Freno a Nastro

Massimo Guiggiani

14 marzo 2022

Sommario

Un problema in cui si frena usando un elemento flessibile.

1 Freno a nastro

Sono noti (Fig. 1):

- dimensioni c, d, r;
- angolo di avvolgimento π;
- coefficiente di attrito $f = \tan(\varphi)$
- velocità angolare ω;
- forza esterna Q.

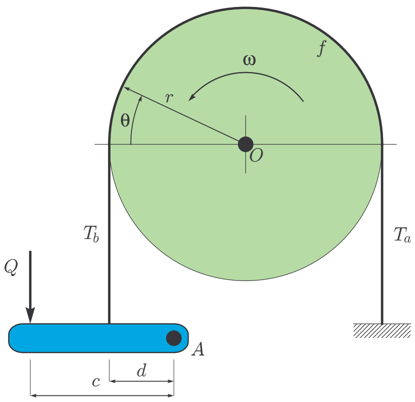

Figura 1: Freno a nastro

Si vuole calcolare il momento frenante M_O.

1.1 Equilibrio globale e locale

Si indicano con T_a e T_b le tensioni nei due tratti diritti del nastro. T_a e T_b sono per ora incognite, ma si sa per certo, a causa dell'attrito fra nastro e cilindro, che $T_a > T_b$. I pedici a e b stanno a indicare tensione alta e tensione bassa.

Si hanno le seguenti equazioni di equilibrio globale. Equazione di equilibrio alla rotazione della leva intorno al punto A

$$Qc - T_b d = 0 \tag{1}$$

e momento frenante M_O

$$M_O = T_a r - T_b r \tag{2}$$

La prima fornisce subito il valore di $T_b = Qc/d$. La seconda equazione ha due incognite (T_a e M_O).

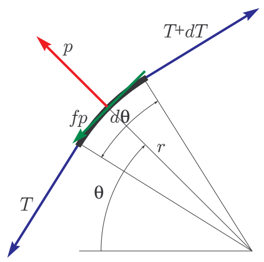

Figura 2: Equilibrio di un elemento infinitesimo di nastro

Per procedere oltre occorre un'altra equazione. Pertanto si considera l'equilibrio *radiale* e l'equilibrio *tangenziale* di un tratto infinitesimo di nastro, come illustrato in Fig. 2

$$\begin{aligned} (T + dT)\frac{d\theta}{2} + T\frac{d\theta}{2} - prd\theta = 0 \\ T + dT - T - fprd\theta = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

che si semplificano, con passaggi rigorosi, in

$$\begin{aligned} T &= pr \\ dT &= fprd\theta \end{aligned} \tag{4}$$

da cui si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{dT}{d\theta} = fT \tag{5}$$

con condizione iniziale $T(0) = T_b$.

La soluzione è

$$T(\theta) = T_b \exp(f\theta) \tag{6}$$

da cui, nel caso in esame ($0 < \theta < \pi$), si ottiene

$$T_a = T(\pi) = T_b \exp(f\pi) \tag{7}$$

Si ha quindi una crescita esponenziale della tensione nella parte a contatto con il cilindro. Se $f = 0.4$, si ha $T_a/T_b = 3.5$.

Le equazioni (4) hanno precise interpretazioni. Per avere pressione p occorre avere tensione T, e viceversa. Per avere variazione di tensione dT occorre avere attrito, oltre alla pressione.

Il momento frenante sul cilindro vale

$$M_O = (T_a - T_b)r = [\exp(f\pi) - 1]T_b r = [\exp(f\pi) - 1]rQc/d \tag{8}$$

La formula (6) è la vera novità di questa trattazione, il concetto nuovo da imparare e memorizzare, insieme alla Fig. 2. La stessa formula compare nello studio delle trasmissioni a cinghia. Comunque, mai dimenticare che si è supposto il nastro perfettamente flessibile (infatti il raggio r non compare).

1.2 Se gira al contrario

Se il cilindro girasse in senso opposto, cosa cambia? Il momento frenante è lo stesso?

Se il cilindro gira in senso orario, la tensione alta si ha nel ramo di sinistra e vale $\widetilde{T}_a = Qc/d$, cioè la T_b del caso precedente. Applicando la (6) si ha che $\widetilde{T}_b = \widetilde{T}_a \exp(-f\pi)$. Da cui $\widetilde{M}_O = [1-\exp(-f\pi)]rQc/d$, che è ovviamente minore del caso precedente. Ad esempio, con $f = 0.4$, si ha $M_O/\widetilde{M}_O = 3.5$. Questo è un risultato atteso: nel primo caso il progetto è più "furbo" perché scarica la tensione alta sul muro, anziché sulla leva di comando.

In definitiva, il rapporto T_a/T_b è sempre lo stesso, mentre la differenza $T_a - T_b$ dipende dal senso di rotazione.

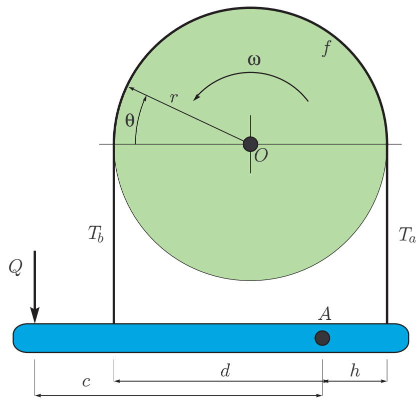

Figura 3: Freno a nastro differenziale

2 Freno a nastro differenziale

Torniamo a far girare il tamburo in senso antiorario. Come mostrato nella Fig. 3, si può collegare alla leva di attuazione il ramo di destra del nastro (quello con

T_a). Affinché, quando si aziona il freno, il nastro venga effettivamente premuto sul cilindro, occorre che sia $d > h$ (quello cha la leva toglie deve essere minore di quello che rilascia).

Chiaramente, la tensione nel nastro seguirà sempre la legge (6). Cambia invece l'equazione di equilibrio della leva

$$Qc - T_b d + T_a h = Qc - T_b[d - h \exp(f\pi)] \tag{9}$$

da cui

$$T_b = \frac{Qc}{d - h \exp(f\pi)} \tag{10}$$

Se il denominatore in (10) si annulla, si ha l'effetto autofrenante (solitamente indesiderato). Pertanto, la distanza h deve essere decisamente più corta di d.