

Lubrificazione

Massimo Guiggiani

4 marzo 2024

Sommario

Dalle equazioni di Navier–Stokes all’equazione di Reynolds (in forma generale).

1 Approccio euleriano

Con riferimento alla Fig. 1, siano (V_1, V_2, V_3) le tre componenti cartesiane del vettore $\mathbf{V}(x_1, x_2, x_3, t)$, velocità del liquido nel punto di coordinate (x_1, x_2, x_3) , all’istante t . Come si vede, in fluidodinamica è conveniente l’approccio euleriano: si osserva cosa accade in ogni punto dello spazio, invece di seguire il moto di ogni particella, come vorrebbe l’approccio lagrangiano.

Applicato alle automobili, l’approccio lagrangiano è quello del guidatore, che in ogni istante conosce la velocità della propria autovettura. L’approccio euleriano è quello dell’autovelox, che misura la velocità che ogni automobile ha in un determinato punto della strada.

2 Equazione di continuità

Dato che i liquidi sono incompressibili, la quantità di liquido contenuta nell’elemento infinitesimo di volume (Fig. 1) deve essere costante. Pertanto si ha

$$\begin{aligned} & V_1 dx_2 dx_3 - \left(V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \\ & + V_2 dx_3 dx_1 - \left(V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_3 dx_1 \\ & + V_3 dx_1 dx_2 - \left(V_3 + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

che semplificata fornisce l’equazione di continuità

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0 \quad (2)$$

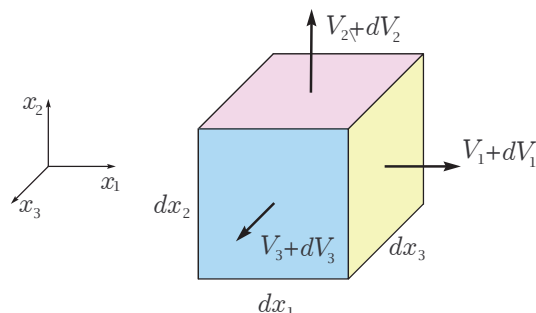


Figura 1: Elemento infinitesimo di volume e velocità del liquido

2.1 Notazioni diverse per l'equazione di continuità

L'equazione di continuità (2) può essere riscritta usando vari tipi di notazione.

Questa è la più ovvia

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

Ma ce ne sono di più compatte

$$\begin{aligned} V_{i,i} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

dove l'operatore nabla, in coordinate cartesiane, è definito così

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad (5)$$

La prima formula in (4) utilizza la notazione di Einstein: la sommatoria si intende effettuata rispetto agli indici ripetuti e la virgola indica la derivata parziale. La seconda formula è molto generale: l'operatore divergenza può essere definito anche per altri sistemi di coordinate. La terza formula usa l'operatore nabla (o di Hamilton). Con esso è facile definire anche gli operatori gradiente e rotore.

Per inciso si ricorda che il gradiente mappa uno scalare in un vettore, la divergenza mappa un vettore in uno scalare e il rotore mappa un vettore in un vettore.

Nel seguito si fa uso della notazione di Einstein.

3 Equazioni indefinite di equilibrio di Cauchy

Nella meccanica dei continui (liquidi o solidi) non polari valgono le equazioni di equilibrio di Cauchy, che di fatto definiscono il *tensore di tensione*, di componenti cartesiane σ_{ij} .

Nel caso dinamico, trascurando la forza peso, si ha (forza uguale massa per accelerazione)

$$\sigma_{ij,i} = \rho \frac{dV_j}{dt} \quad (6)$$

dove ρ è la densità del liquido e dV_j/dt è l'accelerazione assoluta (alla Lagrange). Anche in questo caso si intende eseguita la sommatoria rispetto all'indice ripetuto i . Invece j marca l'equazione, nel senso che c'è un'equazione con $j = 1$, un'altra con $j = 2$ e ancora una con $j = 3$.

4 Accelerazione nell'approccio euleriano

L'accelerazione assoluta può essere espressa nel modo seguente

$$\frac{dV_j}{dt} = \frac{\partial V_j}{\partial t} + \frac{\partial V_j}{\partial x_1} V_1 + \frac{\partial V_j}{\partial x_2} V_2 + \frac{\partial V_j}{\partial x_3} V_3 \quad (7)$$

ovvero, con la notazione di Einstein (sommatoria implicita rispetto all'indice ripetuto i).

$$\frac{dV_j}{dt} = V_{j,t} + V_{j,i} V_i \quad (8)$$

Se il flusso è stazionario, $V_{j,t} = 0$, ma ciò non rende necessariamente nulla l'accelerazione delle particelle di fluido. Resta infatti il termine detto convettivo.

5 Pressione idrostatica e deviatore di tensione

Nel caso dei liquidi è conveniente definire la *pressione idrostatica* p

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (9)$$

positiva se di compressione (per questo motivo c'è il segno meno).

Una volta definita la pressione idrostatica, dal tensore di tensione si può estrarre il *deviatore di tensione* s_{ij}

$$s_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij} p \quad (10)$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker. La motivazione è che la pressione idrostatica, come dice il nome stesso, non ha influenza sul moto del liquido. Quindi, il liquido "sente" il deviatore di tensione. Ovviamente $\sigma_{ij} = s_{ij}$ se $i \neq j$.

6 Equazioni costitutive dei liquidi newtoniani

Come postulato da Newton e poi confermato dall'esperienza, acqua e olio (e anche aria e molti altri fluidi) si comportano in accordo con le seguenti equazioni costitutive

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + \mu(V_{i,j} + V_{j,i}) \quad (11)$$

dove μ è la viscosità dinamica. Si parla quindi di *fluidi newtoniani*. Le tensioni sono legate linearmente ai gradienti di velocità.

Un'altra importante caratteristica dei fluidi newtoniani è che si *attaccano alle pareti solide*. Ossia, la velocità delle particelle di fluido è la stessa del solido con cui sono in contatto.

7 Equazioni di Navier–Stokes

Tutte le equazioni necessarie e sufficienti per studiare la fluidodinamica di un liquido sono state ottenute. Adesso si possono combinare per arrivare alle equazioni del moto.

Come primo passo si combinano (6) e (11)

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,i} &= -p_{,j} + \mu(V_{i,ji} + V_{j,ii}) \\ &= -p_{,j} + \mu[(V_{i,i})_{,j} + V_{j,ii}] \\ &= -p_{,j} + \mu V_{j,ii}\end{aligned}\tag{12}$$

dove l'ultimo risultato impiega l'equazione di continuità (4) (primo rigo).

La (6) diventa

$$\rho \frac{dV_j}{dt} = \rho(V_{j,t} + V_{j,i}V_i) = -p_{,j} + \mu V_{j,ii}\tag{13}$$

che sono le celeberrime *equazioni di Navier–Stokes*.

Ad esempio, in forma estesa l'equazione di Navier–Stokes per $j = 1$ è

$$\rho \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} V_2 + \frac{\partial V_1}{\partial x_3} V_3 \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2} \right)\tag{14}$$

Le equazioni di Navier–Stokes, unitamente all'equazione di continuità, formano un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali nelle funzioni incognite (p, V_1, V_2, V_3).

Interessanti approfondimenti sono riportati su Wikipedia

https://en.wikipedia.org/wiki/Navier-Stokes_equations

In particolare: "Despite their wide range of practical uses, it has not yet been proven whether smooth solutions always exist in three dimensions. This is called the Navier–Stokes existence and smoothness problem. The Clay Mathematics Institute has called this one of the seven most important open problems in mathematics and has offered a US\$ 1 million prize for a solution or a counterexample."

8 Lubrificazione fluidodinamica

Vista la "intrattabilità" delle equazioni di Navier–Stokes nella forma generale, si è "costretti" spesso a semplificarle sotto opportune ipotesi.

8.1 Ipotesi semplificative

Nel caso della lubrificazione (thin film lubrication), si hanno tre ipotesi fondamentali¹:

1. viscosità μ costante;
2. effetti inerziali trascurabili rispetto alle azioni viscosive;

¹Szeri, A. Z. (2010), Fluid Film Lubrication, Cambridge University Press

3. meato, ossia il dominio occupato dal liquido, molto stretto rispetto alle altre due dimensioni, come schematicamente mostrato in Fig. 2. Anzi, un vero meato è molto più stretto. Tanto per avere un'idea delle dimensioni relative, se il meato avesse lo spessore come il diametro di un pallone da calcio, le altre due dimensioni dovrebbero essere comparabili all'estensione di un campo da calcio. In termini più precisi, il rapporto fra spessore e estensione è dell'ordine di 10^{-3} .

A ben vedere, la seconda e la terza ipotesi sono strettamente collegate fra loro. Un meato sottilissimo crea fortissimi gradienti di velocità. Ne consegue che le azioni viscosive prevalgono su quelle inerziali (basso numero di Reynolds).

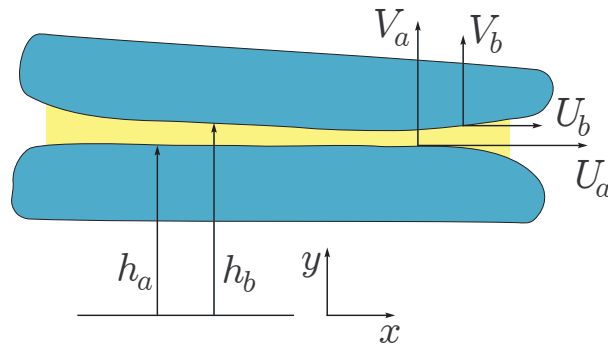


Figura 2: Meato

La terza ipotesi ci induce a definire un sistema di riferimento con un asse "abbastanza" ortogonale al meato (Fig. 2).

Nella lubrificazione, il formalismo utilizzato per ottenere le equazioni di Navier–Stokes viene solitamente sostituito da uno più tradizionale. Le coordinate (x_1, x_2, x_3) diventano (x, y, z) , e le componenti del vettore velocità passano da (V_1, V_2, V_3) a (u, v, w) .

In Fig. 2, l'asse y è quello "abbastanza" ortogonale al meato. L'asse z non è indicato, ma ha la definizione usuale.

Stante lo spessore sottilissimo del meato, si può assumere che la pressione idrostatica p sia costante nello spessore del meato. Inoltre, sempre in base alle ipotesi formulate, si ha una fortissima semplificazione delle equazioni di Navier–Stokes, che diventano

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \tag{15}$$

Con la notazione tradizionale, l'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{16}$$

8.2 Andamento delle velocità nel meato

In Fig. 2 sono definite:

1. la forma $h_a(x, z)$ della superficie inferiore e la forma $h_b(x, z)$ della superficie superiore (non necessariamente rigide). Spesso entrambe le forme non dipendono da z ;
2. le componenti $U_a(x, z)$, $V_a(x, z)$, $W_a(x, z)$, $U_b(x, z)$, $V_b(x, z)$ e $W_b(x, z)$ delle velocità di ciascun punto delle superfici del meato. Anche per le componenti delle velocità delle superfici di solito non dipendono da z . Inoltre, molto spesso $W_a = W_b = 0$.

La seconda equazione in (15) implica $p = p(x, z)$. Quindi, dato che p non dipende da y , si può integrare due volte rispetto a y la prima equazione in (15), ottenendo (Fig. 3)

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y - h_a)(h_b - y) + \left(\frac{h_b - y}{h_b - h_a} \right) U_a + \left(\frac{y - h_a}{h_b - h_a} \right) U_b \quad (17)$$

dove si sono imposte le condizioni al contorno $u(x, h_a, z) = U_a(x, z)$ e $u(x, h_b, z) = U_b(x, z)$ (Fig. 2).

Come illustrato in Fig. 3, si ha un andamento lineare con sovrapposto un andamento parabolico. Al momento la $p(x, z)$ non è nota e quindi non sono note neanche le sue derivate. Però si sa che le velocità dipendono da un effetto trascinamento (contributo lineare), dovuto al moto delle pareti, e da un effetto spinta (contributo parabolico), dovuto al gradiente di pressione (Fig. 3).

Per esercizio si analizzino alcuni casi particolari:

- $U_b = 0$;
- $U_b = U_a$;
- $U_b = -U_a$.

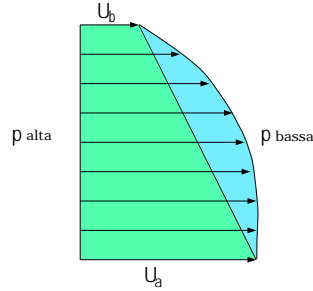


Figura 3: Profilo della velocità u se $\partial p / \partial x < 0$

Con le posizioni $y = \tilde{y} + h_a$ e $h = h_b - h_a$, la (17) diventa

$$\tilde{u}(x, \tilde{y}, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \tilde{y}(\tilde{y} - h) + (U_b - U_a) \frac{\tilde{y}}{h} + U_a \quad (18)$$

Si procede in maniera del tutto analoga con la terza equazione in (15).

Invece, per quanto riguarda la componente v si ha che $v(x, h_a, z) = V_a(x, z)$ e $v(x, h_b, z) = V_b(x, z)$ (Fig. 2).

8.3 Equazione di continuità in forma mediata

Invece di pretendere che l'equazione di continuità

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

valga puntualmente, ci si accontenta di verificarla in forma mediata, ossia

$$\int_{h_a(x,z)}^{h_b(x,z)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy = 0 \quad (20)$$

Ovviamente, la (19) implica la (20), ma non viceversa. Si tratta di un'approssimazione, ma è irrinunciabile per i successivi sviluppi.

Per iniziare si considera il termine più facile

$$\int_{h_a(x,z)}^{h_b(x,z)} \frac{\partial v}{\partial y} dy = v(x, h_b(x, z), z) - v(x, h_a(x, z), z) = V_b(x, z) - V_a(x, z) \quad (21)$$

Prima di procedere con gli altri termini, si ricorda il Teorema di Leibniz

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dy + f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) \quad (22)$$

Con questo teorema si può affrontare il calcolo del primo termine nell'equazione di continuità mediata

$$\int_{h_a(x,z)}^{h_b(x,z)} \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_a}^{h_b} u(x, y, z) dy - U_b(x, z) \frac{\partial h_b}{\partial x} + U_a(x, z) \frac{\partial h_a}{\partial x} \quad (23)$$

Tenendo conto della (17), ossia del fatto che si conosce l'andamento in y della u , si ha

$$\int_{h_a}^{h_b} u(x, y, z) dy = -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (h_b - h_a)^3 + \left(\frac{U_a + U_b}{2} \right) (h_b - h_a) \quad (24)$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_a}^{h_b} u(x, y, z) dy &= -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} (h_b - h_a)^3 \right) \\ &+ \left(\frac{U_a + U_b}{2} \right) \left(\frac{\partial h_b}{\partial x} - \frac{\partial h_a}{\partial x} \right) + \left(\frac{h_b - h_a}{2} \right) \left(\frac{\partial U_a}{\partial x} + \frac{\partial U_b}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Inserendo questo risultato in (23) si ottiene l'importante relazione

$$\begin{aligned} \int_{h_a}^{h_b} \frac{\partial u}{\partial x} dy &= -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left((h_b - h_a)^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ &+ \left(\frac{U_a + U_b}{2} \right) \left(\frac{\partial h_b}{\partial x} - \frac{\partial h_a}{\partial x} \right) + \left(\frac{h_b - h_a}{2} \right) \left(\frac{\partial U_a}{\partial x} + \frac{\partial U_b}{\partial x} \right) \\ &- U_b(x, z) \frac{\partial h_b}{\partial x} + U_a(x, z) \frac{\partial h_a}{\partial x} \end{aligned} \quad (26)$$

Resta da trattare l'ultimo termine nell'equazione di continuità mediata. Il procedimento è identico a quello seguito per il primo termine

$$\begin{aligned} \int_{h_a}^{h_b} \frac{\partial w}{\partial z} dy &= -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left((h_b - h_a)^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ &+ \left(\frac{W_a + W_b}{2} \right) \left(\frac{\partial h_b}{\partial z} - \frac{\partial h_a}{\partial z} \right) + \left(\frac{h_b - h_a}{2} \right) \left(\frac{\partial W_a}{\partial z} + \frac{\partial W_b}{\partial z} \right) \\ &- W_b(x, z) \frac{\partial h_b}{\partial z} + W_a(x, z) \frac{\partial h_a}{\partial z} \end{aligned} \quad (27)$$

8.4 Equazione di Reynolds

A questo punto il lavoro è quasi concluso. Basta inserire le (21), (26) e (27) nell'equazione di continuità mediata (20) e riordinare un po', per ottenere la celeberrima *equazione di Reynolds*²

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left((h_b - h_a)^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + (h_b - h_a)^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ = 6\mu \left[(U_a - U_b) \left(\frac{\partial h_b}{\partial x} + \frac{\partial h_a}{\partial x} \right) + (h_b - h_a) \left(\frac{\partial U_a}{\partial x} + \frac{\partial U_b}{\partial x} \right) \right] \\ + 12\mu(V_b - V_a) \end{aligned} \quad (28)$$

in cui, come quasi sempre accade, si è assunto $h_a(x)$, $h_b(x)$ e $W_a = W_b = 0$. Sono dati del problema l'altezza del meato e la cinematica delle pareti inferiore e superiore.

Si tratta di un'equazione alle derivate parziali, del secondo ordine, lineare, di tipo ellittico, a coefficienti non costanti, non omogenea, nella sola funzione incognita $p(x, z)$. Una notevole semplificazione rispetto alla formulazione generale con Navier–Stokes.

9 Come applicare l'equazione di Reynolds

L'applicazione dell'equazione di Reynolds richiede qualche accortezza teorica, come illustrato negli esempi che seguono.

9.1 Il caso più facile (e più classico)

Come mostrato in Fig. 4, si ha $h_a = 0$, $U_b = 0$, $V_a = V_b = 0$. Il sistema di riferimento è solidale alla superficie superiore del meato. Per avere capacità portante con $U_a > 0$, occorre che $dh_b/dx < 0$ (meato convergente).

L'equazione di Reynolds diventa

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h_b^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + h_b^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 6\mu U_a \frac{dh_b}{dx} \quad (29)$$

²Reynolds, O. (1886), On the theory of lubrication and its application to Mr. Tower's experiments, Philos. Trans. Roy. Soc., 177, 159–209

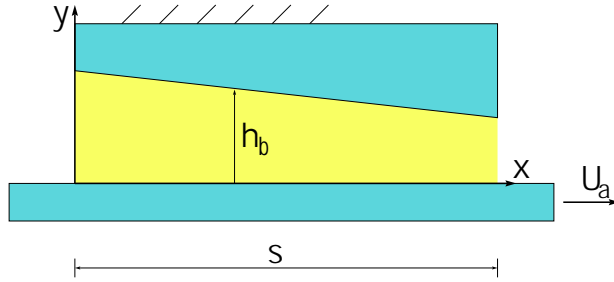


Figura 4: Meato base

9.2 Rulli

Si consideri il caso di Fig. 5, in cui il meato è limitato da due rulli di raggio r , con r grande rispetto all'estensione del meato. Siano $\omega_a < 0$ e $\omega_b > 0$ le velocità angolari, opposte in segno.

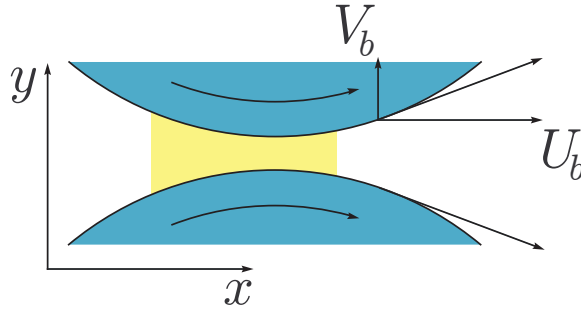


Figura 5: Meato fra rulli

Nel termine noto dell'equazione di Reynolds si ha

- $U_a \simeq -\omega_a r$;
- $U_b \simeq \omega_b r$;
- $V_a \simeq U_a dh_a/dx$;
- $V_b \simeq U_b dh_b/dx$;

Come si evince dal confronto di (26) e (28), si ha

$$\left(\frac{U_a + U_b}{2}\right) \left(\frac{dh_b}{dx} - \frac{dh_a}{dx}\right) - U_b \frac{dh_b}{dx} + U_a \frac{dh_a}{dx} = \left(\frac{U_a - U_b}{2}\right) \left(\frac{dh_b}{dx} + \frac{dh_a}{dx}\right) \quad (30)$$

che porta alla seguente espressione dell'equazione di Reynolds

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((h_b - h_a)^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + (h_b - h_a)^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu (U_a + U_b) \left(\frac{\partial h_b}{\partial x} - \frac{\partial h_a}{\partial x} \right) \quad (31)$$

Il termine $U_a + U_b$ è spesso chiamato *entraining velocity*. Si noti come in questo caso per avere elevata entraining velocity occorra che entrambi i rulli spingano il lubrificante dalla stessa parte.

10 Problemi piani

Per avere un problema piano è necessario un meato cilindrico di larghezza infinita. Ovviamente non è realistico. Però la matematica è estremamente più semplice del caso tridimensionale e si possono comunque capire alcuni fenomeni.

In verità, la (29) è un'equazione differenziale alle derivate parziali nell'incognita $p(x, z)$. Quindi, a rigore, è un problema 2D. Nel caso di meato di larghezza infinita la coordinata z sparisce e la (29) diventa un'equazione differenziale ordinaria nell'incognita $p(x)$

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) = 6\mu U_a \frac{dh}{dx} \quad (32)$$

con $h = h(x)$.

Integrando una prima volta rispetto a x si ottiene

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu U_a}{h(x)^2} + \frac{C_1}{h(x)^3} = 6\mu U_a \left(\frac{1}{h(x)^2} - \frac{\hat{h}}{h(x)^3} \right) \quad (33)$$

Integrando una seconda volta si ha

$$p(x) = p(0) + 6\mu U_a \left(\int_0^x \frac{dx}{h(x)^2} - \hat{h} \int_0^x \frac{dx}{h(x)^3} \right) \quad (34)$$

Con la condizione al contorno $p(s) = p(0)$ si ottiene

$$p(s) = p(0) = p(0) + 6\mu U_a \left(\int_0^s \frac{dx}{h(x)^2} - \hat{h} \int_0^s \frac{dx}{h(x)^3} \right) \quad (35)$$

da cui

$$\hat{h} = \frac{\int_0^s \frac{dx}{h(x)^2}}{\int_0^s \frac{dx}{h(x)^3}} \quad (36)$$

che rappresenta l'altezza del meato in cui si ha $dp/dx = 0$.

In Fig. 6 viene mostrato il tipico andamento della pressione in un pattino lineare. Di conseguenza, a causa del segno del gradiente di pressione e per avere portata costante, i profili di velocità sono come in Fig. 7.

L'effetto di un'eventuale bombatura è illustrato in Fig. 8.

I pattini possono anche avere profili discontinui, come in Fig. 9, o profili continui, ma con derivata discontinua, come in Fig. 10. Si osservi come il grado di discontinuità del meato influenzi il grado di discontinuità del profilo di pressione.

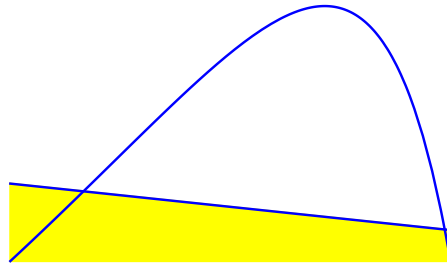


Figura 6: Andamento della pressione nel caso di meato con profilo rettilineo

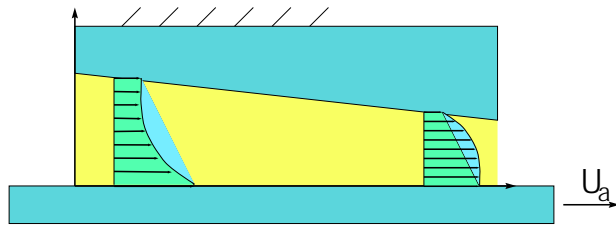


Figura 7: Tipici profili di velocità nel meato

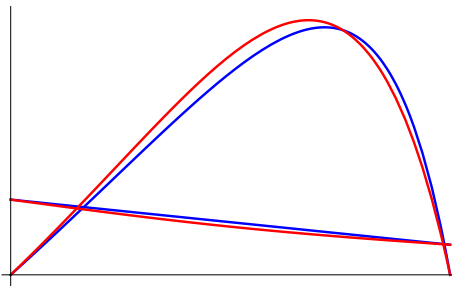


Figura 8: Effetto sulla pressione della bombatura nel profilo del pattino

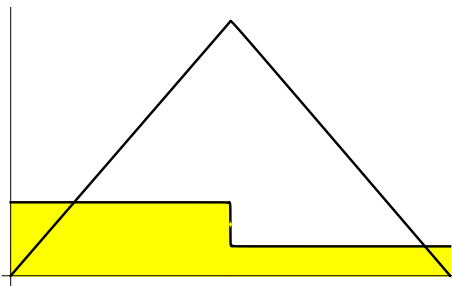


Figura 9: Pattino a gradino e corrispondente andamento della pressione

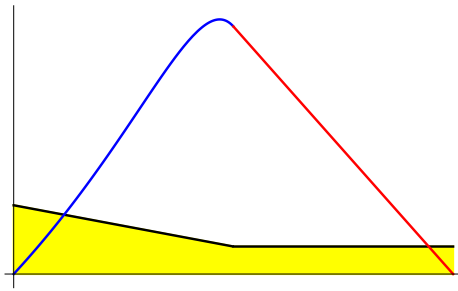


Figura 10: Perché in questo caso la pressione deve essere una funzione con derivata continua?