Vibrazioni con roto-traslazione

Massimo Guiggiani

21 marzo 2022

Sommario

Due gradi di libertà, tre coordinate.

1 Sistema vibrante non facilissimo

Sono noti (Fig. 1):

- le masse m_1 e m_2;
- il momento d'inerzia baricentrico J_1;
- il raggio r;
- le rigidezze k_1, k_2 e k_3 delle molle (lineari);
- il coefficiente di attrito f fra rullo e squadretta;
- assenza di attrito fra squadretta e piano.

Si vogliono ottenere le equazioni del moto.

1.1 Legame cinematico fra le coordinate x_1, x_2 e θ

Si definiscono due coordinate assolute x_1 e x_2 (Fig. 1). Per comodità, si definisce anche una coordinata angolare θ. Tutte valgono zero all'equilibrio statico. Si ipotizza rotolamento senza strisciamento.

Dato che il sistema è a due gradi di libertà, deve esserci un legame fra queste tre coordinate. Infatti

$$\theta r = x_1 - x_2 \tag{1}$$

1.2 Equazioni del moto

Le equazioni del moto sono (Fig. 1)

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 - k_3(x_1 - x_2) - T \\
m_2\ddot{x}_2 &= -k_2x_2 - k_3(x_2 - x_1) + T \\
J_1\ddot{\theta} &= Tr \\
\theta r &= x_1 - x_2
\end{aligned} \tag{2}$$

dove T è stata definita positiva se come in Fig. 1. Questo è un sistema di equazioni algebrico-differenziali (differential algebraic equations, DAE).

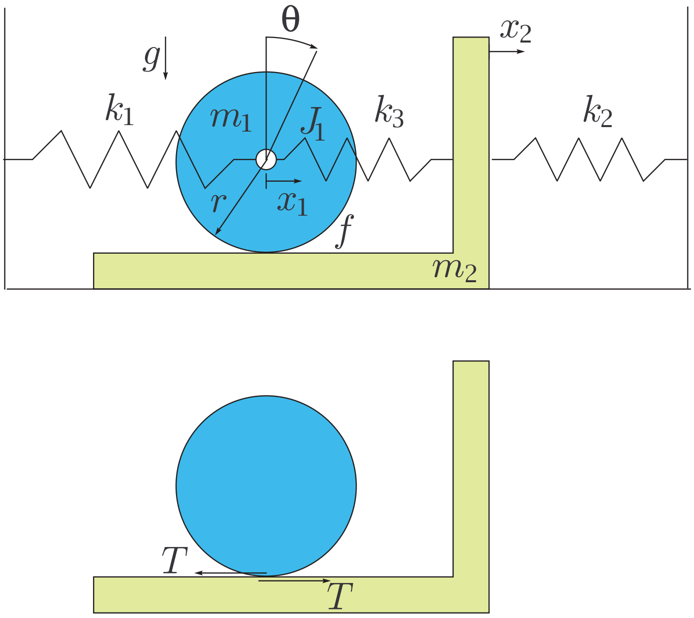

Figura 1: Sistema vibrante a due gradi di libertà

Questo approccio ci ha permesso di scrivere tutte equazioni "facili". Adesso è banale far sparire θ e T

$$T = \frac{J_1(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}{r^2} \tag{3}$$

da cui il sistema di ODE (ordinary differential equations)

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 - k_3(x_1 - x_2) - \frac{J_1(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}{r^2} \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2x_2 - k_3(x_2 - x_1) + \frac{J_1(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}{r^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Si noti che nessuna matrice è diagonale, se si usano queste coordinate.

Per avere rotolamento senza strisciamento occorre verificare che in ogni istante sia $|T| < fm_1g$.