Freno a Ceppo Simmetrico

Massimo Guiggiani

2 marzo 2022

Sommario

Un altro problema con attrito che richiede l'ipotesi di Reye (Reye–Archard–Khrushchov wear law). Cruciale la definizione di direzione di accostamento.

Freno a ceppo simmetrico

Sono noti (Fig. 1):

- dimensioni a, b ed r;
- lo spessore c del ceppo (non indicato in figura);
- coefficiente di attrito f;
- velocità angolare ω;
- forza F.

Si vuole calcolare il momento frenante M_f agente sul cilindro.

Direzione di accostamento e tasso di usura

Come prima cosa si può determinare l'andamento del tasso di usura radiale sul ceppo, supponendo nulla l'usura del cilindro. Si utilizzano coordinate polari (r, θ) (Fig. 1).

A causa dell'usura, il generico punto Q di contatto del ceppo ha velocità

$$\mathbf{V}_Q = \Omega\mathbf{k} \times AQ = \Omega\mathbf{k} \times (AO + OQ) = \mathbf{V}_a + \mathbf{V}_c \tag{1}$$

data dalla somma della velocità di accostamento $\mathbf{V}_a$ e della velocità circonferenziale $\mathbf{V}_c$, quest'ultima tangente al cilindro.

La *velocità di accostamento*, diretta ortogonalmente al segmento OA

$$\mathbf{V}_a = -\Omega a\mathbf{j} \tag{2}$$

è *uguale* per tutti i punti di contatto.

La velocità di accostamento ha una *componente radiale*

$$V_r = \Omega a \cos(\theta) \tag{3}$$

che rappresenta precisamente il cercato *tasso di usura* $h'(\theta, t)$, e una componente tangenziale

$$V_t = \Omega a \sin(\theta) \tag{4}$$

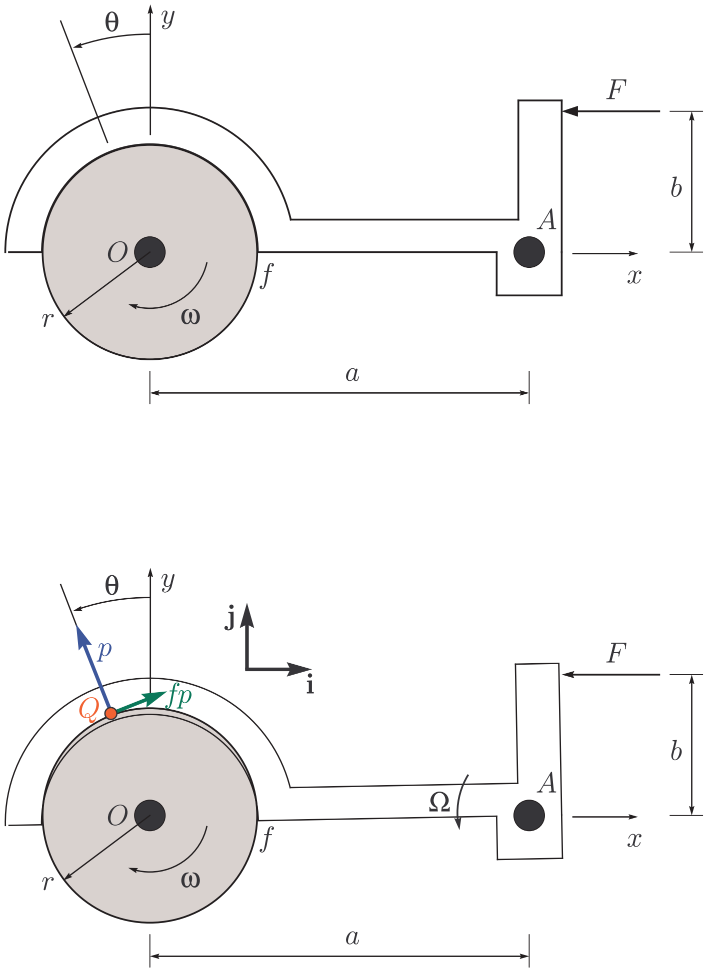

Figura 1: Schema di un freno a ceppo simmetrico

tangente al cilindro.

La componente tangenziale $V_t = \Omega a \sin(\theta)$ e la velocità circonferenziale $V_c = \Omega r$ sono piccolissime, e quindi del tutto trascurabili, rispetto alla macroscopica velocità di strisciamento $V_s = \omega r$. Infatti $|\omega| \gg |\Omega|$.

Come al solito, è ragionevole supporre che il tasso di usura $h'(\theta, t)$ sia proporzionale alla pressione di contatto p, alla velocità di strisciamento V_s e al coefficiente di attrito f

$$h'(t) = kfpV_s = \Omega(t) a \cos(\theta) \tag{5}$$

Questa formula è nota come ipotesi di Reye (Reye–Archard–Khrushchov wear law). Il coefficiente di usura k dipende dal materiale. Materiali duri hanno k basso.

In definitiva, dalla (5), con k, f e V_s non dipendenti da θ, si ottiene il fondamentale risultato

$$p(\theta, t) = p_0(t) \cos(\theta) \tag{6}$$

con $p(0,t) = p_0(t)$, pressione massima, ancora incognita. Ovviamente θ non va preso a caso. Deve valere zero alla direzione di accostamento, come in Fig. 1.

Momento frenante

Si procede a calcolare la risultante $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$ di tutte le azioni elementari di pressione e di attrito agenti sul ceppo (Fig. 1).

Sfruttando le simmetrie del problema in esame, si ottengono

$$R_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} cp_0 \cos(\theta)\cos(\theta) r d\theta = cp_0 r\pi/2 \tag{7}$$

e

$$R_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} cfp_0 \cos(\theta)\cos(\theta) r d\theta = fR_y \tag{8}$$

Analogamente, il momento frenante M_f rispetto al punto O vale

$$M_f = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} cfp_0 \cos(\theta) r^2 d\theta = 2cfp_0 r^2 > 0 \tag{9}$$

con $M_O = -M_f$, dato che ω è in *senso orario* ($\omega < 0$). Si noti la differenza fra M_O, momento con segno rispetto a O, e il momento frenante M_f, positivo per definizione qualunque sia il verso di ω.

Quindi, l'effetto globale di tutte le azioni elementari di pressione e di attrito è una forza $\mathbf{R}$ applicata in O, più un momento di trasporto

$$\mathbf{M}_O = M_O\mathbf{k} = \frac{\omega}{|\omega|} M_f \mathbf{k} \tag{10}$$

Adesso si può imporre l'equilibrio alla rotazione rispetto al punto A del ceppo

$$Fb - R_y a - M_f = 0 \tag{11}$$

che risolta fornisce il valore di p_0

$$p_0 = \frac{2b}{cr(4fr + a\pi)} F \tag{12}$$

Se il cilindro girasse alla rovescia, cioè in *senso antiorario*, avremmo

$$Fb - \tilde{R}_y a + \tilde{M}_f = 0 \tag{13}$$

con $\tilde{p}_0$

$$\tilde{p}_0 = \frac{2b}{cr(4fr - a\pi)} F \tag{14}$$

L'azione frenante è più intensa ($\tilde{p}_0 > p_0$), fino ad arrivare al caso in cui il denominatore si può annullare (effetto autofrenante).

Dalla (6) si evince che non conviene fare un freno come in Fig. 1. Meglio, ad esempio, avere $-\pi/4 < \theta < \pi/4$. Si risparmia materiale e l'effetto frenante è molto simile. Si invita il lettore a svolgere i calcoli per fare un confronto quantitativo.

Restano da discutere il caso del ceppo asimmetrico e il caso del ceppo flottante. Entrambi verranno trattati prossimamente.