Sulle Equazioni del Moto

Massimo Guiggiani

4 aprile 2022

Sommario

Dove si illustrano metodi differenti per ottenere le stesse equazioni del moto.

1 Masse e molle

Si utilizzano le coordinate assolute x_1 e x_2 di Fig. 1. Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 - k_3(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2x_2 - k_3(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{1}$$

Per ottenerle si è considerata *una molla alla volta*, sfruttando il fatto che le rigidezze sono chiaramente distinguibili.

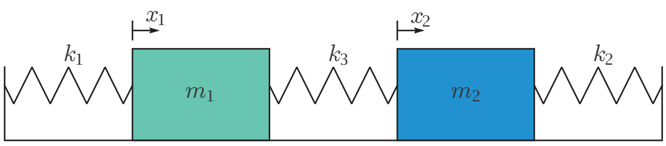

Figura 1: Masse traslanti collegate da molle

2 Trave a sbalzo

Si consideri una trave elastica, come in Fig. 2. La trave ha lunghezza l, rigidezza EI ed è priva di massa. All'estremità libera è fissato un corpo rigido di massa m e momento d'inerzia baricentrico pari a J. Quindi il sistema ha due gradi di libertà.

Per ottenere le equazioni del moto si possono utilizzare i *coefficienti di influenza*. Se si applica una carico esploratore F come in Fig. 2, si ha

$$z_F = F\frac{l^3}{3EI} \qquad \text{e} \qquad \theta_F = F\frac{l^2}{2EI} \tag{2}$$

Analogamente, applicando all'estremità non vincolata un momento esploratore M, si ha

$$z_M = M\frac{l^2}{2EI} \qquad \text{e} \qquad \theta_M = M\frac{l}{EI} \tag{3}$$

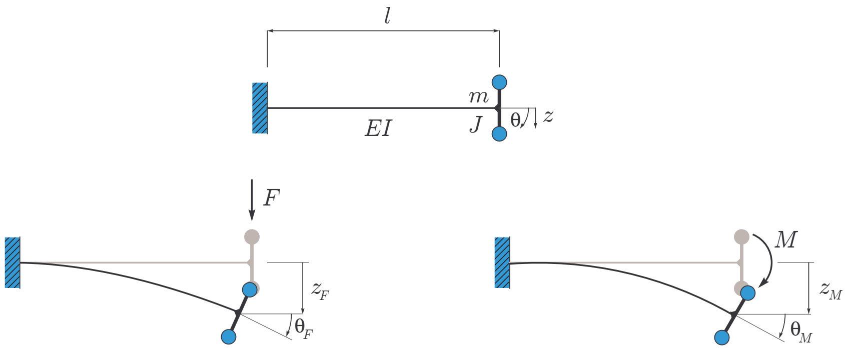

Figura 2: Trave a sbalzo con masse all'estremità

In accordo con il teorema di reciprocità di Betti, si ha $\theta_F/F = z_M/M$.

In dinamica ci sono, contemporaneamente, la forza d'inerzia $F = -m\ddot{z}$ e la coppia d'inerzia $M = -J\ddot{\theta}$. Sovrapponendo gli effetti si ottengono le equazioni del moto

$$\begin{aligned} z = z_F + z_M = -m\ddot{z}\frac{l^3}{3EI} - J\ddot{\theta}\frac{l^2}{2EI} \\ \theta = \theta_F + \theta_M = -m\ddot{z}\frac{l^2}{2EI} - J\ddot{\theta}\frac{l}{EI} \end{aligned} \tag{4}$$

Per ottenerle si è considerata *una forza/momento alla volta*, sfruttando la conoscenza dei coefficienti di influenza. Infatti, a prima vista le singole rigidezze non sono distinguibili.

3 Primo commento

In ciascuno dei due casi precedenti si è seguita quella che è parsa la via più semplice e intuitiva. E ciò è giusto e ragionevole.

Ma a questo punto è forte la tentazione di risolvere il primo problema con la tecnica usata per il secondo e viceversa, soprattutto per capire perché ci sembrano due problemi così diversi, perché ci è venuto "naturale" usare tecniche così diverse.

4 Matrici di massa e di rigidezza

Un po' di algebra lineare ci può aiutare a capire meglio la problematica.

Come ben noto, ogni caso di vibrazioni libere non smorzate di un sistema lineare ha la seguente struttura matematica

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} \tag{5}$$

dove $\boldsymbol{u}$ è il vettore delle coordinate, $\boldsymbol{M}$ è la matrice di massa e $\boldsymbol{K}$ è la matrice di rigidezza.

È immediato ottenere queste altre due forme

$$\ddot{\boldsymbol{u}} = -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{A}^{-1}\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{7}$$

dove $\boldsymbol{A}$ è la matrice dinamica.

4.1 Masse e molle

Nel caso (1) si ha

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Da cui

$$-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -\dfrac{k_1 + k_3}{m_1} & \dfrac{k_3}{m_1} \\ \dfrac{k_3}{m_2} & -\dfrac{k_2 + k_3}{m_2} \end{bmatrix} \tag{9}$$

e

$$-\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -\dfrac{m_1(k_2 + k_3)}{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1} & -\dfrac{m_2k_3}{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1} \\ -\dfrac{m_1k_3}{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1} & -\dfrac{m_2(k_1 + k_3)}{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

4.2 Trave a sbalzo

Nel caso (4) si ha

$$-\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -m\dfrac{l^3}{3EI} & -J\dfrac{l^2}{2EI} \\ -m\dfrac{l^2}{2EI} & -J\dfrac{l}{EI} \end{bmatrix} \tag{11}$$

da cui

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{l^3}{3EI} & \dfrac{l^2}{2EI} \\ \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l}{EI} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{12EI}{l^3} & -\dfrac{6EI}{l^2} \\ -\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{12}$$

e infine

$$-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{12EI}{ml^3} & -\dfrac{6EI}{ml^2} \\ -\dfrac{6EI}{Jl^2} & \dfrac{4EI}{Jl} \end{bmatrix} \tag{13}$$

5 Significato fisico

5.1 Una molla alla volta

Si è già detto che la (1) è un esempio di cosa si ottenga prendendo in esame una molla alla volta. Si tratta di una tecnica molto comune e comoda se le molle sono elementi ben individuabili.

5.2 Uno spostamento alla volta

Per ottenere immediatamente la matrice di rigidezza $\boldsymbol{K}$ in (8), senza dover prima scrivere le (1), basta considerare una coordinata alla volta.

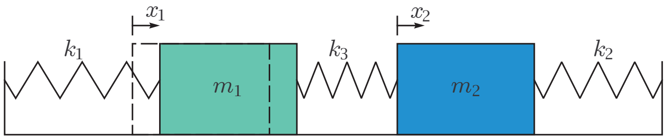

Figura 3: Una coordinata alla volta ($x_1 \neq 0$, $x_2 = 0$)

Ad esempio, in Fig. 3 si è imposto solo uno spostamento x_1. È evidente che la massa m_1 riceve una forza di richiamo proporzionale a $k_1 + k_3$, mentre la massa m_2 riceve una forza di sbandamento proporzionale a k_3. Pertanto si ha $k_{11} = k_1 + k_3$ e $k_{21} = -k_3$. Analogamente, imponendo solo x_2 si ottengono $k_{12} = -k_3$ e $k_{22} = k_2 + k_3$. In questo modo si ottengono subito le componenti della matrice di rigidezza $\boldsymbol{K}$, come ovvio attendersi dato che si sta esattamente impiegando la sua definizione.

5.3 Una forza alla volta

Per ottenere direttamente la forma (10), senza passaggi preliminari, basta applicare una forza statica alla volta.

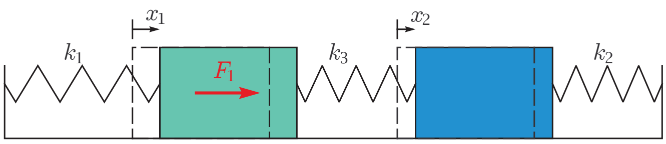

Figura 4: Una forza alla volta

Applicando una forza statica F_1 al corpo 1, come in Fig. 4, si ha uno spostamento x_1 e anche uno spostamento x_2. Per trovare x_1, si può per prima cosa osservare che per il corpo 1 le molle k_3 e k_2 sono fra loro in serie, e quindi equivalenti alla rigidezza $\hat{k}_3 = k_3 k_2/(k_3 + k_2)$. Subito dopo si può notare che k_1 e $\hat{k}_3$ sono fra loro in parallelo, e quindi equivalenti alla rigidezza $\hat{k}_1 = k_1 + \hat{k}_3$. Lo spostamento normalizzato $x_1/F_1 = 1/\hat{k}_1 = (k_2 + k_3)/(k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1)$, è esattamente la prima componente di $\boldsymbol{K}^{-1}$ in (10).

Per trovare x_2/F_1 (Fig. 4) basta osservare che $(x_1 - x_2)k_3 = x_2 k_2$, da cui $x_2 = x_1 k_3/(k_3 + k_2)$. Il risultato è quanto riportato fuori dalla diagonale principale in (10).

La tecnica di una forza alla volta è quella che si è utilizzata quando si sono introdotti i coefficienti di influenza per la trave a sbalzo.