

# Oscillazioni Non Lineari

Massimo Guiggiani

15 aprile 2022

## Sommario

Dove si analizzano sistemi vibranti non lineari conservativi.

## 1 Oscillazioni non lineari

Sono noti (Fig. 1):

- la massa puntiforme  $m$ ;
- la lunghezza  $b$ ;
- l'accelerazione di gravità  $g$ .

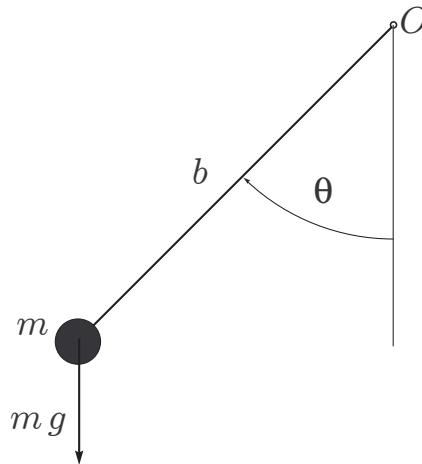


Figura 1: Pendolo semplice, ma grandi ampiezze

Si vuole studiare il moto in grande di questo sistema non lineare.

### 1.1 Equazione del moto

Equilibrio dinamico alla rotazione intorno a  $O$

$$mb^2\ddot{\theta} = -mgb\sin(\theta) \quad (1)$$

ovvero

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{b} \sin(\theta) = 0 \quad (2)$$

che è un caso particolare di

$$\ddot{\theta} + f(\theta) = 0 \quad (3)$$

cioè di un sistema conservativo (forza posizionale  $f(\theta)$ ).

Il sistema ha un punto di equilibrio  $\theta_e$ , detto anche punto singolare, se  $f(\theta_e) = 0$ .

## 1.2 Integrale primo

Si moltiplica per  $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}f(\theta) = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\theta}^2)}{dt} + \frac{d\theta}{dt} f(\theta) = 0 \quad (4)$$

da cui

$$\frac{1}{2} d(\dot{\theta}^2) = -f(\theta) d\theta \quad (5)$$

Un tale sistema ammette un integrale primo (conservazione dell'energia meccanica  $E$ )

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = E - \int_0^\theta f(\hat{\theta}) d\hat{\theta} \quad (6)$$

ovvero

$$E_c = E - E_p(\theta) \quad (7)$$

dove il valore di  $E$  viene ovviamente fissato con le condizioni iniziali  $(\theta_0, \omega_0)$

$$E = \int_0^{\theta_0} f(\hat{\theta}) d\hat{\theta} + \frac{1}{2} \omega_0^2 \quad (8)$$

Per inciso, si noti che non è corretto usare il simbolo  $\dot{\theta}_0$  al posto di  $\omega_0$  per indicare la velocità iniziale: la derivata temporale di  $\theta_0$  è zero!

La (6) permette di ottenere un legame *analitico* fra  $\dot{\theta}$  e  $\theta$ ,

$$\dot{\theta} = \sqrt{2[E - E_p(\theta)]} \quad (9)$$

che è la relazione utilizzata per tracciare le *traiettorie* nel *piano delle fasi* (phase plane).

## 1.3 Periodo

Il moto è periodico se  $\dot{\theta} = 0$  per due valori  $\theta_1$  e  $\theta_2$  di  $\theta$

$$\sqrt{2[E - E_p(\theta_i)]} = 0 \quad (10)$$

con  $\theta_1 < \theta_e < \theta_2$ .

Noti  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , ovviamente funzioni di  $E$ , si può trovare il periodo  $T$  "ribaltando" la (9)

$$T = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{2[(E - E_p(\theta))]} \quad (11)$$

## 2 Pendolo

È giunto il momento di applicare i risultati precedenti al pendolo, ovvero alla (2).

Se si vuole, ad esempio, che il periodo delle piccole oscillazioni sia 1 secondo, la lunghezza  $b$  deve verificare

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{b}} = 1 \quad (12)$$

Il risultato è  $b = 0.24849$  m.

Ma come cambia il periodo  $T$  all'aumentare dell'ampiezza di oscillazione? Si può calcolare usando la (8) con la (11). Con un'ampiezza di  $\pm 10$  gradi si ha  $T = 1.002$  s, che sale a 1.008 s se l'ampiezza vale 20 gradi. Con 40 gradi si ha  $T = 1.031$  s, per arrivare a 1.180 s con 90 gradi.

Si può anche andare oltre. Con 170 gradi si ha un periodo di 2.439 s, che diventa 3.901 s se l'ampiezza vale  $\pm 179$  gradi. Il periodo tende all'infinito se l'ampiezza tende a 180 gradi.

L'energia potenziale vale

$$E_p = \frac{g}{b} [1 - \cos(\theta)] \quad (13)$$

che inserita nella (9), unitamente al valore di  $E$ , fornisce il legame fra  $\theta(t)$  e  $\dot{\theta}(t)$ . Si può quindi procedere, per vari valori di  $E$  a tracciare alcune traiettorie nel piano delle fasi, come illustrato in Fig. 2.

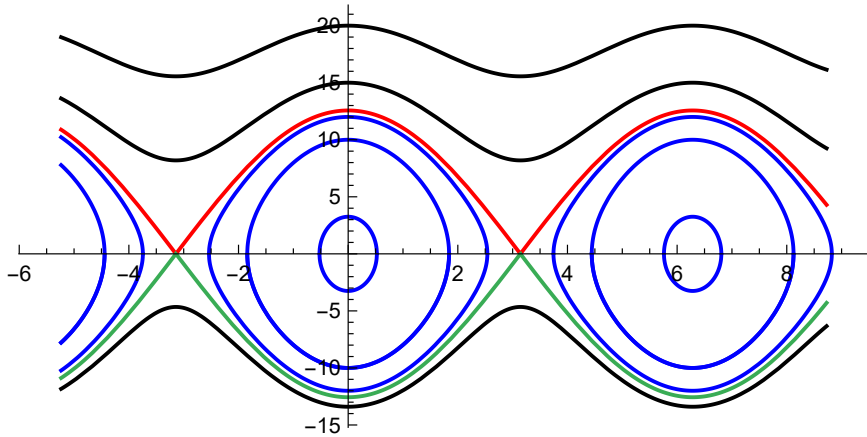


Figura 2: Alcune traiettorie del pendolo non smorzato nel piano delle fasi

In ascisse c'è  $\theta$ , in ordinate c'è  $\dot{\theta}$ . Le linee blu sono oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabile, ovvero  $\theta = 0 \pm 2n\pi$ , con  $n$  intero. Le linee nere sono moti rotatori. Le linee rosse e le linee verdi sono le *separatrici*, che partono/arrivano nelle posizioni di equilibrio instabile  $\theta = \pi \pm 2n\pi$ . Per il teorema di Cauchy sull'unicità della soluzione, le traiettorie non si possono intersecare.

Si noti che le equazioni delle traiettorie sono note analiticamente, mentre la funzione  $\theta(t)$  va calcolata numericamente.

## 2.1 Con smorzamento

La presenza di smorzamento viscoso ha un notevole effetto sulle traiettorie. Si riportano in Fig. 3–6 piani delle fasi per un pendolo per valori crescenti del fattore di smorzamento  $\zeta$ . In tutti i casi si hanno le stesse condizioni iniziali.

Come ovvio attendersi, tutte le traiettorie finiscono con oscillazioni smorzate intorno ad una posizione di equilibrio stabile. Si osservi in particolare la traiettoria più in alto, che passa, nelle figure proposte, da rotazione a oscillazione intorno a tre differenti punti singolari, a seconda del valore di  $\zeta$ .

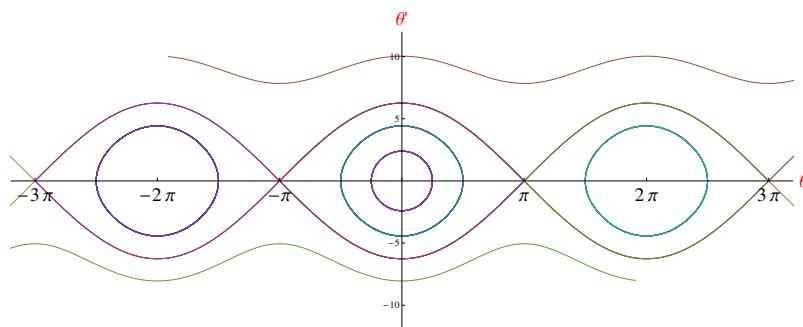


Figura 3: Traiettorie di un pendolo non smorzato

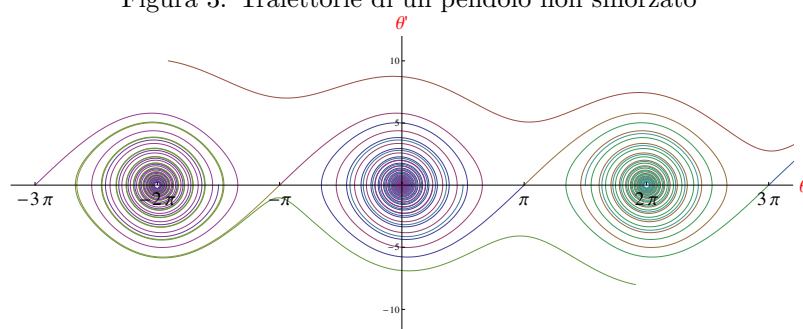


Figura 4: Traiettorie di un pendolo con  $\zeta = 0.04$

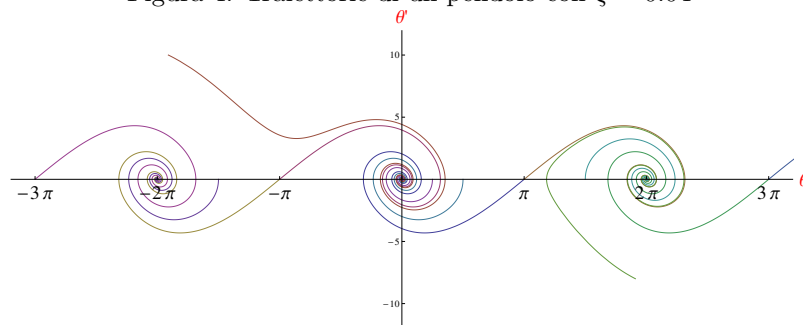


Figura 5: Traiettorie di un pendolo con  $\zeta = 0.2$

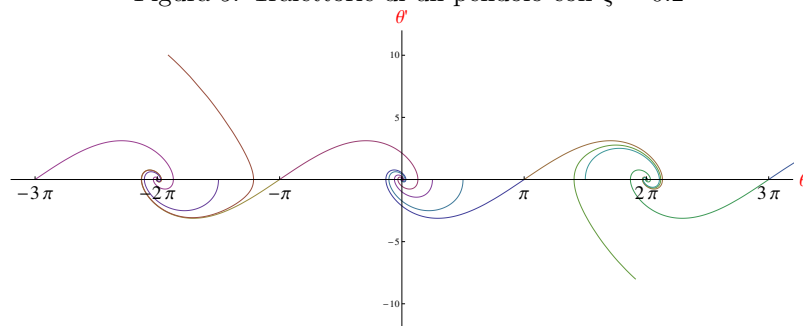


Figura 6: Traiettorie di un pendolo con  $\zeta = 0.4$