Bacchetta Sottile su Appoggi Stretti

Massimo Guiggiani

10 marzo 2022

Sommario

Un problema in cui si deve indovinare a priori il verso delle reazioni vincolari.

1 Bacchetta sottile su appoggi stretti

Sono noti (Fig. 1):

- dimensioni a, b e c;
- angoli α e β;
- coefficiente di attrito $f = \tan(\varphi)$ nei due appoggi A e B;
- velocità $\mathbf{V}$;
- forza resistente $\mathbf{Q}$.

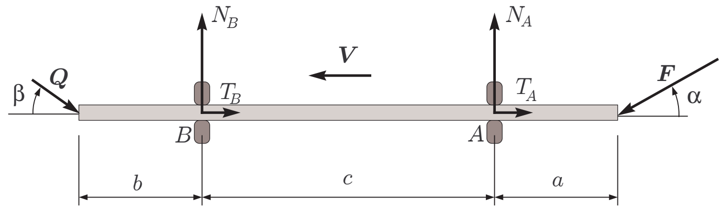

Figura 1: Schema di una bacchetta sottile su appoggi stretti

Si vuole calcolare la forza motrice $\mathbf{F}$.

1.1 Appoggi stretti

Se gli appoggi A e B sono "stretti", ossia molto più corti delle altre lunghezze a, b e c, si conosce di fatto la posizione delle reazioni normali N_A e N_B. Questo è un requisito fondamentale per giungere a una soluzione in cui credere.

Se poi anche lo spessore della bacchetta è piccolo, il problema si semplifica ulteriormente, ma questo non è un requisito fondamentale.

La Fig. 1 è abbastanza generale, ma può contenere un grave errore. Infatti, non si è certi che le reazioni normali N_A e N_B siano entrambe verso l'alto. Se una delle due risultasse negativa (verso il basso), ciò porterebbe a invalidare tutto il processo risolutivo.

Ma andiamo per gradi, esaminando due casi più semplici. Entrambi hanno $\beta = 0$

1.2 Forza motrice fra gli appoggi

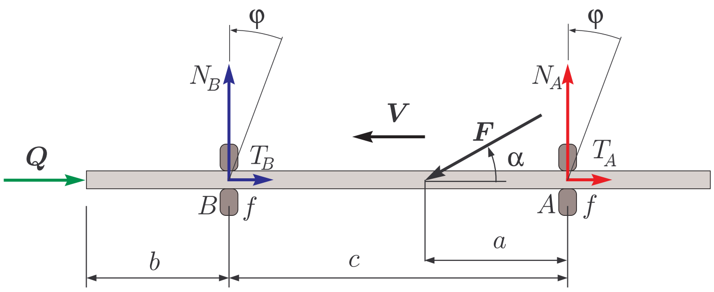

Figura 2: Forza motrice fra gli appoggi

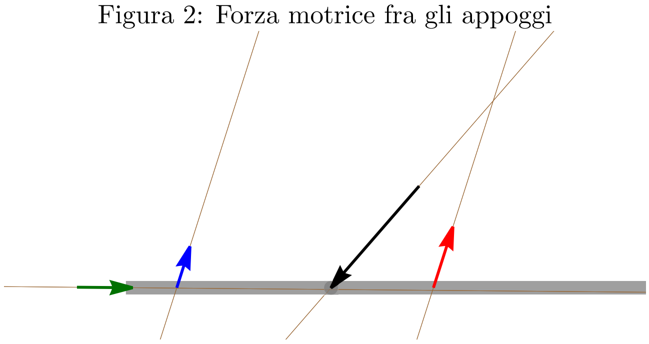

Figura 3: Forza motrice fra gli appoggi: esempio quantitativo

Con riferimento alla Fig. 2, si ha il seguente sistema di equazioni

$$Q - F\cos(\alpha) + T_A + T_B = 0 \tag{1}$$
$$N_A + N_B - F\sin(\alpha) = 0 \tag{2}$$
$$N_A a - N_B(c-a) = 0 \tag{3}$$
$$T_A = fN_A \tag{4}$$
$$T_B = fN_B \tag{5}$$

che risolto fornisce

$$\begin{aligned} F &= \frac{Q}{\cos(\alpha) - f\sin(\alpha)} \\ N_A &= F\sin(\alpha)\frac{c-a}{c} \\ N_B &= F\sin(\alpha)\frac{a}{c} \end{aligned} \tag{6}$$

Questa soluzione ha senso solo se $0 < \alpha < \pi/2 - \varphi$, ovvero $F > 0$. Se $\pi/2 - \varphi < \alpha < \pi/2$ il sistema non si muove.

1.3 Forza motrice fuori dagli appoggi

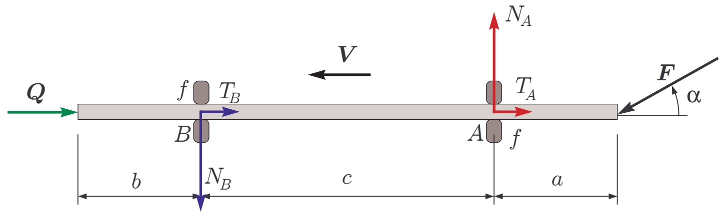

Figura 4: Forza motrice fuori dagli appoggi

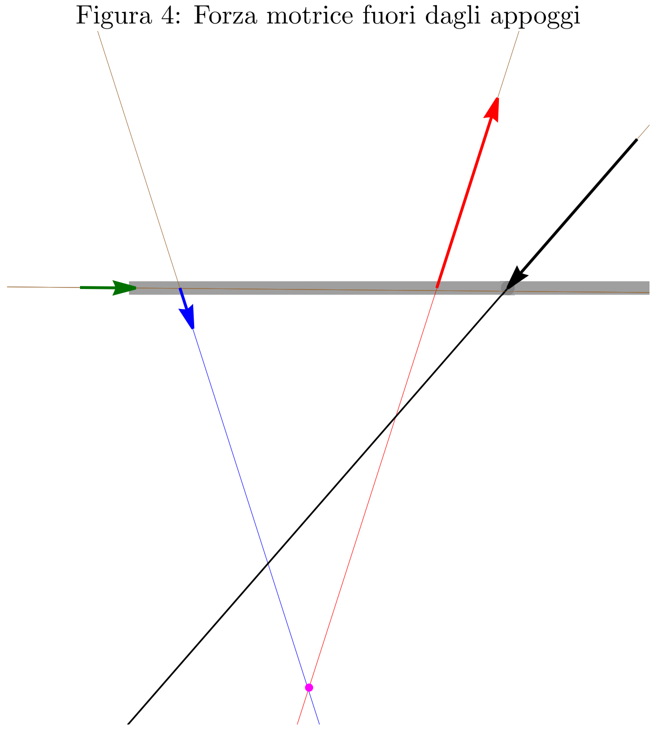

Figura 5: Forza motrice fuori dagli appoggi: esempio quantitativo

Con riferimento alla Fig. 4, si ha il seguente sistema di equazioni

$$Q - F\cos(\alpha) + T_A + T_B = 0 \tag{7}$$
$$N_A - N_B - F\sin(\alpha) = 0 \tag{8}$$
$$N_A a - N_B(c + a) = 0 \tag{9}$$
$$T_A = fN_A \tag{10}$$
$$T_B = fN_B \tag{11}$$

che risolto fornisce

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{cQ}{c\cos(\alpha) - f(2a+c)\sin(\alpha)} \\
N_A &= -\frac{Q(a+c)\sin(\alpha)}{f(2a+c)\sin(\alpha) - c\cos(\alpha)} \\
N_B &= -\frac{Qa\sin(\alpha)}{f(2a+c)\sin(\alpha) - c\cos(\alpha)}
\end{aligned} \tag{12}
$$

Questa soluzione ha senso solo se tutte le forze sono positive. Benché N_A e N_B hanno versi opposti, T_A e T_B sono (ovviamente) equiverse.

Il movimento non è possibile se la forza F passa per (o sotto) il punto color magenta in Fig. 5.