega_m^2 \sin(\theta) + k(r + e \sin(\theta))]$$

Il procedimento per determinare il grado di irregolarità è del tutto analogo a quello utilizzato nel caso senza attrito. Nel caso in esame si dovrà utilizzare l'ultima espressione di  $f(\theta)$  appena scritta.

# 20

## Grado di irregolarità di un manovellismo di spinta

---

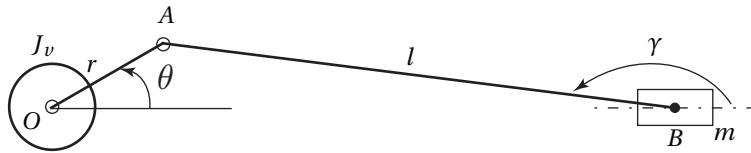


Figura 20.1 Schema meccanico.

Si consideri il manovellismo di spinta riportato in Fig. 20.1. La biella e la manovella si assumono prive di massa. Si considera invece una massa  $m$  concentrata nel pistone. Si determini il valore del momento d'inerzia  $J_v$  del volano calettato sulla manovella (come in figura) affinché il grado di irregolarità sia inferiore ad un valore fissato  $\delta^*$ .

### 20.1 Dinamica

---

Per il meccanismo in esame si definisce

$$\lambda = \frac{r}{l}$$

La posizione  $x$  del pistone risulta pertanto la seguente

$$x = r \left( \cos(\theta) - \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\theta)} \right)$$

Dato che solitamente il termine  $\lambda^2 \sin^2(\theta)$  è trascurabile rispetto all'unità, la velocità del pistone può essere scritta nella seguente forma approssimata

$$\dot{x} \simeq r \dot{\theta} \left( -\sin(\theta) + \frac{1}{2} \lambda \sin(2\theta) \right)$$

Con questo risultato è possibile scrivere l'energia cinetica totale del sistema  $T$  come segue

$$T = \frac{1}{2} J_v \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m r^2 \left( -\sin(\theta) + \frac{1}{2} \lambda \sin(2\theta) \right)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_v \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (J_v + J_p(\theta)) \dot{\theta}^2$$

dove si è posto

$$J_p(\theta) = mr^2 \left( -\sin(\theta) + \frac{1}{2} \lambda \sin(2\theta) \right)^2$$

Utilizzando le equazioni di Lagrange, la dinamica del sistema si scrive come segue

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ 0 &= mr^2 (\lambda \cos(\theta) - 1)^2 \ddot{\theta} \sin^2(\theta) + \\ &+ mr^2 (\lambda \cos(\theta) - 1) (-\cos(\theta) + \lambda \cos(2\theta)) \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + J_v \ddot{\theta} \end{aligned}$$

in quanto non sono presenti termini non conservativi.

Per studiare il grado di irregolarità facciamo ricorso all'approssimazione di Tredgold e si scrive quindi

$$J_r = J_v + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_p(\theta) d\theta = J_v + \frac{1}{8} mr^2 (4 + \lambda^2)$$

inoltre si assume  $\dot{\theta} = \omega_m$ . La dinamica complessiva può quindi essere scritta come segue

$$J_r \ddot{\theta} = -m\omega_m r^2 (\lambda \cos(\theta) + 1) (\cos(\theta) + \lambda \cos(2\theta)) \sin(\theta) = f(\theta)$$

Il lavoro resistente  $L_r$  in un periodo è dato da

$$L_r = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

e nel caso in esame risulta

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0$$

come era lecito aspettarsi data la mancanza di termini non-conservativi. I valori estremi  $L_r|_{\max}$  e  $L_r|_{\min}$  si hanno in corrispondenza dei valori di  $\theta$  che risolvono la seguente equazione

$$f(\theta) = 0$$

Si definisce  $k = L_r|_{\max} - L_r|_{\min}$  e pertanto risulta

$$\frac{1}{2} J_r (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = k$$

da cui il grado di irregolarità  $\delta$

$$\delta = \frac{(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2)}{2\omega_m^2} = \frac{k}{J_r \omega_m^2}$$

Dovendo risultare  $\delta < \delta^*$  si ottiene

$$\frac{k}{J_r \omega_m^2} < \delta^* \Rightarrow J_r > \frac{k}{\delta^* \omega_m^2} \Rightarrow J_v > \frac{k}{\delta^* \omega_m^2} - \frac{1}{8} mr^2 (4 + \lambda^2)$$