Masse, Molle e Segni Giusti

Massimo Guiggiani

21 marzo 2022

Sommario

Non sbagliare i segni è, ovviamente, fondamentale.

1 Sistema vibrante facile

Sono noti (Fig. 1):

- le masse m_1 e m_2;
- le rigidezze k_1, k_2 e k_3 delle molle (lineari);
- assenza di attrito secco.

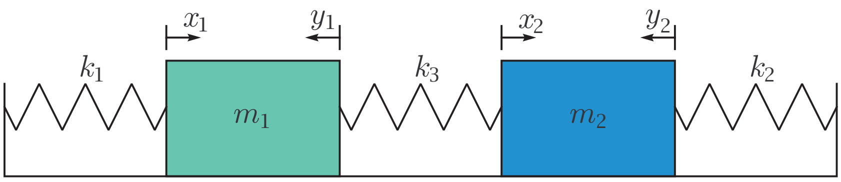

Figura 1: Semplice sistema vibrante a due gradi di libertà

Si vogliono ottenere le equazioni del moto di questo semplice sistema vibrante a due gradi di libertà.

1.1 Coordinate x_1 e x_2

Per iniziare, si utilizzano le coordinate x_1 e x_2 di Fig. 1. Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 - k_3(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2x_2 - k_3(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{1}$$

ma perché?

Prima di tutto occorre specificare che x_1 e x_2 sono coordinate *assolute*. I termini inerziali sono dati da massa per accelerazione assoluta ($m_i\ddot{x}_i$).

Si sconsiglia di usare le forze d'inerzia. La dinamica non può essere "volgarizzata" in statica. Newton ci ha insegnato che a sinistra dell'uguale ci vanno i termini inerziali. A destra le forze. I ruoli sono diversi e se si mantiene questa diversità nella scrittura delle equazioni del moto tutto sarà più chiaro. Poi (nel senso di successivamente) a cambiare di segno quando si sposta un termine sono tutti capaci.

Le coordinate x_1 e x_2 valgono *zero* all'*equilibrio statico* (tutto fermo). Non è detto (anzi è molto improbabile) che ciò corrisponda a molle scariche (molto raramente le molle elicoidali lavorano in trazione).

Le molle k_1 e k_2 sono collegate al muro e quindi danno forze di *richiamo* (rispetto al precarico), forze negative quando x_i è positivo e viceversa. Ecco perché, a destra dell'uguale, si ha $-k_1 x_1$ e $-k_2 x_2$.

La molla centrale è quella più difficile da trattare. Infatti entrambi gli estremi si muovono. Ma tutto diventa semplice se si osserva che la variazione di lunghezza è data dalla *differenza* fra le due coordinate x_1 e x_2. Se $x_1 = x_2$ la molla trasla, ma non si attiva. Si noti bene che si sono scelti x_1 e x_2 equiversi.

Adesso si deve ragionare sul segno. Per motivi estetici, è bene che i termini relativi alle molle abbiano il segno meno. A questo punto per convincersi che nella prima equazione ci va $-k_3(x_1 - x_2)$ basta osservare che una formula generale deve necessariamente valere anche in casi particolari, come $x_2 = 0$. Analogo ragionamento per la seconda equazione.

Il metodo appena esposto è quello che ci sentiamo di consigliare. Usare sempre lo stesso metodo velocizza l'analisi e riduce gli errori.

1.2 Coordinate y_1 e y_2

Le coordinate y_1 e y_2 sono anche loro equiverse. Quindi

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -k_1 y_1 - k_3(y_1 - y_2) \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -k_2 y_2 - k_3(y_2 - y_1) \end{aligned} \tag{2}$$

Nessuna differenza rispetto al caso precedente.

1.3 Coordinate x_1 e y_2

Scegliere x_1 e y_2 è esteticamente poco raccomandabile (non sono equiverse). Ma legittimo

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 - k_3(x_1 + y_2) \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -k_2 y_2 - k_3(y_2 + x_1) \end{aligned} \tag{3}$$

La molla centrale sente la *somma* algebrica delle due coordinate.

Ovviamente, si ottiene lo stesso risultato di (3) con la sostituzione $x_2 = -y_2$ in (1). Farlo come esercizio.