Oscillazioni Torsionali

Massimo Guiggiani

25 marzo 2022

Sommario

Dove si dimostra che la riduzione delle inerzie e delle rigidezze non ha senso.

1 Sistema vibrante

Sono noti (Fig. 1):

- i momenti d'inerzia J_1, J_2 e J_3;
- le rigidezze torsionali k_1 e k_2;
- il rapporto di trasmissione τ;
- i raggi r_2 e r_3.

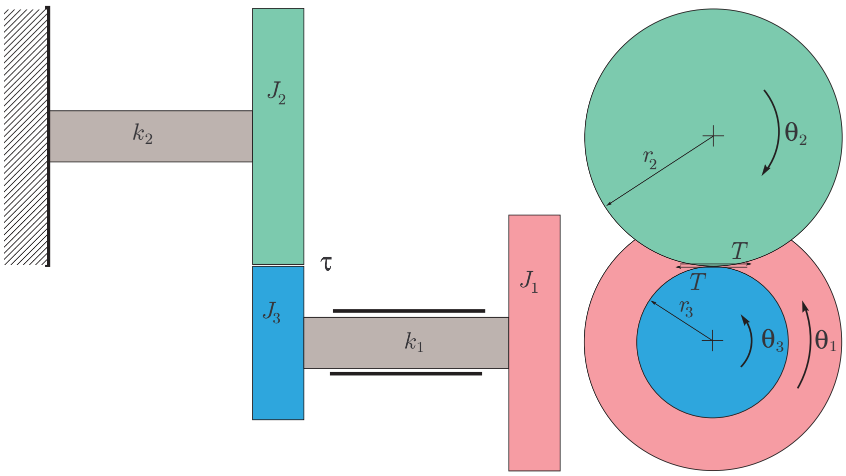

Figura 1: Oscillazioni torsionali a due gradi di libertà

Si vogliono ottenere le equazioni del moto di questo sistema vibrante a due gradi di libertà.

1.1 Tre coordinate angolari

Si introducono tre coordinate angolari, indicate in Fig. 1. Essendo noto il rapporto di trasmissione τ, si ha che

$$\tau = \frac{r_3}{r_2} = \frac{\theta_2}{\theta_3} \tag{1}$$

Dato che fra θ_2 e θ_3 c'è un legame algebrico, non si possono usare entrambe come ultime coordinate.

1.2 Equazioni del moto facili

Come al solito, si cerca di scrivere equazioni "facili" (Fig. 1)

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 &= -k_1(\theta_1 - \theta_3) \\ J_2\ddot{\theta}_2 &= -k_2\theta_2 - Tr_2 \\ J_3\ddot{\theta}_3 &= -k_1(\theta_3 - \theta_1) + Tr_3 \\ \theta_2 &= \theta_3\tau \end{aligned} \tag{2}$$

Ricavando T ed eliminando θ_2

$$T = \frac{-J_2\ddot{\theta}_3\tau - k_2\theta_3\tau}{r_2} \tag{3}$$

si passa da quattro DAE a due ODE nei due gradi di libertà θ_1 e θ_3

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 &= -k_1(\theta_1 - \theta_3) \\ J_3\ddot{\theta}_3 &= -k_1(\theta_3 - \theta_1) + \frac{-J_2\ddot{\theta}_3\tau - k_2\theta_3\tau}{r_2}r_3 \end{aligned} \tag{4}$$

che riordinate diventano

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 &= -k_1(\theta_1 - \theta_3) \\ (J_3 + J_2\tau^2)\ddot{\theta}_3 &= -k_1(\theta_3 - \theta_1) - k_2\tau^2\theta_3 \end{aligned} \tag{5}$$

A questo punto è ovvio constatare che le precedenti equazioni possono essere riscritte così

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 &= -k_1(\theta_1 - \theta_3) \\ \hat{J}_3\ddot{\theta}_3 &= -k_1(\theta_3 - \theta_1) - \hat{k}_2\theta_3 \end{aligned} \tag{6}$$

in cui sono stati introdotti il momento d'inerzia "ridotto" $\hat{J}_3 = J_3 + J_2\tau^2$ e la rigidezza torsionale "ridotta" $\hat{k}_2 = k_2\tau^2$, come se il sistema fisico fosse quello di Fig. 2.

Fin qui niente da contestare. Il problema nasce se qualcuno pretende di operare la riduzione *a priori*, che equivale a risolvere il problema prima di averlo risolto.

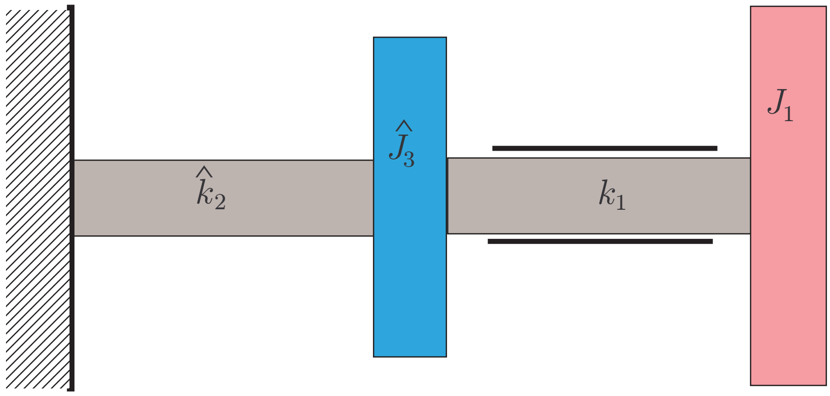

Figura 2: Sistema "ridotto" (quello facile)

1.3 Equazioni del moto meno ovvie

Per rendersi conto dell'assurdità di tale richiesta si riprendano le (2) e si decida di eliminare θ_3 (non una grande idea, ma pienamente legittima)

$$T = \frac{J_3\ddot{\theta}_2/\tau + k_1(\theta_2/\tau - \theta_1)}{r_3} \tag{7}$$

ottenendo

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 &= -k_1(\theta_1 - \theta_2/\tau) \\ J_2\ddot{\theta}_2 &= -k_2\theta_2 - \frac{J_3\ddot{\theta}_2/\tau + k_1(\theta_2/\tau - \theta_1)}{\tau} \end{aligned} \tag{8}$$

ovvero

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 &= -k_1\left(\theta_1 - \frac{\theta_2}{\tau}\right) \\ \left(J_2 + \frac{J_3}{\tau^2}\right)\ddot{\theta}_2 &= -k_2\theta_2 - k_1\left(\frac{\theta_2}{\tau^2} - \frac{\theta_1}{\tau}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

Qual è il sistema "ridotto" corrispondente a queste equazioni? Esiste, ma non è facile (banale) da immaginare a priori. Il lettore curioso può provare a ottenerlo, adesso che si sono ottenute le equazioni. A priori è un'impresa ardua. E del tutto inutile.