

# Trasmissioni a Cinghia Piatta

Massimo Guiggiani

21 marzo 2024

## Sommario

Un argomento in cui tornano utili i concetti visti nel freno a nastro.

## 1 Trasmissione a cinghia piatta

Sono noti (Fig. 1):

- i raggi  $r_1$  e  $r_2$  delle pulegge;
- gli angoli di avvolgimento  $\beta_1$  e  $\beta_2$ ;
- il coefficiente di attrito  $f = \tan(\varphi)$  fra cinghia e pulegge;
- la velocità angolare  $\omega_1$  della puleggia motrice;
- il momento resistente  $M_2$  sulla puleggia condotta.

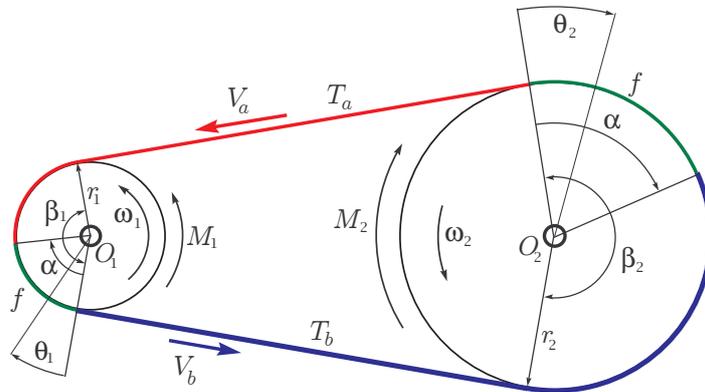


Figura 1: Schema di trasmissione a cinghia piatta

Si vuole calcolare il momento motore  $M_1$  e il valore della pretensione  $T_p$  affinché la trasmissione funzioni senza strisciamenti macroscopici.

## 1.1 Equilibrio delle pulegge

Si indicano con  $T_a$  e  $T_b$  le tensioni nei due tratti diritti della cinghia.  $T_a$  e  $T_b$  sono per ora incognite, ma si sa per certo, a causa dell'attrito fra cinghia e pulegge, che  $T_a > T_b$ . I pedici  $a$  e  $b$  stanno a indicare tensione alta e tensione bassa.

Si hanno le seguenti equazioni di equilibrio per ciascuna puleggia (inerzia supposta trascurabile)

$$\begin{aligned}M_1 &= (T_a - T_b)r_1 \\M_2 &= (T_a - T_b)r_2\end{aligned}\tag{1}$$

da cui

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{r_2}{r_1}\tag{2}$$

Il rapporto fra momento resistente  $M_2$  e momento motore  $M_1$  è pari al rapporto fra i raggi delle pulegge.

## 1.2 Pretensione

All'atto del montaggio, la cinghia viene tesa con una pretensione  $T_p$ . Dato che la cinghia è un corpo elastico si ha che

$$\frac{T_a + T_b}{2} = T_p\tag{3}$$

ovvero

$$T_a = T_p + \Delta T \quad \text{e} \quad T_b = T_p - \Delta T\tag{4}$$

da cui

$$T_a - T_b = 2\Delta T\tag{5}$$

Per avere una bassa variazione di  $T_p$  al variare dell'interasse sarebbe bene avere una cinghia molto cedevole in senso assiale.

Molto interessante è osservare che, come emerge dalle (1) e (5),  $\Delta T$  non dipende da  $T_p$ .

## 1.3 Potenze

Il rendimento  $\eta$  della trasmissione è dato dal rapporto fra potenza resistente  $W_2$  e potenza motrice  $W_1$

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{M_2\omega_2}{M_1\omega_1} < 1\tag{6}$$

Confrontando (6) con (7) si evince che, per avere rendimento  $\eta < 1$  occorre che

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} < \frac{r_1}{r_2}\tag{7}$$

## 1.4 Velocità periferiche

Sia  $V_a = \omega_1 r_1$  la velocità periferica della puleggia motrice. Analogamente, sia  $V_b = \omega_2 r_2$  la velocità periferica della puleggia condotta. Dalla (6), si ottiene subito che  $V_a > V_b$ .

Il tratto rosso di Fig. 1 è quello sottoposto alla tensione più alta  $T_a$  e quindi "viaggia" con velocità  $V_a$ . Il tratto blu viaggia con velocità  $V_b$  ed è sottoposto a  $T_b$ . In entrambi in casi, puleggia e cinghia hanno la stessa velocità nella parte iniziale del loro arco di contatto (Fig. 1).

Si noti che, combinando (7) e (6), si ottiene

$$\eta = \frac{V_b}{V_a} \quad (8)$$

che evidenzia un fatto importante: per avere rendimento elevato è bene avere una cinghia poco cedevole in senso assiale. Questo requisito è in contrasto con quanto ottenuto a proposito di  $T_p$ . Occorrerà trovare un compromesso.

## 1.5 Microstrisciamenti

Nelle parti finali degli archi di contatto (in verde in Fig. 1) si ha il graduale cambio di velocità e di tensione della cinghia.

Il cambio di tensione comporta un cambiamento nella deformazione longitudinale della cinghia. Si hanno quindi dei microstrisciamenti che attivano l'attrito fra cinghia e puleggia. Utilizzando i risultati ottenuti per il freno a nastro, si ha che

$$T_a = T_b \exp(f\alpha) \quad (9)$$

Più in generale (Fig. 1)

$$T_1(\theta_1) = T_b \exp(f\theta_1) \quad \text{e} \quad T_2(\theta_2) = T_a \exp(-f\theta_2) \quad (10)$$

In generale, la deformazione assoluta  $\varepsilon$  della cinghia vale

$$\varepsilon = \frac{T}{EA} \quad (11)$$

dove  $E$  è il modulo di Young e  $A$  è l'area della sezione della cinghia. Pertanto, se  $\ell_0$  è la lunghezza di un tratto di cinghia per  $T = 0$ , si ha che sotto la tensione  $T$  assume la lunghezza

$$\ell = \ell_0 \left( 1 + \frac{T}{EA} \right) \quad (12)$$

Sotto le tensioni  $T_a$  e  $T_b$ , lo stesso tratto di cinghia assume le lunghezze

$$\ell_a = \ell_0 \left( 1 + \frac{T_a}{EA} \right) \quad \text{e} \quad \ell_b = \ell_0 \left( 1 + \frac{T_b}{EA} \right) \quad (13)$$

Ovviamente, la quantità di materiale (massa) contenuta in  $\ell_0$ ,  $\ell$ ,  $\ell_a$  e  $\ell_b$  è la stessa. Ne consegue che, nota  $V_a = \omega_1 r_1$ , si ha

$$\frac{V_b}{V_a} = \frac{1 + \frac{T_b}{EA}}{1 + \frac{T_a}{EA}} = \eta \quad (14)$$

o, più in generale

$$V_2(\theta_2) = V_a \frac{1 + \frac{T_2(\theta_2)}{EA}}{1 + \frac{T_a}{EA}} \quad (15)$$

La (14) può essere riscritta come

$$\eta = \frac{EA + T_p - \Delta T}{EA + T_p + \Delta T} \quad (16)$$

che evidenzia che per migliorare il rendimento è opportuno avere cinghie assialmente rigide (alto  $EA$ ) e fortemente precaricate (alto  $T_p$ ). Purtroppo, altre esigenze indicano la direzione opposta.

## 1.6 Riepilogo per trasmissioni lente

Le equazioni a disposizione sono

$$\begin{aligned} M_1 &= (T_a - T_b)r_1 \\ M_2 &= (T_a - T_b)r_2 \\ \frac{T_a + T_b}{2} &= T_p \end{aligned} \quad (17)$$

oltre a

$$T_a = T_b \exp(f\alpha) \quad (18)$$

In (17) sono incogniti  $M_1$ ,  $T_a$  e  $T_b$ . Quindi la soluzione esiste ed è unica. Tuttavia occorre fare almeno due verifiche. Con la (18) si deve calcolare l'angolo  $\alpha$  e verificare che non superi il 50% di  $\beta_1$ . Il 50% è per avere un margine di sicurezza. Aumentando  $T_p$  si riduce  $\alpha$ . Ma aumenta  $T_a$ . E quindi occorre verificare che  $T_a$  non sia troppo gravosa per la cinghia.

## 2 Trasmissioni veloci

Se la velocità periferica delle pulegge, e quindi anche della cinghia, è elevata occorre tener conto degli effetti inerziali.

Sia  $q$  la densità della cinghia a unità di lunghezza. L'accelerazione centripeta vale

$$a = \frac{V^2}{r} \quad (19)$$

In questo calcolo la differenza fra  $V_a$  e  $V_b$  è irrilevante ( $V \simeq V_a \simeq V_b$ ), mentre è fondamentale per la (18).

Si rivisitano e si modificano le equazioni ottenute per il freno a nastro (Fig. 2)

$$\begin{aligned} (T + dT)\frac{d\theta}{2} + T\frac{d\theta}{2} - prd\theta &= qard\theta = qV^2d\theta \\ T + dT - T - fprd\theta &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

da cui

$$\begin{aligned} T - qV^2 &= pr \\ dT &= fprd\theta \end{aligned} \quad (21)$$

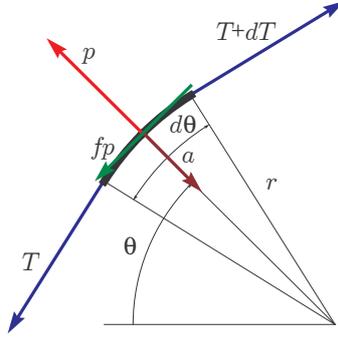


Figura 2: Equilibrio di un elemento infinitesimo di cinghia piatta

che combinate forniscono l'equazione differenziale

$$\frac{d(T - qV^2)}{d\theta} = f(T - qV^2) \quad (22)$$

con soluzione

$$T_a - qV^2 = (T_b - qV^2) \exp(f\alpha) \quad (23)$$

La pretensione  $T_p$  a trasmissione ferma è legata alle tensioni durante il funzionamento

$$\frac{(T_a - qV^2) + (T_b - qV^2)}{2} = T_p \quad (24)$$

ovvero

$$\frac{T_a + T_b}{2} = T_p + qV^2 \quad (25)$$

I momenti sono dati da

$$\begin{aligned} M_1 &= [(T_a - qV^2) - (T_b - qV^2)]r_1 = (T_a - T_b)r_1 \\ M_2 &= [(T_a - qV^2) - (T_b - qV^2)]r_2 = (T_a - T_b)r_2 \end{aligned} \quad (26)$$

che con la (25) forniscono

$$\begin{aligned} T_a &= T_p + \frac{M_1}{2r_1} + qV^2 \\ T_b &= T_p - \frac{M_1}{2r_1} + qV^2 \end{aligned} \quad (27)$$

Si vede che un effetto di  $qV^2$  è quello di aumentare le tensioni nella cinghia, senza che questo abbia influenza sui momenti  $M_1$  e  $M_2$ .

Un altro effetto si ha sull'angolo  $\alpha$  in cui si hanno microstrisciamenti fra cinghia e puleggia

$$f\alpha = \ln \left( \frac{T_a - qV^2}{T_b - qV^2} \right) \quad (28)$$