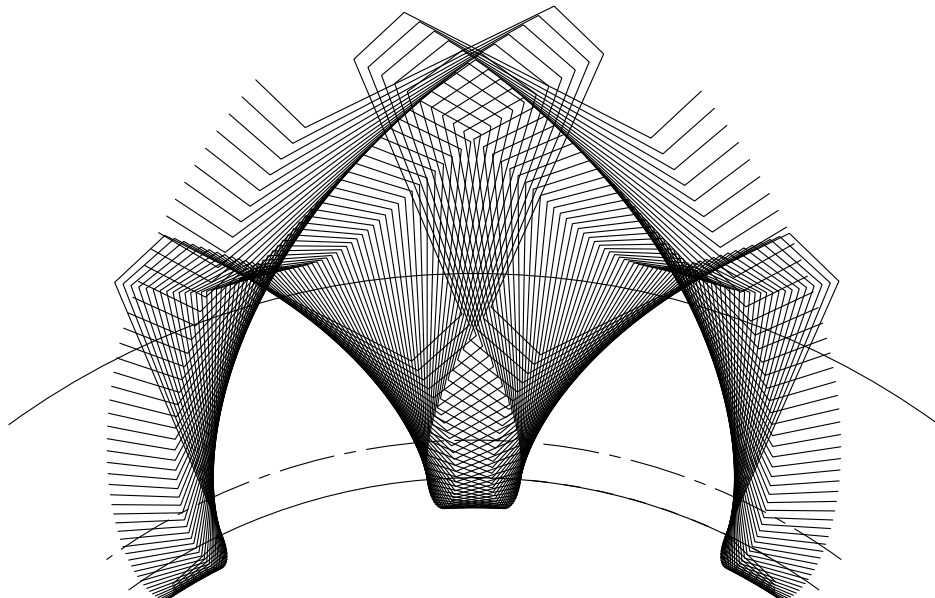


GENERAZIONE PER INVILUPPO DI RUOTE DENTATE AD EVOLVENTE

MASSIMO GUIGGIANI

*Dipartimento di Ingegneria Meccanica,
Nucleare e della Produzione
Università di Pisa
via Diotisalvi 2, 56126 Pisa
guiggiani@ing.unipi.it*



Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Scopo di queste note | 1 |
| 2 | Profili coniugati ed inviluppo | 1 |
| 3 | Generazione per inviluppo di un solo profilo (e relativo raccordo) | 3 |
| 3.1 | Inviluppo con $l < l_0$ | 6 |
| 3.2 | Inviluppo con $l > l_0$ | 10 |
| 3.3 | Variazione dell'angolo di pressione α | 12 |
| 3.4 | Generazione con parametri differenti dello stesso profilo coniugato . . | 12 |
| 4 | Utensile dentiera | 15 |
| 5 | Generazione per inviluppo di ruote dentate (profilo, raccordo e circonferenza di piede) | 17 |
| 5.1 | Dentature normali ($x = 0$) | 20 |
| 5.1.1 | Ruote dentate con interferenza | 24 |
| 5.1.2 | Angolo di pressione $\alpha \neq 20^\circ$ | 25 |
| 5.2 | Dentature corrette (o con spostamento $x \neq 0$) | 27 |
| 5.3 | Ingranaggi senza variazione di interasse | 34 |
| 5.4 | Ingranaggi con variazione di interasse | 34 |
| 5.5 | La galleria dei mostri | 37 |

Elenco delle figure

| | | |
|----|---|----|
| 1 | Circonferenza primitiva (---) di raggio $r = OC$ e circonferenza di base (—) di raggio $r_b = OK$. Se la semiretta μ inizia nel punto B (sporgenza $l = CE$), si hanno la circonferenza limite dell'evolvente (---) di raggio $r_{inv} = OF$ e la circonferenza di piede (- -) di raggio $r_f = OE$. $l_0 = CD$ rappresenta la massima sporgenza per non avere interferenza. | 3 |
| 2 | Generazione per involuppo di un profilo ad evolvente di cerchio e del relativo raccordo ad arco di trocoide. Sporgenza $l = l_0$ | 5 |
| 3 | Generazione con sporgenza $l = 0.66 l_0$ | 7 |
| 4 | Generazione con sporgenza $l = 0.32 l_0$ | 8 |
| 5 | Generazione con sporgenza $l = 0$ | 9 |
| 6 | Generazione con sporgenza $l = -1.13 l_0$ | 10 |
| 7 | Generazione con sporgenza $l = 2.28 l_0$ | 11 |
| 8 | Generazione dello stesso profilo ad evolvente (ma non dello stesso raccordo) con valori differenti dell'angolo α . In entrambi i casi $l = l_0$ | 13 |
| 9 | Utensile dentiera. | 15 |
| 10 | Ruota dentata normale con $z = 32$ denti. | 20 |
| 11 | Ruota dentata normale con $z = z_{min} = 22$ denti. | 22 |
| 12 | Ruota dentata normale con $z = 41$ denti, cui corrisponde $r_f = r_b$ | 23 |
| 13 | Ruota dentata normale con $z = 68$ denti. | 23 |
| 14 | Effetto dell'interferenza di taglio su una ruota dentata normale con $z = 10$ denti. | 24 |
| 15 | Effetto di un maggior angolo di pressione su una ruota dentata normale con $z = 32$ denti. | 26 |
| 16 | Effetto di un minor angolo di pressione su una ruota dentata normale con $z = 32$ denti. | 26 |
| 17 | Ruota dentata corretta con $z = 32$ denti e $x = x_{min} < 0$ | 29 |
| 18 | Ruota dentata con interferenza. $z = 32$ denti e correzione $x = -m$ in modo da avere $r_a = r$ | 29 |
| 19 | Ruota dentata con $z = 32$ denti e correzione in modo da avere $r_f = r_b$ | 30 |
| 20 | Ruota dentata con $z = 32$ denti e correzione $x = m/2$ | 30 |
| 21 | Ruota dentata con $z = 32$ denti e correzione $x = 1.25 m$. Si noti l'assenza di raccordo e la coincidenza di tre raggi $r_{inv} = r = r_f$ | 31 |
| 22 | Ruota dentata con $z = 32$ denti e correzione $x = x_{max}$ (dente a punta). | 32 |
| 23 | Ruota dentata con $z = 10$ denti e correzione $x = x_{min} = x_{max}$ (dente a punta ed assenza di interferenza). | 33 |
| 24 | Andamento di x_{min}/m e x_{max}/m in funzione del numero di denti z della ruota da tagliare ($\alpha = 20^\circ$). | 33 |
| 25 | Ruota dentata corretta con $z = 22$ denti e correzione $x = +0.3 m$ | 35 |
| 26 | Ruota dentata corretta con $z = 41$ denti e correzione $x = -0.3 m$ | 35 |

| | | |
|----|---|----|
| 27 | Andamento del gioco di testa c/m in funzione della somma dei numeri di denti e per vari valori di $(x_1 + x_2)/m$. La figura è relativa ad $\alpha = 20^\circ$. | 37 |
| 28 | Ruota dentata normale con $z = 10$ ed $\alpha = 32.14^\circ$ (dentiera a punta). | 38 |
| 29 | Ruota dentata con $z = 68$ ed $\alpha = 20^\circ$ corretta con $x/m = -2.7 \simeq x_{\min}/m$. | 39 |
| 30 | Ruota dentata con $z = 68$ ed $\alpha = 20^\circ$ corretta con $x/m = 2.7 \simeq x_{\max}/m$. | 39 |
| 31 | Ruota dentata con un solo dente. $\alpha = 20^\circ$ e $x/m = 1.2 \simeq x_{\min}/m$. | 40 |

1 Scopo di queste note

Lo studio delle ruote dentate non è semplice. Anche limitandosi ai soli aspetti geometrico-cinematici, spesso si fatica a comprendere a fondo i fenomeni che stanno dietro (o dentro?) certe formule. Un esempio su tutti: l'interferenza di taglio e la correzione delle ruote dentate cilindriche. Anche quando gli sviluppi analitici siano ben assimilati, si dovrà ammettere che comprendere appieno tutti gli effetti delle correzioni sulla forma finale dei denti richiede una buona dose di esperienza.

Queste difficoltà sono dovute essenzialmente al fatto che i denti vengono generati per *inviluppo*. Pur essendo relativamente semplice da definire, il processo di inviluppo coinvolge moti non banali che possono dar luogo a forme geometriche difficili da prevedere intuitivamente.

Lo scopo principale di queste note è quello di “visualizzare” il processo di generazione per inviluppo di dentature cilindriche ad evolvente (a denti diritti). Mediante immagini generate al calcolatore si cercherà di fornire una evidenza visiva dei principali aspetti correlati alla geometria ed al taglio degli ingranaggi. In tal modo si ritiene che si possano meglio e più rapidamente comprendere gli effetti sulla forma finale dei denti dei vari parametri coinvolti nel processo di taglio per inviluppo.

Non verranno trattate molte altre questioni per le quali si rimanda a libri di testo (ad es. [2]) o a trattati specifici come [3, 4, 5, 6]. Per brevità di esposizione, verrà spesso fornita solo la formula finale, omettendo la dimostrazione. In questi casi si cercherà comunque di fornire un preciso riferimento ad un testo.

Dato il carattere complementare di queste note, si presume che il lettore conosca la terminologia ed abbia certe nozioni fondamentali sulle ruote dentate ad evolvente. Per quanto possibile, si farà riferimento alle norme UNI 4760-75 (Vocabolario delle ruote dentate) e UNI 6773-74 (Simboli).

Tutto il software per la generazione delle figure è stato scritto nel linguaggio *Mathematica* [7].

2 Profili coniugati ed inviluppo

I due profili a contatto di due ruote dentate cilindriche sono un esempio di applicazione del concetto di *profili coniugati*. Due profili coniugati sono tali se e solo se un profilo *inviluppa* la varie posizioni che l'altro profilo assume nel moto relativo definito dalle due polari [1, vol. 1, p. 238]. Pertanto, profili coniugati ed inviluppo sono due concetti inscindibili.

È bene ricordarsi fin da ora che il processo di inviluppo è il metodo fondamentale per la generazione di *qualsunque* tipo di ruota dentata, sia dal punto di vista teorico che costruttivo.

Nel caso delle ruote dentate cilindriche a denti diritti, le polari del moto relativo hanno sempre una forma molto semplice: sono delle circonferenze. Ciò discende, ovviamente, dal requisito di avere un rapporto di trasmissione assolutamente *costante*. Le due polari sono spesso chiamate *circonferenze primitive* di funzionamento.

Per quanto detto sui profili coniugati, i dati del problema sembrano essere le due polari (i raggi delle due circonferenze primitive) e la forma (intesa anche come posizione rispetto alla polare) di uno dei due profili. L'altro profilo non può essere assegnato, ma deve scaturire dal processo di involuppo. Questo modo di procedere, pur corretto, è però poco pratico.¹

Per una serie di buoni motivi (indicati in seguito) è molto più conveniente adottare un metodo più generale per la generazione di ogni singolo profilo. Come illustrato in Fig. 1, una delle due polari è sempre una retta ε , ed il profilo ad essa solidale è sempre una *semiretta* μ (scelta più semplice non poteva essere fatta). L'altra polare è (ovviamente) la circonferenza primitiva di raggio r della ruota che si vuole ottenere. Il profilo di ciascun dente viene generato per involuppo delle varie posizioni assunte da μ durante il rotolamento della polare standard ε sull'altra polare (la primitiva di raggio r della ruota). Quindi, ciascun singolo profilo è un profilo coniugato di μ .

Come descritto, ad esempio, in [2, vol. 1, pp. 225–226], con questo metodo si ottengono dei *profili di assortimento*; ossia profili che risultano essere mutuamente coniugati. Due profili coniugati con μ (e quindi generati indipendentemente l'uno dall'altro) sono anche coniugati fra loro. Questo aspetto, di grande importanza, verrà ripreso in seguito.

Per il momento, ci si limita ad analizzare ed a visualizzare l'operazione di più basso livello: la generazione di un *singolo profilo*, ottenuto come involuppo delle posizioni di μ assunte durante il rotolamento di ε su di una circonferenza primitiva. Questa operazione, relativamente semplice, rappresenta l'elemento base per la generazione delle ruote dentate vere e proprie.

¹Tuttavia, è il metodo utilizzato per la realizzazione di ingranaggi un po' "strani", specialmente per la trasmissione fra assi sghembi.

3 Generazione per involuppo di un solo profilo (e relativo raccordo)

Una possibile posizione è riportata in Fig. 1. La retta ε è tangente alla circonferenza primitiva (linea a tratto misto) di centro O e raggio $r = OC$. La semiretta μ è solidale con ε ; β indica l'angolo acuto fra ε e μ . L'origine B della semiretta μ è a distanza $l = CE$ da ε (si noti che l indica la distanza misurata ortogonalmente ad ε). Il processo di involuppo si ha facendo rotolare (senza strisciare) la polare ε sull'altra polare (la circonferenza primitiva).

Due soli parametri controllano il fenomeno:

- a) l'angolo di inclinazione β fra ε e μ ;
- b) il rapporto l/r .

È però più conveniente esprimere la *sporgenza* l come

$$l = l_0 + y, \quad (1)$$

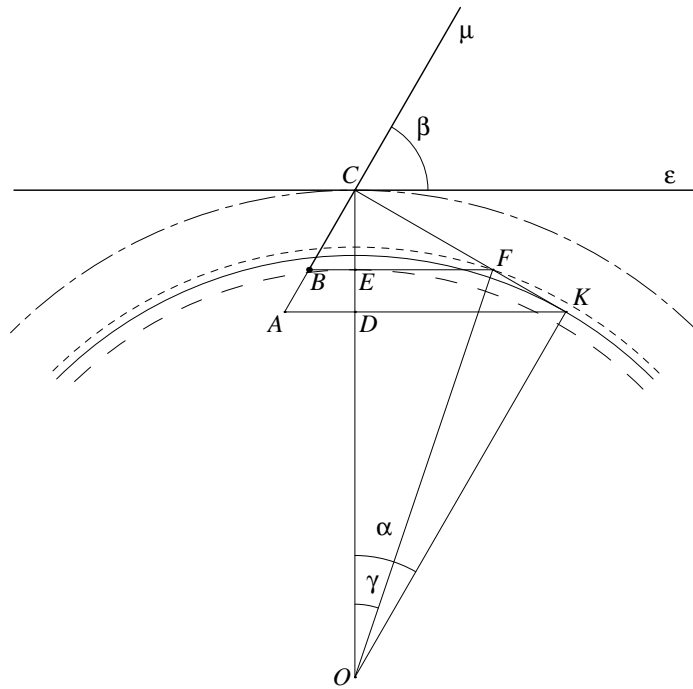


Figura 1: Circonferenza primitiva (---) di raggio $r = OC$ e circonferenza di base (—) di raggio $r_b = OK$. Se la semiretta μ inizia nel punto B (sporgenza $l = CE$), si hanno la circonferenza limite dell'evolvente (---) di raggio $r_{\text{inv}} = OF$ e la circonferenza di piede (- -) di raggio $r_f = OE$. $l_0 = CD$ rappresenta la massima sporgenza per non avere interferenza.

con

$$l_0 = r \sin^2 \alpha, \quad (2)$$

dove $\alpha = 90^\circ - \beta$ è l'angolo di pressione. Si noti che la distanza $y = DE$ in (1) è con segno. In Fig. 1 si ha $y < 0$ dato che $l_0 > l$.

La sporgenza $l_0 = CD$ ha un significato speciale perché rappresenta la distanza da ε del punto A in Fig. 1. Se l'origine B di μ coincide con A , si ha la generazione di tutta l'evolvente di cerchio, cioè sino alla circonferenza di base (linea continua in Fig. 1). Per $\alpha = 20^\circ$ si ha $l_0/r = 0.116$.

In definitiva, i due soli parametri da considerare sono:

- a) l'angolo di pressione α ;
- b) il rapporto y/r che controlla la variazione rispetto a l_0/r del rapporto l/r fra la sporgenza l (la distanza di B da ε) ed il raggio r di primitiva.

L'effetto di y/r è ancora più chiaro nella relazione fra grandezze adimensionali

$$\frac{l}{l_0} = 1 + \frac{y/r}{\sin^2 \alpha} \quad (3)$$

Non rimane che generare una serie di figure per vedere gli effetti dei due parametri α e y/r .

Come primo caso, si può assumere $\alpha = 20^\circ$ (valore standard) e $y/r = 0$ (ovvero $B \equiv A$ in Fig. 1). Il relativo processo di involuppo è riportato in Fig. 2.²

La retta ε è indicata solo per una posizione. Le successive posizioni di μ involuppano il profilo coniugato (profilo attivo del dente) che si dimostra essere una *evolvente di cerchio* [2, pp. 226–227].

Tre circonferenze sono tracciate in Fig. 2:

1. *circonferenza primitiva* (linea mista a tratti lunghi e corti) di raggio r . Su questa circonferenza rotola ε ;
2. *circonferenza di base* (linea continua) associata all'evolvente appena generata. Questa circonferenza ha raggio r_b pari a (Fig. 1)

$$r_b = r \cos \alpha; \quad (4)$$

3. *circonferenza di piede* (linea tratteggiata a tratti lunghi) di raggio r_f pari a (Fig. 1)

$$r_f = r - l = r - (l_0 + y) = r \cos^2 \alpha - y = r_b \cos \alpha - y. \quad (5)$$

²Nelle figure è ovviamente riportato solo un segmento iniziale di μ e, quindi, solo la parte iniziale del profilo coniugato.

Profilo e raccordo: $\alpha = 20$ gradi, $100 y/r = 0$

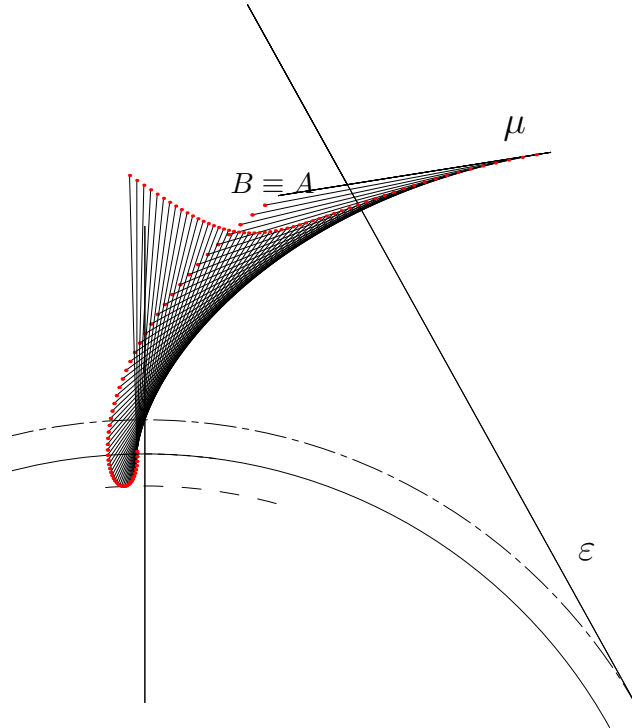


Figura 2: Generazione per involuppo di un profilo ad evolvente di cerchio e del relativo raccordo ad arco di trocoide. Sporgenza $l = l_0$.

Ovviamente, l'evolvente di cerchio non può estendersi all'interno della circonferenza di base. Dato che in Fig. 2 si è posto $y = 0$, il profilo coniugato generato per involuppo è una evolvente completa che inizia proprio sulla circonferenza di base. Come si vedrà nelle figure successive, ciò non accade per $y \neq 0$ (anche se per motivi diversi per $y < 0$ e $y > 0$).

Oltre al profilo, in Fig. 2 è chiaramente visibile il *raccordo* alla base del dente. È quella linea che collega, senza spigoli, il profilo ad evolvente alla circonferenza di piede. Il raccordo è sempre un arco di *trocoide* [4, pp. 1–20, 8–1].

Dall'esame della Fig. 2 risulta chiaramente che il raccordo è dato dalla *traiettoria* di un punto speciale: il punto B preso come origine della semiretta μ (indicato da un "pallino" in figura).³ In questo caso, $B \equiv A$.

Il processo illustrato in Fig. 2 ha quindi generato *due* tratti di curva:

³Ogni punto di μ ha per traiettoria una trocoide. Il profilo ad evolvente può anche essere visto come l'involuppo di tutte queste trocoidi. Ai fini pratici, solo la traiettoria dell'origine di μ ha interesse perché determina la forma del raccordo.

1. il profilo attivo (ad evolvente) per involuppo nel moto di μ ;
2. il raccordo (trocoide) come traiettoria del punto iniziale di μ .

Deve essere ben chiaro che solo la parte ad evolvente è il profilo coniugato che può essere effettivamente utilizzato nella trasmissione del moto. Il raccordo è solo un “effetto indotto”.

Il profilo globale del dente è (in generale) costituito da una parte attiva ad evolvente e da un raccordo ad arco di trocoide. Entrambe le parti sono “automaticamente” generate durante il processo di involuppo. Questo è quanto avviene anche durante l’effettivo taglio delle ruote dentate. Se ci si limita a descrivere il profilo ad evolvente come generato a partire dalla circonferenza di base, non c’è modo di ottenere anche la forma del raccordo. Il fatto che il profilo attivo sia una evolvente di cerchio è, in fondo, una fortunata coincidenza. Il punto fondamentale è l’aver generato dei profili coniugati facendo rotolare una retta ε con “attaccata” una semiretta μ su di una polare circolare (la primitiva).

Cosa accade se si ripete lo stesso processo con lo stesso valore di $\alpha = 20^\circ$, ma diversa lunghezza $l = l_0 + y$? Intanto bisogna distinguere fra i due casi con $y < 0$ e $y > 0$.

3.1 Inviluppo con $l < l_0$

Anche se prematuro, si vuole anticipare che i casi con $l < l_0$ (ovvero $y < 0$) illustrano cosa accade nelle ruote dentate senza interferenza di taglio.

Un esempio con $y < 0$ (precisamente $y/r = -4\%$) è riportato in Fig. 3. Dato che la distanza di B da ε è minore rispetto al caso precedente, il profilo coniugato ad evolvente non può estendersi fino alla circonferenza di base. Il passaggio da evolvente a trocoide avviene ad un raggio maggiore di r_b . Questa nuova circonferenza è detta *circonferenza limite dell’evolvente* ed ha raggio (Fig. 1)

$$\begin{aligned}
 r_{\text{inv}} &= \sqrt{(r - l)^2 + (l / \tan \alpha)^2} \\
 &= \sqrt{r_f^2 + (l / \tan \alpha)^2} \\
 &= \sqrt{r_b^2 + (y / \sin \alpha)^2}
 \end{aligned} \tag{6}$$

La circonferenza limite dell’evolvente è stata tracciata in Figg. 1 e 3 con linea tratteggiata a tratti corti. È utile osservare che, se $l = l_0$ (ovvero $y = 0$) si ha $r_{\text{inv}} = r_b$, come in Fig. 2; altrimenti, per $l < l_0$ (ossia $y < 0$), si ha $r_{\text{inv}} > r_b$, come in Fig. 3.

La riduzione della distanza l ha anche un notevole effetto sul raccordo che risulta molto più piccolo. Per permettere il confronto, anche la traiettoria del punto A (cioè il raccordo che si sarebbe ottenuto con $l = l_0$) è rappresentata in Fig. 3. Come ultimo effetto (peraltro ovvia conseguenza del minor valore di l , eq. (5)) si osserva un aumento del raggio r_f della circonferenza di piede (linea tratteggiata a tratti lunghi).

Profilo e raccordo: alfa = 20 gradi, 100 y/r = -4

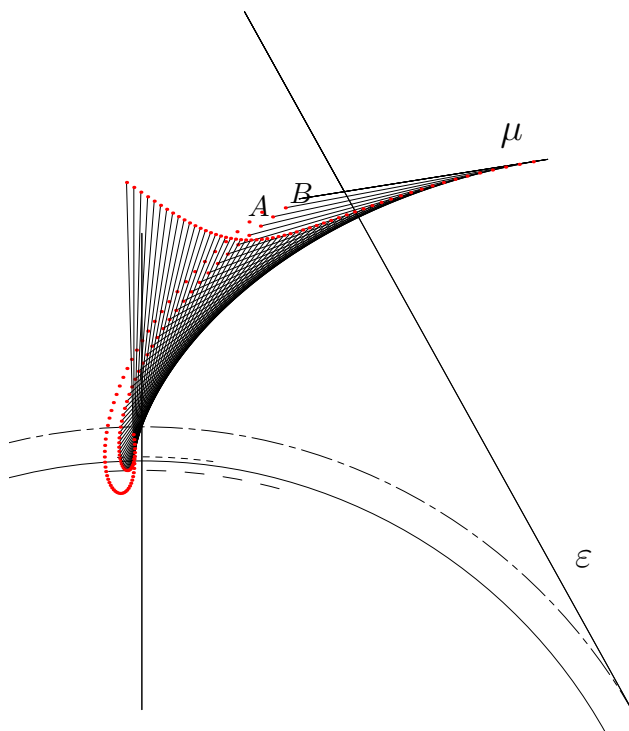


Figura 3: Generazione con sporgenza $l = 0.66 l_0$.

Riducendo ulteriormente la distanza l si può portare la circonferenza di piede fino all'esterno della circonferenza di base. Dall'eq. (5) si ottiene che le due circonferenze coincidono (cioè $r_f = r_b$) se

$$y = -r_b(1 - \cos \alpha) = -r \cos \alpha(1 - \cos \alpha), \quad (7)$$

ovvero $l/r = 1 - \cos \alpha$. Per $\alpha = 20^\circ$ si ottiene $y/r = -5.66\%$ e $l = 0.52l_0$.

In Fig. 4 si ha il caso con $\alpha = 20^\circ$ e $y/r = -8\%$. Con questo valore di y/r , la circonferenza di piede è esterna alla circonferenza di base ($r_f > r_b$). Inoltre, si ha una notevole riduzione del raccordo alla base del profilo. Il raggio r_{inv} del punto limite dell'evolvente è ancora più grande in quanto y/r è aumentato in valore assoluto (eq. (6)).

Come illustrato in Fig. 5, il raccordo svanisce se $l = 0$, ossia se il profilo ad evolvente è tutto esterno alla circonferenza primitiva. In questo caso si ha la coincidenza delle tre circonferenze di piede, limite dell'evolvente e primitiva ($r_f = r_{inv} = r$, come si ottiene subito dalle eq. (5) e (6) per $l = 0$). Il corrispondente valore di y è dato

Profilo e raccordo: $\alpha = 20$ gradi, $100 y/r = -8$

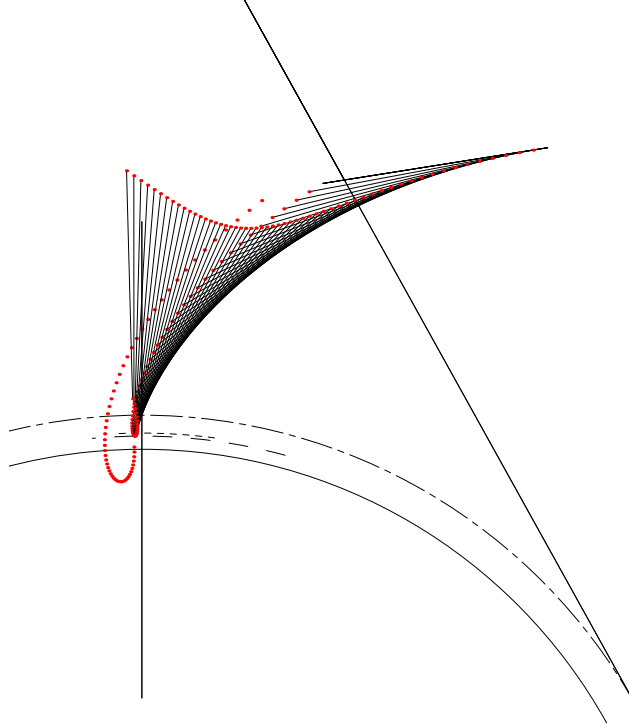


Figura 4: Generazione con sporgenza $l = 0.32 l_0$.

dalla relazione

$$y = -l_0 = -r \sin^2 \alpha. \quad (8)$$

Per $\alpha = 20^\circ$ si ha $y/r = -11.69\%$. A causa dello spigolo vivo nel passaggio dal profilo ad evolvente alla circonferenza di piede, si tratta di una situazione da evitare nella pratica.

Anche se di scarsa rilevanza applicativa, si vuole vedere cosa accade se ci si spinge oltre, ad esempio con $y/r = -25\%$ (Fig. 6). Tutto accade all'esterno della circonferenza primitiva (ovvio). È interessante osservare la ricomparsa di un raccordo alla base del profilo coniugato. Si tratta ancora un arco di trocoide, ma di tipo “ridotto” (curtate), mentre per $y < 0$ erano archi di trocoide “allungata” (prolate). La curva limite di separazione fra i due tipi di trocoide è un'evolvente di cerchio (osservabile in Fig. 5 come traiettoria dell'origine di μ).

In definitiva, riduzioni della lunghezza l rispetto ad l_0 comportano (a parità di r):

1. aumento del raggio della circonferenza di piede;

Profilo e raccordo: $\alpha = 20$ gradi, $100 y/r = -11.69$

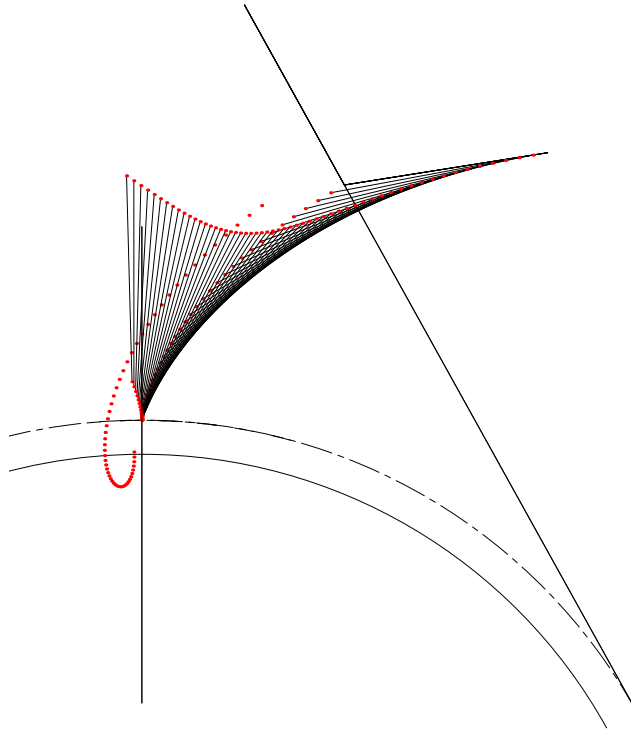


Figura 5: Generazione con sporgenza $l = 0$.

2. se $l > 0$, riduzione della differenza fra raggio di piede e r_{inv} ($r_f \rightarrow r_{inv}$ se $l \rightarrow 0$);
3. notevoli variazioni nella forma del raccordo;
4. esclusione dal profilo coniugato di quella parte di evolvente più vicina alla circonferenza di base.

L'ultimo effetto è in generale benefico nelle applicazioni pratiche. Infatti, il profilo ad evolvente ha addirittura raggio di curvatura zero alla "partenza" dalla circonferenza di base, ed i raggi di curvatura sono comunque molto piccoli nella parte iniziale. Ne segue che l'impiego di questa parte del profilo coniugato per trasmettere effettivamente il moto può facilmente portare ad elevati valori delle tensioni nel dente dovute a contatto hertziano.

Dato che il raggio r_b della circonferenza di base non dipende dalla sporgenza l , il valore di l non influenza la forma del profilo coniugato. A parità di r , l'evolvente generata per involuppo è sempre la stessa (anche se può mancare la parte iniziale).

Profilo e raccordo: $\alpha = 20$ gradi, $100 y/r = -25$

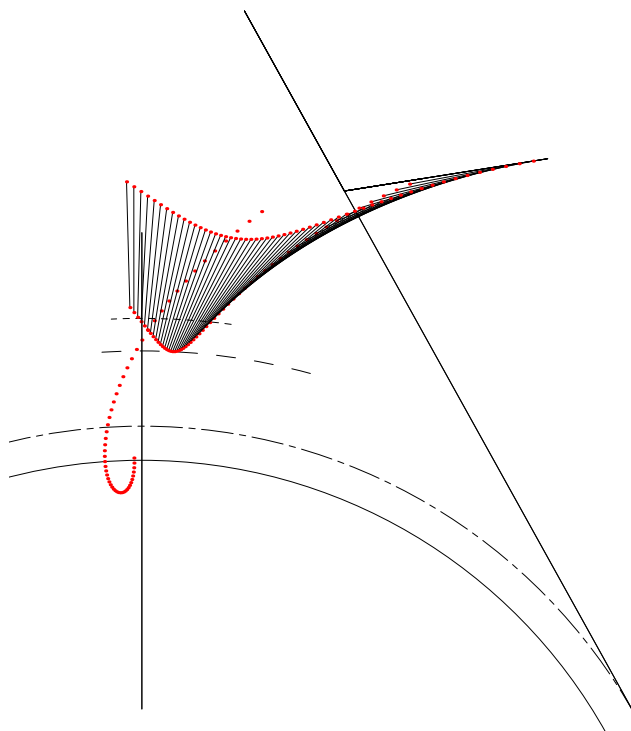


Figura 6: Generazione con sporgenza $l = -1.13 l_0$.

Ad esempio, i profili delle figure precedenti sono tutti sovrapponibili essendo stati ottenuti con la stessa circonferenza primitiva e con lo stesso angolo α .

3.2 Inviluppo con $l > l_0$

Come anticipazione, si ricordi che i casi con $l > l_0$ (ossia, $y > 0$) illustrano cosa accade quando si abbia interferenza di taglio.

Se $y > 0$, l'origine della semiretta μ ha una distanza $l > l_0$ da ε . l_0 è la distanza che permette di completare l'evolvente fino alla circonferenza di base. Una distanza maggiore non può produrre niente di utile.

L'esempio riportato in Fig. 7 è per $l/l_0 = 2.28$ ($y/r = 15\%$) e $\alpha = 20^\circ$. Sono disegnati i punti su μ sia a distanza l che l_0 da ε . Entrambi hanno per traiettoria una trocoide. Tre sono gli effetti principali di $l > l_0$, tutti osservabili in Fig. 7:

1. il raccordo alla base del dente in realtà non è più un raccordo. La traiettoria del punto iniziale di μ non si raccorda con il profilo coniugato ad evolvente

Profilo e raccordo: alfa = 20 gradi, 100 y/r = 15

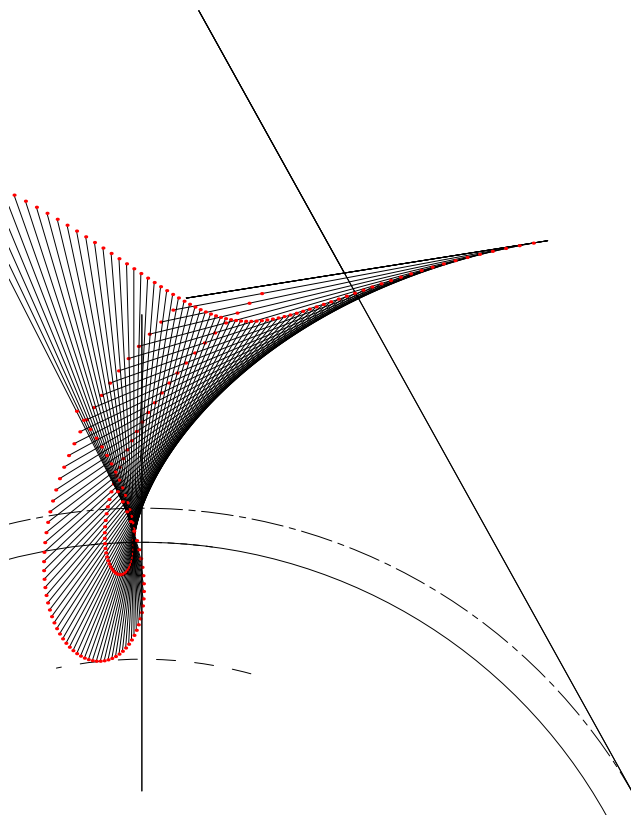


Figura 7: Generazione con sporgenza $l = 2.28 l_0$.

come avveniva per $l < l_0$. L'intersezione fra evolvente e trocoide avviene con uno spigolo;

2. il profilo ad evolvente non si estende più fino alla circonferenza di base. Il profilo utile viene ridotto a causa dell'*interferenza* con la traiettoria dell'origine di μ ;
3. il raggio r_f della circonferenza di piede si riduce per le maggiori dimensioni del raccordo.

È importante rendersi conto della profonda differenza fra il caso attuale ed i casi precedenti in cui $r_{inv} > r_b$. Nei casi precedenti, l'evolvente non veniva proprio costruita all'interno della circonferenza di raggio r_{inv} . Nel caso in esame (ed in tutti i casi in cui $l > l_0$), l'evolvente viene prima generata per involuppo fino alla circonferenza di base e poi in parte "distrutta" dal successivo moto di μ (Fig. 7). Per questo motivo si parla di interferenza. Tuttavia, è bene osservare che la parte di profilo asportata da μ è molto modesta. Ben maggiori sono gli altri effetti.

3.3 Variazione dell'angolo di pressione α

Finora si è sempre usato il valore standard $\alpha = 20^\circ$ dell'angolo di pressione. È però interessante indagare quali siano gli effetti di un diverso valore di α sulla generazione di un profilo.

A parità di raggio r della circonferenza primitiva, un aumento del valore di α comporta una riduzione del raggio di base $r_b = r \cos \alpha$. Pertanto, il processo di involuppo genera un'evolvente di cerchio “più stretta”, cioè associata ad una circonferenza di base più piccola.

Variazioni di α comportano sensibili variazioni di $l_0/r = \sin^2 \alpha$, ossia della massima sporgenza per non avere interferenza. Ad esempio, per $\alpha = 20^\circ$ si ha $l_0/r = 0.12$, mentre per $\alpha = 25^\circ$ si ottiene $l_0/r = 0.18$, con un aumento del 50%. Come si vedrà, ciò ha una notevole influenza sul numero minimo di denti che può avere una ruota dentata normale (senza interferenza di taglio).

Se, oltre ad r , si fissa anche il valore della distanza (sporgenza) l , si ottiene subito (eq. (5) e Fig. 1) che il raggio di piede $r_f = r - l$ è determinato in modo del tutto indipendente dal valore di α . Lo stesso *non* accade per r_{inv} (eq. (6)).

Un'altra cosa che dipende solo da r ed l , ma non da α , è il raccordo trocoidale. Quindi, due casi con lo stesso valore di r ed l , ma diverso α , producono due evolventi differenti, ma raccordate alla stessa circonferenza di piede dalla stessa trocoide (tuttavia, dato che r_{inv} è diverso, il raccordo non ha nei due casi la stessa estensione).

3.4 Generazione con parametri differenti dello stesso profilo coniugato

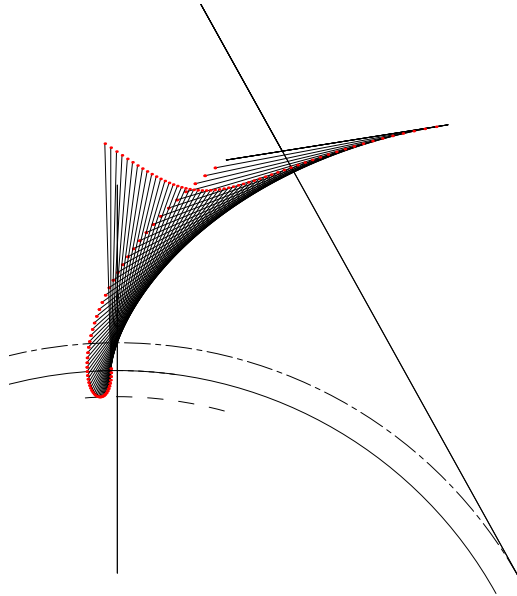
È possibile generare per involuppo lo stesso profilo coniugato partendo da circonferenze primitive di raggio differente? La risposta è sì. Dato che i profili sono evolventi di cerchio [2, pp. 226–228], due profili con la stessa circonferenza di base sono necessariamente uguali. Pertanto, per generare lo stesso profilo coniugato per involuppo, si devono scegliere il raggio di primitiva r e l'angolo α (ovvero $\beta = 90^\circ - \alpha$) in modo da verificare la condizione

$$r_1 \cos \alpha_1 = r_2 \cos \alpha_2 = r_b, \quad (9)$$

dove i pedici indicano due diversi casi.

La Fig. 8 mostra un esempio di generazione dello stesso profilo ad evolvente mediante involuppo sia con $\alpha_1 = 20^\circ$, che con $\alpha_2 = 25^\circ$. Le due circonferenze di base sono uguali, mentre $r_1 < r_2$. In entrambi i casi si è posto $y/r = 0$, in modo da ottenere l'evolvente completa. È interessante osservare che i due processi di involuppo, pur generando lo stesso profilo coniugato, *non* producono lo stesso raccordo (né la stessa circonferenza di piede). Pertanto, non sono pienamente equivalenti. Anche variando il valore di y , non c'è modo di ottenere lo stesso identico risultato nei due casi.

Profilo e raccordo: $\alpha = 20$ gradi, $100 y/r = 0$



Profilo e raccordo: $\alpha = 25$ gradi, $100 y/r = 0$

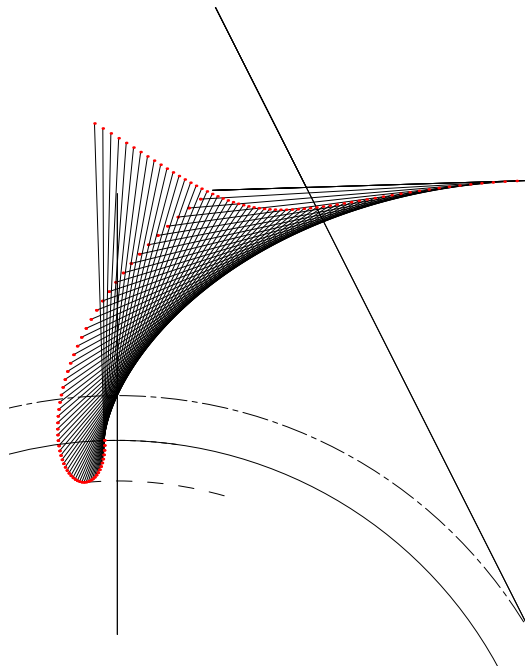


Figura 8: Generazione dello stesso profilo ad evolvente (ma non dello stesso raccordo) con valori differenti dell'angolo α . In entrambi i casi $l = l_0$.

La scelta di dare sia ad ε che a μ forma rettilinea si è quindi rivelata estremamente felice. Il vantaggio decisivo non sta tanto nella semplicità della forma di ε e μ , quanto nella possibilità, appena mostrata, di generare lo stesso profilo coniugato con infinite combinazioni di r ed α .

In altri termini, due profili ad evolvente di cerchio sono profili coniugati anche se il moto relativo avviene con primitive (polari) differenti da quelle utilizzate durante la generazione per involuppo. Questo fatto è di *enorme* importanza applicativa. È la proprietà fondamentale che ha fatto la fortuna delle ruote dentate ad evolvente. È proprio grazie a questa proprietà che le ruote dentate ad evolvente possono ingranare correttamente anche quando la primitiva di lavoro non coincide con la primitiva di taglio, come accade (volutamente) negli ingranaggi corretti con variazione di interasse (e di angolo di pressione).

Nessun'altra famiglia di profili coniugati può vantare la stessa proprietà. Pur essendo semplice generare altre forme di profili coniugati di assortimento (ad es. cambiando la forma di μ), in nessun caso rimangono tali se si cambiano le primitive.

4 Utensile dentiera

Si vuole ora passare dalla generazione del singolo profilo coniugato e relativo raccordo al taglio di una ruota dentata esterna.⁴

In linea di principio, ciò equivale alla generazione di numerosi profili, sia destri che sinistri, uniti fra loro da tratti della circonferenza di piede e della circonferenza di testa (quest'ultima ancora da definire). Per ottenere questo risultato sono necessarie solo alcune semplici estensioni all'idea base esposta nei paragrafi precedenti. In breve, al posto della semiretta μ si impiegherà una linea spezzata chiamata (utensile) *dentiera*. La Fig. 9 illustra la situazione. Per il resto, il processo di involuppo è esattamente lo stesso.

È conveniente elencare le singole modifiche per passare da μ alla dentiera (Fig. 9):

1. la semiretta μ si riduce ad un segmento (infatti, i denti hanno altezza finita). Naturalmente, uno degli estremi del segmento coincide l'origine B di μ . Il punto di intersezione del segmento con la retta χ di Fig. 9 cade esattamente a metà. La retta χ è chiamata *linea di riferimento* della dentiera [2, p. 242]. La retta χ può fungere (ma solo per le ruote "normali") da polare ε . In generale,

⁴Le ruote a dentatura interna non possono, nella pratica, essere tagliate mediante utensile dentiera. Tuttavia, il processo di involuppo che verrà esposto rimane valido dal punto di vista teorico.

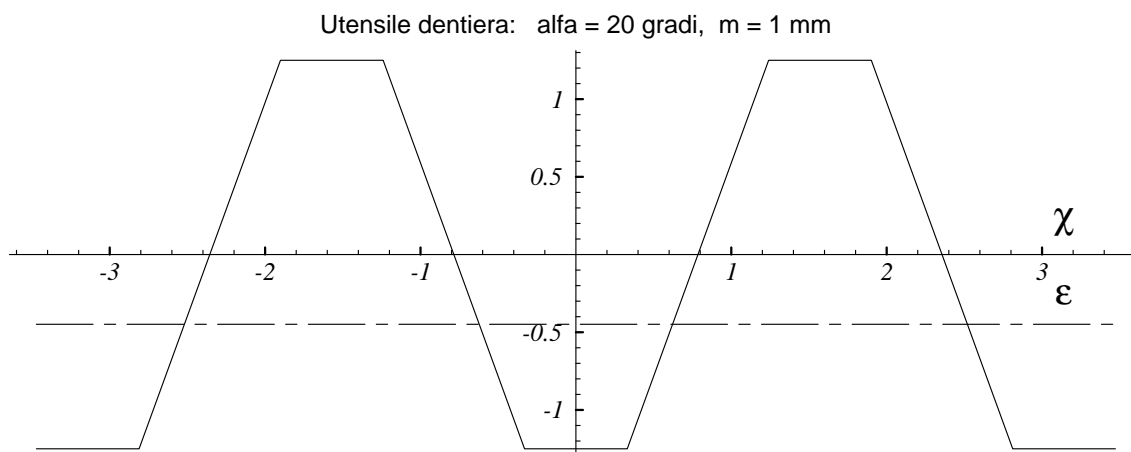


Figura 9: Utensile dentiera.

la polare ε della dentiera (detta *linea primitiva di taglio*) è una retta parallela a χ .

2. per generare non uno, ma molti profili omologhi, è sufficiente “equipaggiare” la polare con una schiera di segmenti, tutti fra loro uguali, sia come dimensione che come posizionamento (Fig. 9). La distanza p , misurata lungo χ , fra due profili successivi è chiamata *passo* p (di solito tutte le coppie hanno lo stesso passo);
3. ciascun dente deve avere sia un fianco destro che uno sinistro. Per generare entrambi i fianchi di ciascun dente basta aggiungere un'altra schiera di segmenti, uguali agli altri e ancora con passo p , ma inclinati in senso opposto. Lungo χ , ciascun profilo destro si trova (di norma) esattamente a metà fra due profili sinistri;
4. per ottenere una linea spezzata continua, ciascun profilo μ deve essere collegato al successivo con un segmento, parallelo a χ , tracciato fra le due estremità più vicine dei profili stessi.

Il risultato di tutte queste semplici operazioni è l'utensile dentiera, che rappresenta l'equivalente pratico della semiretta μ . Essenzialmente, non si è fatto altro che creare uno strumento in grado di generare molte copie del singolo profilo (e relativo raccordo).

Rispetto alla retta χ (detta *linea di riferimento*), la dentiera ha, di norma, una forma assolutamente simmetrica. Quindi, per definire in modo univoco la geometria della dentiera sono necessari tre parametri: (a) l'angolo acuto β fra ciascun profilo e χ , (b) la distanza lungo la linea di riferimento fra profili omologhi consecutivi, detta *passo* p , e (c) l'altezza totale (misurata perpendicolarmente a χ) dei denti della dentiera.

In realtà, nelle dentiere unificate (o *normalizzate*) il passo e l'altezza della dentiera non sono indipendenti. Per correlarli viene introdotto quello che può essere considerato il parametro fondamentale per il dimensionamento delle ruote dentate, ossia il *modulo* m definito dalla relazione

$$m = \frac{p}{\pi}. \quad (10)$$

Come il passo, il modulo ha le dimensioni di una lunghezza (di norma viene espresso in millimetri).

Una dentiera normalizzata ha un'altezza pari a $2.5 m$. Pertanto, rispetto a χ , l'utensile dentiera ha una sporgenza (*addendum*) ed una rientranza (*dedendum*) entrambi pari a $1.25 m$. Con questo proporzionamento, un utensile dentiera risulta pienamente definito da due soli parametri: il modulo m e l'angolo di pressione $\alpha = 90^\circ - \beta$. La Fig. 9 illustra la forma della dentiera normalizzata con $m = 1$ mm e con angolo di pressione standard $\alpha = 20^\circ$.

Variazioni nel valore del modulo portano a dentiere di dimensioni diverse, ma di forma simile (nel senso geometrico). Pertanto, l'unico parametro che influenza veramente la forma della dentiera è l'angolo di pressione α . In definitiva, il modulo ha solo un effetto di scala, mentre l'angolo di pressione influenza veramente il processo di involuppo, come sarà illustrato.

Anche se, di norma, $\alpha = 20^\circ$, può essere interessante determinare il possibile intervallo teorico in cui può variare l'angolo di pressione della dentiera. Il limite inferiore è zero. Il limite superiore è dettato dalla condizione di avere denti di altezza pari a $2.5 m$: la condizione limite di dentiera con denti "a punta" si ha per $\alpha = \arctan(\pi/5) = 32.14^\circ$. In pratica, α viene fatto variare fra 15° e 25° .

Un'ultima osservazione. La definizione del modulo (ovvero del passo) della dentiera non è ambigua. Infatti, ad una data dentiera può essere associato un solo valore del modulo. Ciò discende dal fatto che il passo fra due profili non dipende dalla retta ε scelta quale polare della dentiera (o linea primitiva di taglio). Lo stesso non può dirsi per le ruote dentate (il passo cambia se misurato su circonferenze diverse). Pertanto, ogni volta che ci si riferirà al modulo, deve intendersi il modulo dell'utensile dentiera utilizzato per il taglio della ruota. Lo stesso vale per l'angolo di pressione α .

Un parametro che, anche per le ruote dentate, non dipende dalle condizioni di ingranamento (cioè dalle circonferenze primitive di funzionamento) è il *passo base*

$$p_b = p \cos \alpha, \quad (11)$$

ossia la distanza fra due profili omologhi consecutivi misurata *ortogonalmente* ai profili stessi [3, Vol. 1, pp. 62–65]. Il nome deriva dal fatto che p_b è anche il passo misurato su ciascuna circonferenza di base.

5 Generazione per involuppo di ruote dentate (profilo, raccordo e circonferenza di piede)

I denti vengono generati per involuppo delle varie posizioni assunte dalla dentiera durante il rotolamento della retta ε sulla circonferenza primitiva della ruota. Il procedimento è, quindi, del tutto analogo a quanto fatto per la generazione di un singolo profilo.

Se si suppone di aver già fissato:

1. la *forma* della dentiera, mediante l'angolo α ;
2. le *dimensioni* della dentiera, mediante il modulo m ;

rimangono da definire due soli altri parametri prima di procedere all'involuppo e, precisamente:

1. l'eventuale *spostamento* x (con segno) della linea primitiva ε dalla linea di riferimento χ (x è positivo se diretto come in Fig. 9, ovvero se si ha una riduzione della sporgenza (addendum) l della dentiera, con conseguente allontanamento della dentiera dal centro della ruota);
2. il raggio r della circonferenza primitiva della ruota da tagliare.

Questi due parametri definiscono completamente la cinematica dell'inviluppo e quindi la forma e le dimensioni della ruota dentata.

In verità, rimane da stabilire il raggio r_a della circonferenza esterna (detta *circonferenza di testa*) della ruota dentata. Dato che le norme prevedono che il dente di una ruota abbia *sempre* un'altezza $h = r_a - r_f = 2.25 m$, si ottiene (in funzione delle già elencate variabili indipendenti)

$$r_a = r + h_a = r + x + m, \quad (12)$$

dove $h_a = m + x$ è l'*addendum* della ruota dentata. Questa relazione equivale ad imporre che fra la testa dei denti della ruota ed il fondo dei vani dell'utensile dentiera ci sia sempre un gioco di testa (clearance) pari a $0.25 m$.⁵

Il valore del raggio di primitiva r è determinato dal *numero di denti* z della ruota da tagliare. Infatti, noto il passo $p = \pi m$ della dentiera, è immediato ottenere

$$2\pi r = z p, \quad (13)$$

da cui

$$\frac{r}{m} = \frac{z}{2}. \quad (14)$$

Si noti che il raggio della circonferenza primitiva *non* dipende dall'eventuale spostamento x e nemmeno dall'angolo di pressione α della dentiera, ma solo dal modulo e dal numero di denti. La dipendenza diretta fra z e r/m , espressa dalla (14), è cosa da ricordare bene.

Come già fatto notare a p. 17, il valore assegnato al modulo non ha alcun effetto sulla forma dei denti, ma solo un effetto di scala. È, quindi, conveniente introdurre i parametri adimensionali $r/m = z/2$ e x/m (quest'ultimo detto *coefficiente di spostamento*).

In definitiva, il problema della generazione (taglio) per inviluppo delle ruote dentate con utensile dentiera dipende da *tre* soli parametri:⁶

- a) angolo di pressione α della dentiera;

⁵ r_a rappresenta il raggio del pezzo grezzo cilindrico da cui si vuol ricavare la ruota dentata; il gioco di testa indica come posizionare il pezzo grezzo rispetto all'utensile dentiera.

⁶Si possono selezionare anche altri insiemi di tre variabili indipendenti. La scelta proposta è sembrata solo la più conveniente.

- b) numero di denti z della ruota;
- c) coefficiente di spostamento x/m della linea primitiva di taglio ε dalla linea di riferimento χ .

A questo punto, il lettore attento dovrebbe sollevare una questione. Perché mai nel caso del singolo profilo si avevano due soli parametri (α e l/r , p. 4), mentre qui se ne hanno tre? Non si è appena detto che i due problemi sono sostanzialmente uguali?

Il numero dei parametri è passato da due a tre perché nella dentiera si è preso solo un segmento della semiretta μ . E un segmento ha un punto iniziale (come μ), ma anche un punto finale. Il parametro in più serve proprio a stabilire dove finisce il segmento, ossia il valore della rientranza (dedendum) k dell'utensile dentiera rispetto alla retta ε (Fig. 9).

In altri termini, il singolo profilo è illimitato, mentre i denti devono avere altezza finita. Il raggio r_a della circonferenza di testa della ruota dipende (sottratto il gioco di testa di $0.25 m$) dal valore della rientranza k della dentiera rispetto ad ε .

In base alle norme (Fig. 9), l'addendum l ed il dedendum k della dentiera sono dati da (cfr. eq. (1))

$$l = 1.25 m - x, \quad (15)$$

e

$$k = 2.5 m - l = 1.25 m + x, \quad (16)$$

in modo che l'altezza totale sia $l + k = 2.5 m$.

Ne segue che il raggio di piede della ruota è dato da (cfr. eq. (5))

$$r_f = r - h_f = r - 1.25 m + x, \quad (17)$$

dove $h_f = l = 1.25 m - x$ è il *dedendum* della ruota dentata. Il raggio di testa r_a della ruota in eq. (12) è anche dato da $r_a = r + k - 0.25 m$.

Può essere utile specializzare al caso delle ruote dentate le espressioni già fornite per il singolo profilo. In sostanza, si tratta di utilizzare le espressioni (14) e (15).

La sporgenza massima per non avere interferenza di taglio è data da (cfr. eq. (2))

$$\frac{l_0}{m} = \frac{z \sin^2 \alpha}{2}, \quad (18)$$

da cui (cfr. eq. (3))

$$\frac{l}{l_0} = \frac{2(1.25 - x/m)}{z \sin^2 \alpha}. \quad (19)$$

Infatti, con una dentiera dimensionata come in Fig. 9 si ha

$$\frac{y}{r} = \frac{l - l_0}{r} = \frac{2}{z} \left(1.25 - \frac{x}{m} \right) - \sin^2 \alpha. \quad (20)$$

La (20) esplicita anche il legame fra le distanze (con segno) y e x . Da queste relazioni si vede che il valore di l/l_0 (come quello di y/r), così importante per la forma del raccordo trocoidale e per gli effetti sul raggio di piede r_f (eq. (5)) e sul raggio limite dell'evolvente r_{inv} (eq. (6)), come illustrato nelle Figg. 2–7, è determinato da tutte le tre variabili indipendenti α , z e x/m .

Nei paragrafi che seguono si esamineranno gli effetti sulla forma dei denti di ciascuna delle tre variabili α , z e x/m .

5.1 Dentature normali ($x = 0$)

Per amore della simmetria, le norme prevedono di indicare con l'appellativo “normale” una dentatura ottenuta, in realtà, con un valore molto particolare di x/m , ossia con $x/m = 0$.

Se poi si considera che, sempre in base alle norme, l'angolo di pressione $\alpha = 20^\circ$, si ha che nel caso delle ruote normali ($x = 0$) e normalizzate ($\alpha = 20^\circ$) l'unica variabile è data dal numero di denti z .

Un primo esempio di una ruota normale con $\alpha = 20^\circ$ e $z = 32$ denti è riportato in Fig. 10 (l'inviluppo è limitato a due denti).

Come per il singolo profilo, in Fig. 10 la circonferenza primitiva e la circonferenza di base sono state tracciate, rispettivamente, con linea a tratto misto e con linea

alfa = 20 gradi, denti = 32, corr./m = 0

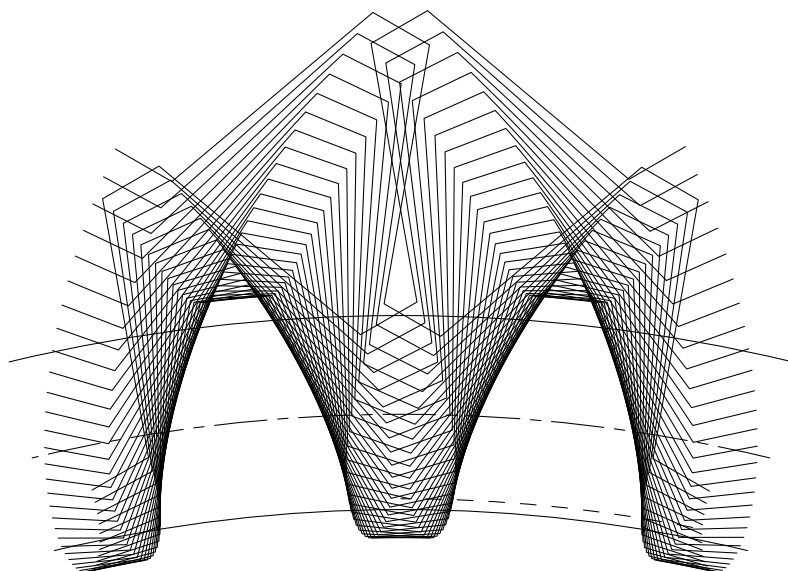


Figura 10: Ruota dentata normale con $z = 32$ denti.

continua. Sul contorno della ruota dentata si possono individuare quattro diversi tipi di curva, ciascuno di diversa origine:

1. i profili ad evolvente (destra e sinistra) di ciascun dente: ciascun profilo coniugato è generato per involuppo da un fianco della dentiera;
2. i raccordi ad arco di trocoide al piede di ciascun profilo coniugato: ogni raccordo è dato dalla traiettoria del corrispondente spigolo della dentiera; con linea tratteggiata è stata indicata la circonferenza di raggio r_{inv} (eq. (6)) che indica il punto di passaggio da evolvente a trocoide;
3. la circonferenza di piede (di raggio r_f) fra coppie di raccordi: ogni tratto della circonferenza di piede è generato per involuppo dalla testa della dentiera;
4. la circonferenza di testa della ruota di raggio r_a , indicata in figura da una circonferenza a tratto continuo. È l'unico tratto di curva che non viene generato durante il processo di taglio della dentatura. Rappresenta, ovviamente, il contorno esterno del pezzo grezzo su cui viene tagliata la dentatura. Il valore di r_a si ottiene dalla eq. (12), così da tagliare denti di altezza $h = 2.25 m$.

La Fig. 10 corrisponde alla Fig. 3. Il valore di l/r è, infatti, lo stesso in entrambi i casi.

Per le ruote normali ($x = 0$), il rapporto l/l_0 è dato da (cfr. eq. (3) e (19))

$$\frac{l}{l_0} = 1.25 \frac{2}{z \sin^2 \alpha} = \frac{z_{\min}}{z}. \quad (21)$$

A parità di α , l/l_0 dipende solo dal numero di denti. Variando z si può, quindi, ripercorrere tutta la tematica sviluppata per la generazione di un singolo profilo (Figg. 2–7).

Per non avere *interferenza* la sporgenza l non può superare il valore limite l_0 . Precisamente, deve essere $l/l_0 \leq 1$. Dall'equazione (21) risulta evidente che un limite superiore su l/l_0 equivale ad un limite inferiore su z . Si ottiene così una quantità di grande importanza pratica: il *numero minimo di denti*

$$z_{\min} = 1.25 \frac{2}{\sin^2 \alpha}. \quad (22)$$

z_{\min} è fortemente influenzato dal valore di α : ad es., per $\alpha = 20^\circ$ si ottiene $z_{\min} = 22$ denti, mentre si ha $z_{\min} = 14$ denti per $\alpha = 25^\circ$ e $z_{\min} = 38$ denti per $\alpha = 15^\circ$.

A dire il vero, nella pratica si utilizza la formula $z_{\min} = 2/\sin^2 \alpha$, che per $\alpha = 20^\circ$ fornisce $z_{\min} = 17$ denti. Come spiegato in [2, p. 243], [3, pp. 146–148] e [4, p. 7–6], la presenza di uno smusso alla sommità dei denti dell'utensile dentiera riduce l'eventuale interferenza. La dentiera si comporta, ai fini dell'interferenza di taglio, un po' come se avesse un addendum pari a m (anziché $1.25 m$). Per semplicità, in queste note non si terrà mai conto dello smusso. Resta però inteso che nella pratica

si può assumere un valore di z_{\min} di 1.25 volte minore di quello fornito dalla formula (22).

La generazione di una ruota con $z = z_{\min} = 22$ denti (ovvero $l = l_0$) è mostrata in Fig. 11. In questo caso, il raccordo è tutto interno alla circonferenza di base ($r_{\text{inv}} = r_b$), come accadeva in Fig. 2 per il singolo profilo.

Dal confronto di Fig. 11 e di Fig. 10 emergono già tutti quegli effetti elencati a pag. 9 e dovuti alla riduzione di l/r conseguente al maggior numero di denti:

1. aumento di r_f/r ;
2. riduzione della differenza fra $(r_{\text{inv}} - r_f)/r$ (infatti, $r_f \rightarrow r_{\text{inv}}$ se $l \rightarrow 0$, ovvero $z \rightarrow \infty$);
3. notevoli variazioni nella forma del raccordo (conseguenza del punto precedente);
4. esclusione dal profilo coniugato di quella parte di evolvente più vicina alla circonferenza di base, ovvero aumento di

$$r_{\text{inv}} = r_b \sqrt{1 + \tan^2 \alpha \left(\frac{l}{l_0} - 1 \right)^2} = \sqrt{r_f^2 + \left(\frac{r - r_f}{\tan \alpha} \right)^2}. \quad (23)$$

alfa = 20 gradi, denti = 22, corr./m = 0

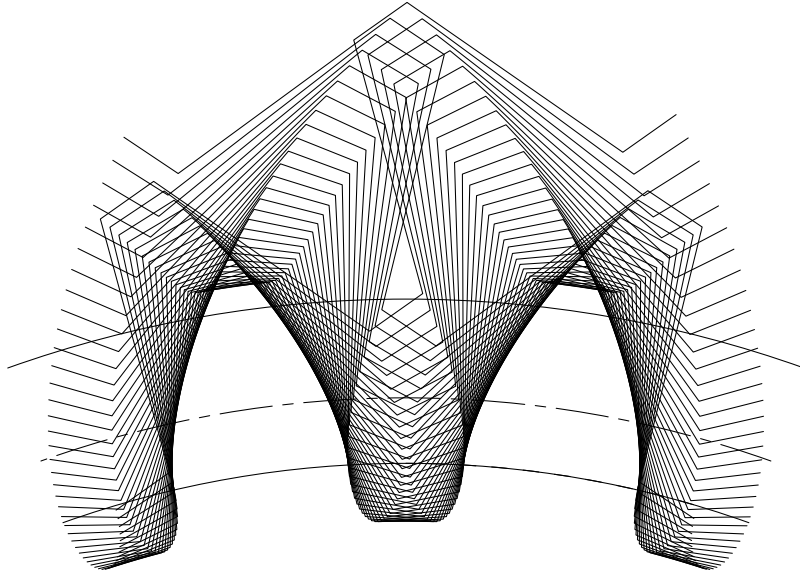


Figura 11: Ruota dentata normale con $z = z_{\min} = 22$ denti.

alfa = 20 gradi, denti = 41, corr./m = 0

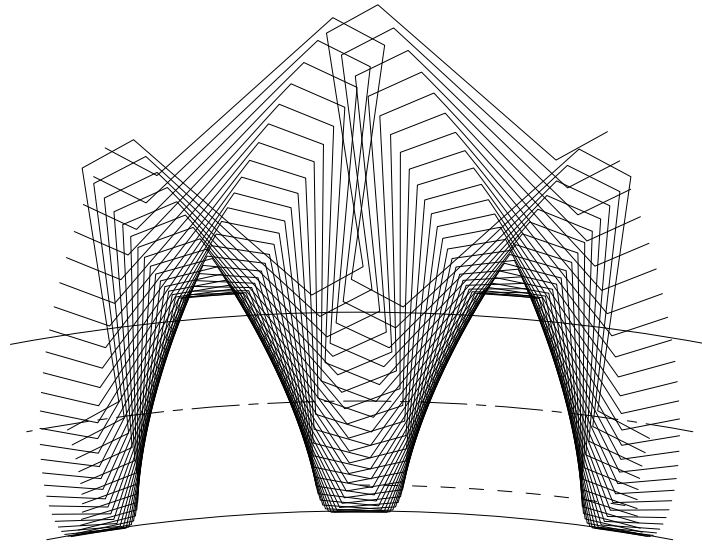


Figura 12: Ruota dentata normale con $z = 41$ denti, cui corrisponde $r_f = r_b$.

alfa = 20 gradi, denti = 68, corr./m = 0

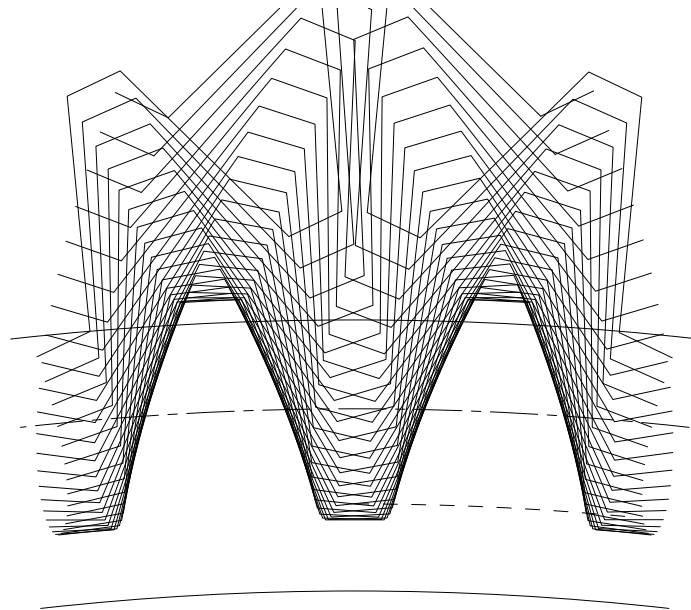


Figura 13: Ruota dentata normale con $z = 68$ denti.

Rispetto ai due casi già trattati, la sporgenza può essere ulteriormente ridotta aumentando z . La condizione $r_f = r_b$ si ha per $l/l_0 = (1 - \cos \alpha)/\sin^2 \alpha$, cui corrisponde (cfr. p. 7)

$$z = 1.25 \frac{2}{1 - \cos \alpha}. \quad (24)$$

Per $\alpha = 20^\circ$ si ottiene $z = 41$ denti. Il corrispondente involucre è mostrato in Fig. 12. La circonferenza di piede coincide, appunto, con la circonferenza di base dell'evolvente.

Aumentando ancora il numero di denti si hanno geometrie del tipo illustrato in Fig. 13 ($z = 68$). Il profilo dei denti assomiglia sempre di più a quello di una dentiera. Tutto il dente è esterno alla circonferenza di base ed i raccordi sono molto piccoli. La Fig. 13 corrisponde esattamente alla Fig. 4: entrambe hanno lo stesso valore di y/r .

La condizione $r_f = r_{inv} = r$ si ha per $l/r = 0$, cui corrispondono $z = \infty$ denti (cfr. Fig. 5). La cosa non deve turbare visto che una ruota con infiniti denti non è altro che una dentiera. Naturalmente, una dentiera utilizzata come ruota (e non come utensile) ha denti di altezza $2.25 m$, come tutte le altre ruote.

5.1.1 Ruote dentate con interferenza

Se si prova a tagliare una ruota dentata *normale* con un numero di denti minore di z_{min} si incorre nel fenomeno dell'*interferenza*. Il problema è presente anche nella

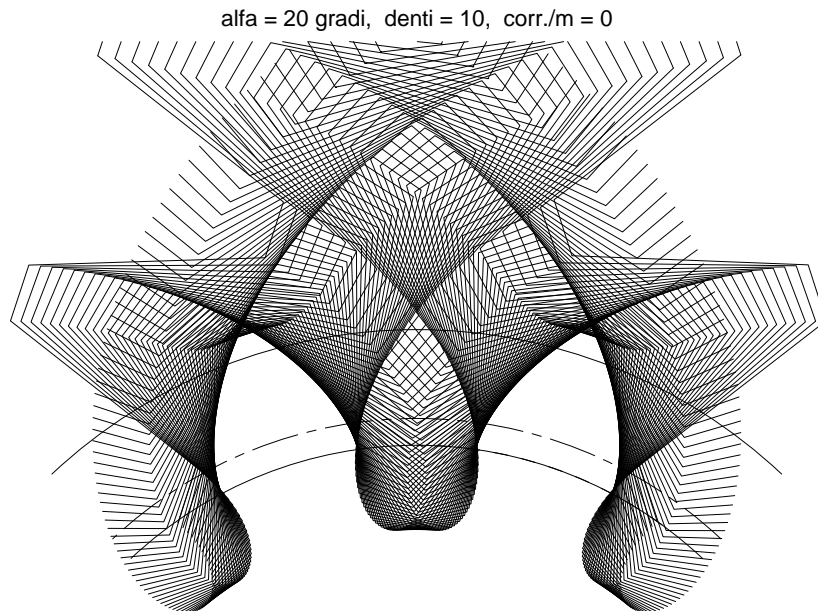


Figura 14: Effetto dell'interferenza di taglio su una ruota dentata normale con $z = 10$ denti.

generazione di un singolo profilo, come illustrato in Fig. 7, ed è essenzialmente dovuto ad un'eccessiva sporgenza l (violazione della condizione $l \leq l_0$). I termini della questione per le ruote dentate normali sono riassunti nelle formule (21) e (22).

Come esempio, si propone in Fig. 14 la generazione di una ruota normale con solo $z = 10$ denti. In questo caso, dato che $z \ll z_{\min}$, l'interferenza è molto pronunciata. I commenti alla Fig. 7 si applicano anche alla Fig. 14, tanto più che il valore di y/r è (quasi) lo stesso. Si noti la notevole asportazione di materiale alla base del dente, che ne riduce la resistenza a rottura.

5.1.2 Angolo di pressione $\alpha \neq 20^\circ$

Fino ad ora si sono generate dentature normali ($x/m = 0$) e normalizzate, ossia con $\alpha = 20^\circ$. È tuttavia possibile utilizzare anche dentiere con altri valori di α .

Gli effetti sulla forma dei denti di un aumento del valore di α sono evidenti dal confronto di Fig. 10 e di Fig. 15, dove si è impiegata una dentiera con $\alpha = 25^\circ$. I denti sono più larghi alla base e più stretti all'apice. Si noti anche la diversa forma del raccordo ed il fatto che tutto il dente si trova all'esterno della circonferenza di base (dovuto al minor valore del raggio di base r_b).

Effetti opposti si hanno con una riduzione di α . In Fig. 16 si ha la generazione di una ruota ancora con 32 denti, ma con $\alpha = 15^\circ$. In questo caso si ha anche un po' di interferenza perchè con $\alpha = 15^\circ$ si ha $z_{\min} = 38$ denti.

Si noti che nei tre casi di Figg. 10, 15 e 16 si ha sempre lo stesso valore di $r/m = z/2$.

Istruttivo è anche il confronto con la Fig. 8. Tuttavia, è bene ricordare che in ambedue i casi di Fig. 8 la sporgenza era la massima consentita per non avere interferenza ($l/l_0 = 1$), e quindi il rapporto l/r non era lo stesso. Al contrario, le dentature di Figg. 10, 15 e 16 sono state generate tutte con lo stesso valore di l/r e valori differenti di l/l_0 , come risulta subito dalla formula (21).

alfa = 25 gradi, denti = 32, corr./m = 0

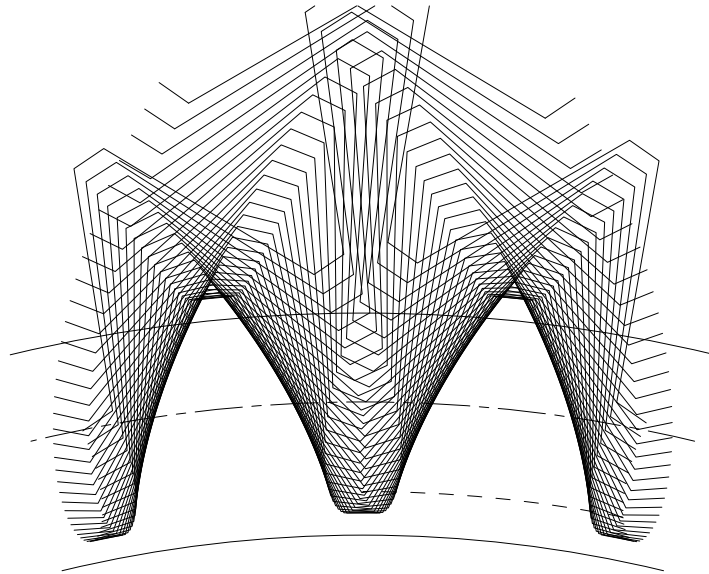


Figura 15: Effetto di un maggior angolo di pressione su una ruota dentata normale con $z = 32$ denti.

alfa = 15 gradi, denti = 32, corr./m = 0

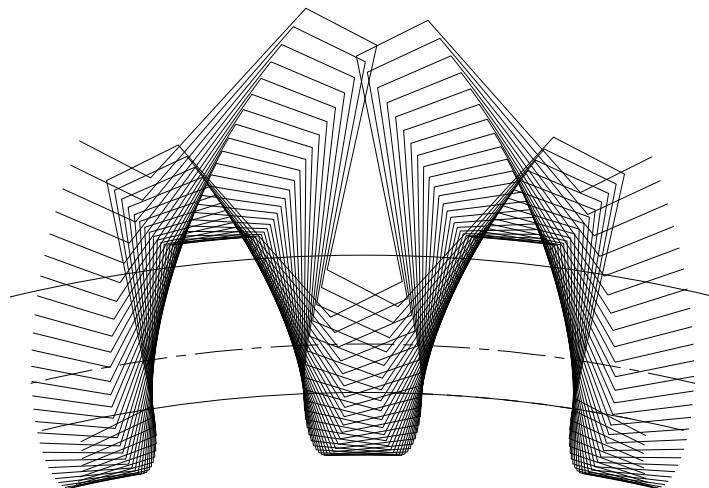


Figura 16: Effetto di un minor angolo di pressione su una ruota dentata normale con $z = 32$ denti.

5.2 Dentature corrette (o con spostamento $x \neq 0$)

Non è sempre possibile o conveniente usare dentature con proporzionamento “normale” [4, p. 5–16]. Spesso si ricorre a dentature “corrette”, ottenute cioè con uno spostamento x della linea primitiva di taglio ε rispetto alla linea di riferimento χ (Fig. 9). L’utensile è lo stesso utilizzato per le dentature normali [3, Vol. 1, pp. 180–181], cambia solo il moto relativo.

L’eventuale correzione x/m ha vari effetti sulla ruota dentata. Tuttavia, *non* influenza il raggio di primitiva r della ruota (eq. (14)), né l’altezza $h = 2.25 m$ del dente (almeno fino a che i denti non siano “a punta”). Anche il gioco di testa durante il taglio è sempre pari a $0.25 m$.

Lo spostamento x ha diretta influenza sulla sporgenza l della dentiera. Con l’introduzione dello z_{\min} , l’eq. (19) può essere posta nella forma seguente

$$\frac{l}{l_0} = \frac{2(1.25 - x/m)}{z \sin^2 \alpha} = \frac{z_{\min}}{z} - \frac{x}{l_0}, \quad (25)$$

Si noti come tutte le tre variabili indipendenti α , z e x/m concorrano a determinare il valore di l/l_0 .

L’equazione (25) non è altro che la trasposizione (specializzazione) al caso delle ruote dentate della formula generale (3) ottenuta per il singolo profilo.

Il valore minimo (in senso algebrico) dello spostamento x che realizza la condizione $l/l_0 = 1$ è dato da

$$\frac{x_{\min}}{m} = 1.25 - \frac{z \sin^2 \alpha}{2} = 1.25 \left(1 - \frac{z}{z_{\min}} \right). \quad (26)$$

Se $x < x_{\min}$ si ha interferenza di taglio.

Dalle formula (25) risulta chiaramente che, variando x/m , si ottiene ancora una volta una variazione del rapporto l/l_0 . Gli effetti su ciascun profilo della ruota dentata sono quelli già visti in Figg. 2–7 per l’inviluppo del singolo profilo, e in Figg. 10–14 per l’inviluppo di ruote normali con vari valori di z .

È però importante capire che la variazione di sporgenza non è che uno degli effetti associati ad x/m . Un secondo importante effetto, peraltro ovvia conseguenza del primo, è la variazione del rapporto h_a/h_f fra addendum e dedendum del dente della ruota rispetto alla circonferenza primitiva di taglio. Per le ruote normali si ha $h_a/h_f = 1/1.25$, mentre per le ruote corrette

$$\frac{h_a}{h_f} = \frac{m + x}{1.25 m - x}. \quad (27)$$

Variando x si possono ottenere denti sia di tipo “long-addendum” ($x > 0$), che di tipo “short-addendum” ($x < 0$) [4, p. 5–13]. Ad esempio, al fine di evitare l’interferenza e per un miglior bilanciamento della resistenza dei denti, è comune fare il pignone con addendum lungo e la ruota che con esso ingrana con addendum corto [4, p. 5–13]. Inoltre la formula (23) continua a valere e fornisce il valore di r_{inv} .

Il limite superiore (teorico) al valore di x è dato dalla condizione di non avere denti a punta. L'incrocio fra le evolventi dei due fianchi di un dente deve avvenire ad una distanza dal centro della ruota che non sia inferiore al raggio di testa r_a . Aumentando troppo l'addendum del dente si può violare questa condizione. Il valore di x_{\max} si ottiene dalla soluzione (numerica) di questo sistema di equazioni

$$\begin{aligned}\frac{x_{\max}}{m} &= \frac{z}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \hat{\alpha}} - 1 \right) - 1, \\ \frac{x_{\max}}{m} &= \frac{z(\operatorname{inv} \hat{\alpha} - \operatorname{inv} \alpha) - \pi/2}{2 \tan \alpha},\end{aligned}\quad (28)$$

dove $\operatorname{inv} \alpha = \tan \alpha - \alpha$ è detta funzione dell'evolvente. Questo sistema di equazioni si può trovare in [4, p. 5–14], dove, però, la seconda equazione presenta un errore di stampa.

Un terzo importante effetto di x è la variazione dello spessore s di ciascun dente della ruota misurato sulla circonferenza primitiva (di taglio) [2, p. 246]

$$s = \frac{p}{2} + 2x \tan \alpha = \frac{\pi m}{2} + 2x \tan \alpha. \quad (29)$$

Lo spessore s del dente della ruota coincide con la larghezza del vano della dentiera misurato lungo ε . Mentre per le ruote normali ($x = 0$), si ha sempre $s = p/2$, nel caso delle ruote con spostamento $x \neq 0$, si ha $s \neq p/2$, anche se il passo resta uguale a p (Fig. 9).

Come di consueto, si passa a documentare questi effetti con l'ausilio di alcuni esempi grafici.

Per una prima serie di figure si assume $\alpha = 20^\circ$ e $z = 32$ denti. La ruota normale era stata ottenuta in Fig. 10. Con questi valori di α e z si ha $x_{\min}/m = -0.62$ e $x_{\max}/m = 1.69$.

Come primo esempio si assegna $x/m = x_{\min}/m = -0.62$. La dentatura risultante è mostrata in Fig. 17. Si tratta di una dentatura con addendum decisamente più corto rispetto a quella normale. Il dente ha uno spessore s minore rispetto alla Fig. 10. Il vano è, ovviamente, maggiore. Dato che $x = x_{\min}$ equivale a $l = l_0$, si ha $r_{\operatorname{inv}} = r_b$ (evolvente che inizia proprio sulla circonferenza di base). La stessa cosa accadeva per la ruota normale di Fig. 11. In quel caso era $x_{\min} = 0$ perché $z = z_{\min}$.

Riducendo ulteriormente il valore (con segno) della correzione fino, ad esempio, a $x/m = -1$, si ottiene una dentatura con interferenza, come illustrato in Fig. 18. In questo caso, come in tutti i casi in cui $x = -m$, si ha $r = r_a$.

Valori positivi di x portano ad un dente con maggior spessore s , come documentato in Fig. 19. In questo caso si è posto $x/m = 0.285$, che permette di far coincidere la circonferenza di base con quella di piede. Un simile effetto era stato ottenuto anche in Fig. 12 per una ruota normale. La formula generale per avere $r_b = r_f$ è la seguente $x/m = z(\cos \alpha - 1)/2 + 1.25$. Valori positivi di x portano ad una riduzione del raccordo al piede del dente.

alfa = 20 gradi, denti = 32, corr./m = -0.621644

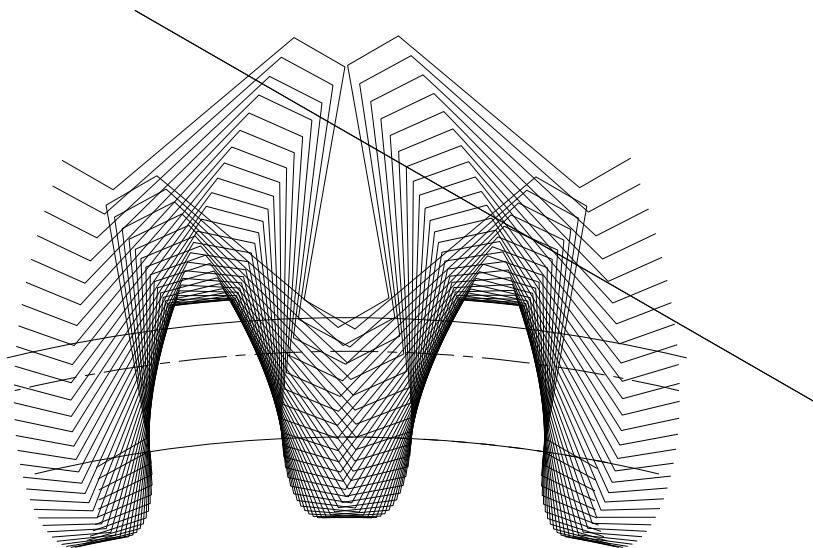


Figura 17: Ruota dentata corretta con $z = 32$ denti e $x = x_{\min} < 0$.

alfa = 20 gradi, denti = 32, corr./m = -1.

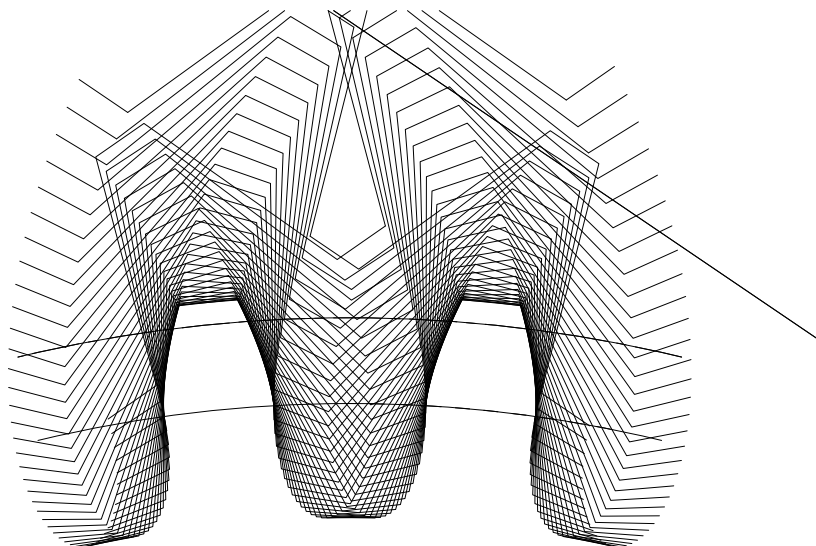


Figura 18: Ruota dentata con interferenza. $z = 32$ denti e correzione $x = -m$ in modo da avere $r_a = r$.

alfa = 20 gradi, denti = 32, corr./m = 0.285

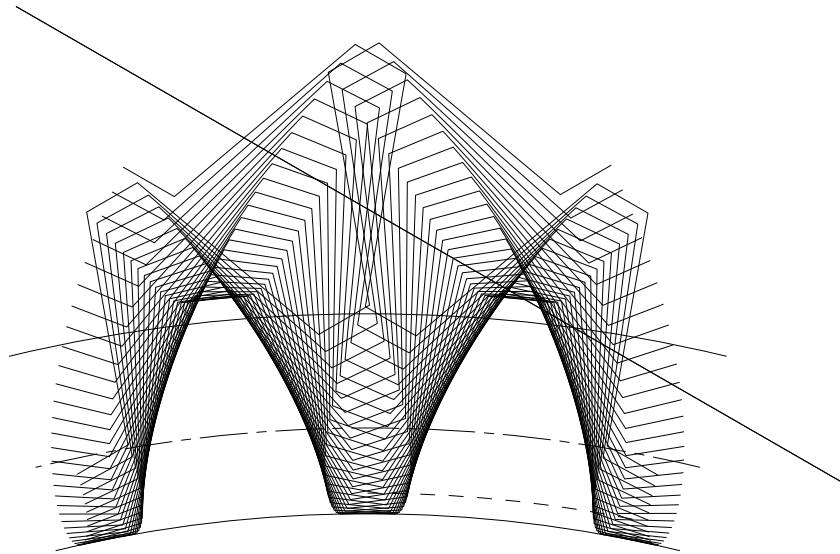


Figura 19: Ruota dentata con $z = 32$ denti e correzione in modo da avere $r_f = r_b$.

alfa = 20 gradi, denti = 32, corr./m = 0.5

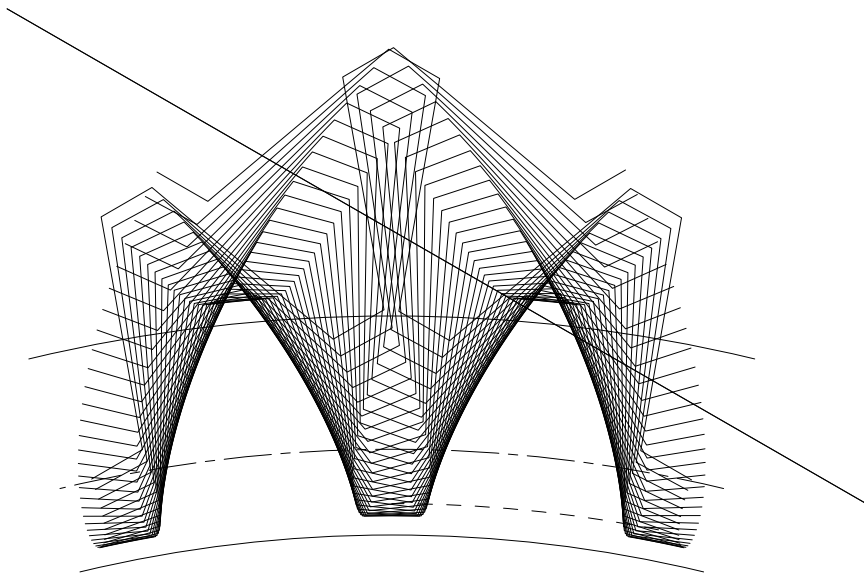


Figura 20: Ruota dentata con $z = 32$ denti e correzione $x = m/2$.

Si noti che il valore di x ha un effetto diretto sul raggio di testa r_a della ruota (eq. (12)). Quindi, tutte queste ruote hanno lo stesso raggio r (avendo tutte $z = 32$ e stesso modulo), ma diverso addendum h_a e raggio di testa r_a . Agendo solo sulla correzione si possono quindi ottenere ruote di ingombro differente.

Un ulteriore aumento fino ad $x/m = 0.5$ porta ad un dente ancora più spesso e con maggior addendum (Fig. 20). Il raccordo al piede si è ulteriormente ridotto a causa del minor valore di l/l_0 .

Il raccordo si annulla se $x/m = 1.25$. In questo caso si ha anche $r = r_f$ perché la dentiera sta tutta dalla stessa parte rispetto ad ε . La dentatura che ne risulta è mostrata in Fig. 21. Si ricordi che l'assenza di raccordo per il singolo profilo era stata già ottenuta in Fig. 5. Si tratta dello stesso fenomeno.

Anche se di scarso interesse applicativo, si vuole portare lo spostamento fino a $x/m = x_{\max}/m = 1.69$, in modo da avere denti a punta. La Fig. 22 illustra questo caso. Rispetto al caso precedente, si nota la ricomparsa di un raccordo, come già mostrato in Fig. 6 per il singolo profilo ($l/l_0 < 0$).

Nella Fig. 14 erano stati mostrati gli effetti dell'interferenza di taglio su una ruota normale con $\alpha = 20^\circ$ e $z = 10$ denti. Questo caso è interessante perché, dalle eq. (26) e (28), si ha $x_{\min} \simeq x_{\max}$. Pertanto, il valore minimo dello spostamento per

alfa = 20 gradi, denti = 32, corr./m = 1.25

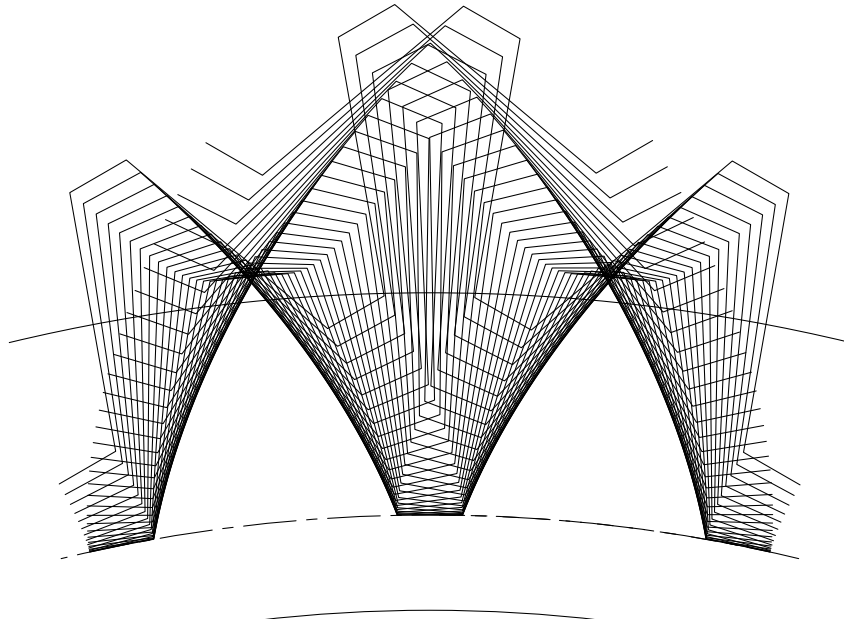


Figura 21: Ruota dentata con $z = 32$ denti e correzione $x = 1.25m$. Si noti l'assenza di raccordo e la coincidenza di tre raggi $r_{\text{inv}} = r = r_f$.

alfa = 20 gradi, denti = 32, corr./m = 1.69

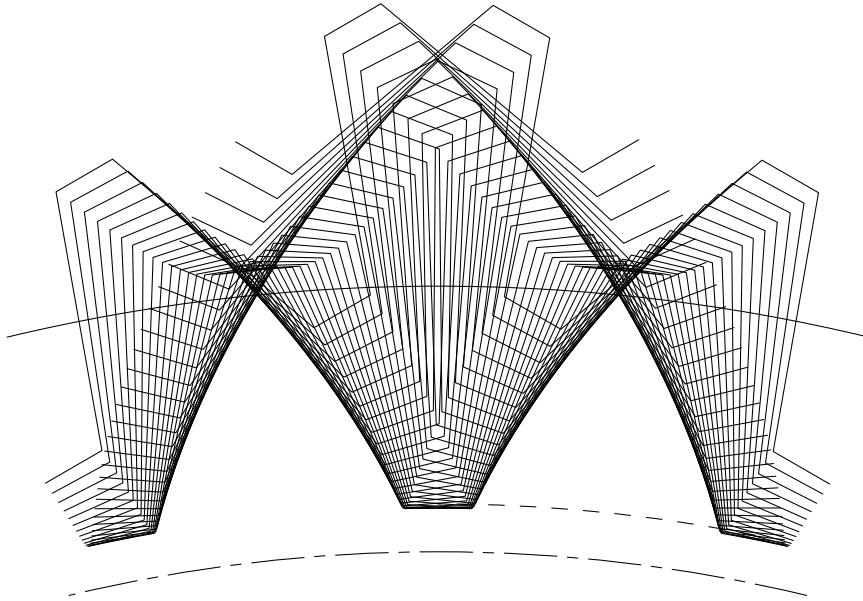


Figura 22: Ruota dentata con $z = 32$ denti e correzione $x = x_{\max}$ (dente a punta).

non avere interferenza coincide (quasi) anche con il valore massimo per non avere denti a punta. La dentatura risultante è riportata in Fig. 23.

Con $\alpha = 20^\circ$ e $z < 10$ non è possibile tagliare con utensile dentiera denti di altezza standard ($h = 2.25 m$) senza incorrere nell'interferenza. La Fig. 24 chiarisce la situazione. In funzione del numero di denti z e per $\alpha = 20^\circ$, è riportato l'andamento di x_{\min}/m e x_{\max}/m che si ottiene dalle eq. (26) e (28). Per $z < 10$, si vede che $x_{\min} > x_{\max}$!

Si noti che x_{\min}/m ha andamento lineare con ordinata all'origine pari a 1.25 (sporgenza della dentiera rispetto a χ) e coefficiente angolare pari a $-\sin^2 \alpha/2$ (eq. (26)). Figure analoghe si hanno per differenti valori di α . Un aumento di α porta ad una piccola riduzione (indipendente da z) di x_{\max}/m .

Dalla Fig. 24 si ottiene anche il valore di $z_{\min} = 22$ come ascissa che rende $x_{\min} = 0$. Il taglio di ruote normali con $z < 22$ produce necessariamente interferenza.

Riepilogando, in base al valore di z si possono individuare i seguenti campi se $\alpha = 20^\circ$ (Fig. 24):

- a) $z \geq 22$: campo di esistenza delle ruote normali (una correzione positiva o negativa è possibile, ma non obbligatoria);
- b) $10 \leq z < 22$: campo di esistenza delle ruote necessariamente corrette ($x > 0$), ma ancora con altezza del dente normalizzata (se $x < x_{\max}$);

alfa = 20 gradi, denti = 10, corr./m = 0.665

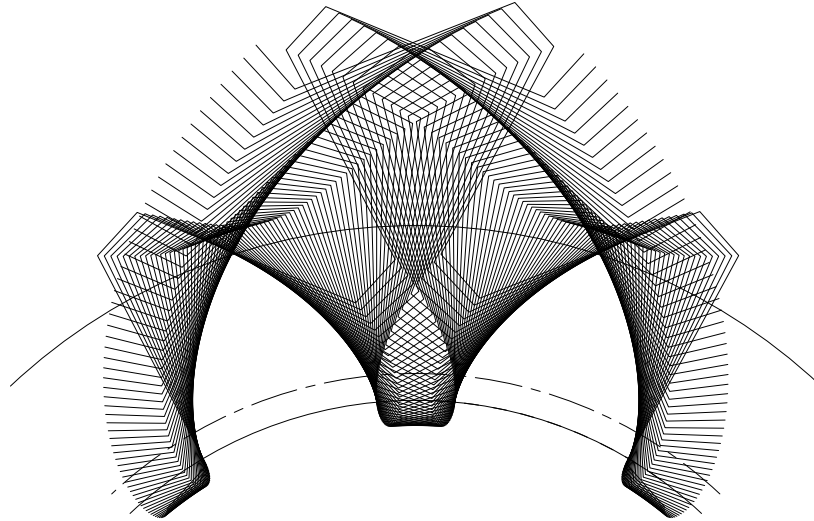


Figura 23: Ruota dentata con $z = 10$ denti e correzione $x = x_{\min} = x_{\max}$ (dente a punta ed assenza di interferenza).

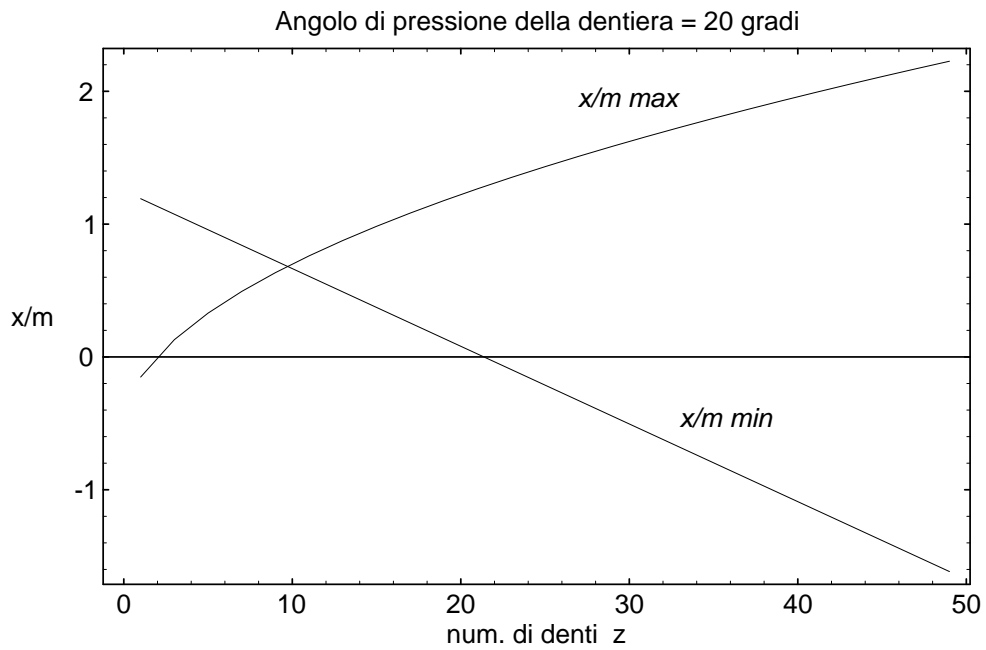


Figura 24: Andamento di x_{\min}/m e x_{\max}/m in funzione del numero di denti z della ruota da tagliare ($\alpha = 20^\circ$)

- c) $z < 10$: campo delle ruote corrette con altezza del dente inferiore a $2.25 m$ (denti a punta).

5.3 Ingranaggi senza variazione di interasse

Come già anticipato, spesso si tagliano il pignone con correzione positiva $x = \bar{x}$ e la ruota con correzione negativa $x = -\bar{x}$ di *ugual valore assoluto*.⁷ In tal modo si ottiene una coppia di ruote corrette, ma *senza variazione di interasse* [2, p. 244]. Se i due spostamenti sono complementari, le circonferenze primitive utilizzate per il taglio con l'utensile dentiera (di raggio r_1 e r_2) vengono utilizzate anche durante l'ingranamento delle ruote. L'interasse a è dato da

$$a = r_1 + r_2 = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}. \quad (30)$$

La possibilità di far ingranare correttamente due ruote tagliate con lo stesso utensile dentiera discende dalla geometria auto-complementare della dentiera. Come spiegato in [4, p. 1–5], in un gruppo di ingranaggi di assortimento (interchangeable gears) ogni membro è coniugato con ogni altro. Per avere questa proprietà è richiesto che l'elemento base (la dentiera generatrice) sia complementare con se stesso (self-complementary). In effetti, due dentiere (Fig. 9), se poste faccia a faccia *con le rispettive rette primitive ε coincidenti*, si sposano perfettamente se e solo se $x = \bar{x}$ in un caso e $x = -\bar{x}$ nell'altro.

Quale esempio si propone il caso di un rocchetto con $z = 22$ denti e di una ruota con $z = 41$ denti. Entrambe possono anche essere tagliate con $x = 0$ come già illustrato nelle Figg. 11 e 12. Con una correzione $x/m = 0.3$ si ottiene il rocchetto di Fig. 25, mentre con una correzione $x/m = -0.3$ si ottiene la ruota di Fig. 26. Il pignone è di tipo “long-addendum”, e la ruota è di tipo “short-addendum”. L'interasse a e l'angolo di pressione durante il funzionamento sono gli stessi che si avrebbero se entrambe le ruote fossero normali. È invece cambiata la lunghezza e la posizione della *linea di condotta* (o *segmento di azione* [2, p. 232]), dato che sono cambiate entrambe le circonferenze di testa [4, p. 5–16].

Un esame complessivo del problema della correzione è fornito in [3, Vol. 1, pp. 236–243].

5.4 Ingranaggi con variazione di interasse

Come illustrato nel paragrafo 3.4, due profili ad evolvente sono *sempre* fra loro coniugati, indipendentemente dalle primitive utilizzate durante la generazione per inviluppo. Ma non solo. Le polari che “nascono” quando utilizzati come profili coniugati sono sempre delle circonferenze.

⁷Questo è vero per ingranaggi riduttori (i più comuni). Nel caso di ingranaggi moltiplicatori si cerca di fare esattamente il contrario. Per maggiori dettagli si veda [4, p. 5–17 (Speed-increasing Drives)].

alfa = 20 gradi, denti = 22, corr./m = 0.3

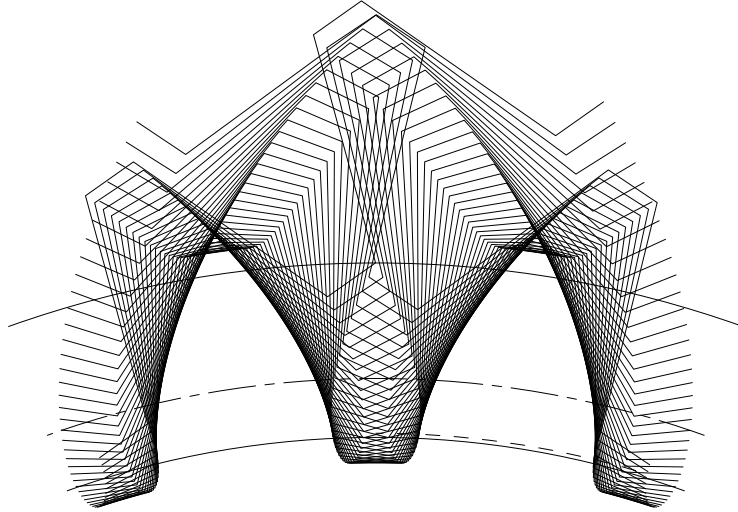


Figura 25: Ruota dentata corretta con $z = 22$ denti e correzione $x = +0.3 m$.

alfa = 20 gradi, denti = 41, corr./m = -0.3

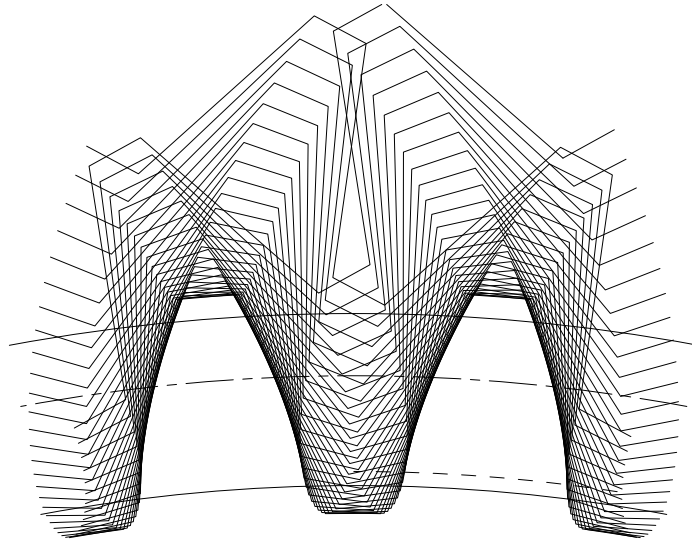


Figura 26: Ruota dentata corretta con $z = 41$ denti e correzione $x = -0.3 m$.

Queste due importantissime proprietà non sono, però, ancora sufficienti per far ingranare correttamente due ruote dentate. Infatti, per la continuità della trasmissione (essendo i denti di altezza finita) è necessario avere in certe fasi almeno due coppie di denti in presa. Il moto imposto da una coppia di profili coincide con quello imposto dall'altra coppia se entrambe le ruote hanno lo stesso *passo di base* p_b , già introdotto nella eq.(11). Si veda anche [4, Fig. 5–6(d)] per maggiori dettagli.

Tutte le ruote dentate tagliate con la stessa dentiera (stessi m ed α) hanno lo stesso valore di p_b , *indipendentemente* dal valore della correzione x usata in ciascun caso. Ecco perché è possibile accoppiare anche ruote con correzioni non complementari.

In questi casi si parla di ingranaggi con variazione di interasse. L'interasse di lavoro a' non coincide più con la somma dei raggi delle primitive di taglio. Anche l'angolo di pressione α' durante il funzionamento è differente da α della dentiera. Come mostrato in [2, pp. 241–249], si hanno le relazioni seguenti

$$\operatorname{inv}\alpha' = \frac{2(x_1 + x_2) \tan \alpha}{m(z_1 + z_2)} + \operatorname{inv}\alpha, \quad (31)$$

che permette di ottenere α' , e

$$a' = a \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}. \quad (32)$$

Si osservi che $a = a'$ e $\alpha = \alpha'$ se $x_1 + x_2 = 0$ (spostamenti complementari). In generale, se $(x_1 + x_2) > 0$, si avrà $\alpha' > \alpha$ e $a' > a$, e viceversa.

Può essere istruttivo considerare il caso di due ruote con lo stesso numero di denti, ma diverso valore di x . Ad esempio, tutte le ruote con 32 denti delle Figg. 17–21, oltre a quella normale di Fig. 10, potrebbero essere accoppiate ottenendo sempre un rapporto di trasmissione unitario, ma con interassi di lavoro differenti.

Un ulteriore requisito è che i denti abbiano altezze compatibili, in modo che la punta dei denti di una ruota non vada ad urtare sulla circonferenza di piede dell'altra ruota. Ruote tagliate con la stessa dentiera hanno denti di altezza $h = 2.25 m$ (se $x < x_{\max}$).

Purtroppo, se $(x_1 + x_2) \neq 0$, si ha *sempre* una riduzione del gioco di testa (clearance) c rispetto al valore normale di $0.25 m$. In generale, il valore di c è dato dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} c &= a' - (r_{a1} + r_{f2}) \\ &= a' - [(r_1 + m + x_1) + (r_2 - 1.25 m + x_2)] \\ &= 0.25 m + (a' - a) - (x_1 + x_2) \\ &= m \left[0.25 - \frac{x_1 + x_2}{m} + \frac{z_1 + z_2}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} - 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

con α' ricavato dalla eq. (31). Come riportato in [3, Vol. 1, p. 191], si ha sempre $(a' - a) \leq (x_1 + x_2)$, che equivale a $c \leq 0.25 m$.

L'andamento di c/m in funzione di $z_1 + z_2$ e per vari valori di $(x_1 + x_2)/m$ (sia positivi che negativi) è riportato in Fig. 27. È evidente che elevati valori di

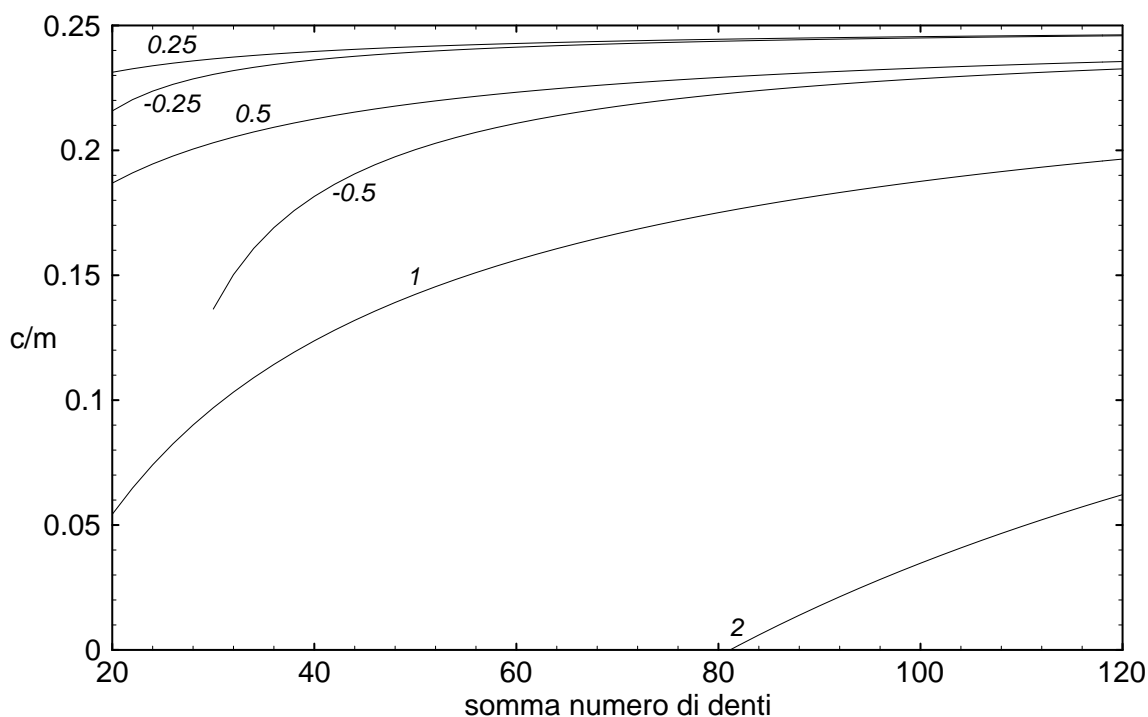


Figura 27: Andamento del gioco di testa c/m in funzione della somma dei numeri di denti e per vari valori di $(x_1 + x_2)/m$. La figura è relativa ad $\alpha = 20^\circ$.

$(x_1 + x_2)/m$ portano a notevoli riduzioni del gioco di testa c , fino ad annullarlo. Coppie di ruote con molti denti ammettono correzioni con somma di spostamenti maggiore in valore assoluto.

5.5 La galleria dei mostri

Avendo a disposizione un sistema grafico di simulazione è forte la tentazione di andare a vedere cosa succede se si provano a generare ruote dentate con valori limite dei tre parametri α , z e x/m . In questo paragrafo si cercherà di soddisfare questa curiosità. Resta inteso che non sono esempi utili ai fini applicativi.

Il massimo valore che si può assegnare ad α è 32.14° (dentiera a punta). Per valori superiori, i denti della dentiera non hanno più altezza di $2.5 m$. Con un valore così alto di α , si ha $z_{\min} = 9$. Una ruota con $z = 10$ denti può, quindi, essere normale. La Fig. 28 illustra proprio questo caso. Con una dentiera siffatta, spariscono completamente i tratti di circonferenza di piede fra denti successivi.

In Fig. 24 sono stati indicati i limiti entro cui può variare lo spostamento x . Se z è elevato, tali limiti sono molto ampi. Troppo ampi! La Fig. 29 mostra il caso di una ruota con $z = 68$ ed $\alpha = 20^\circ$, tagliata con $x/m = -2.7 \simeq x_{\min}/m$. L'effetto

alfa = 32.14 gradi, denti = 10, corr./m = 0

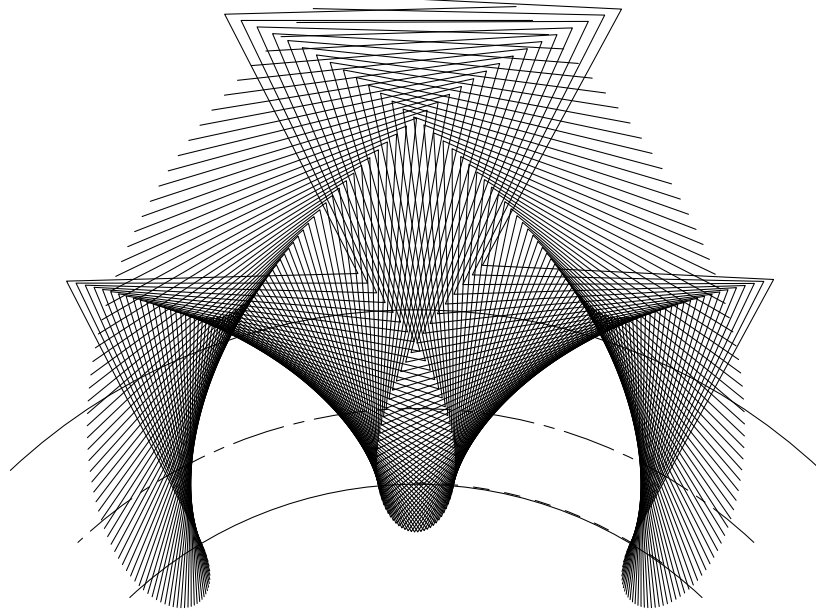


Figura 28: Ruota dentata normale con $z = 10$ ed $\alpha = 32.14^\circ$ (dentiera a punta).

è devastante. Anche se tutto è teoricamente corretto, i denti sono sottilissimi e la parte ad evolvente del profilo attivo è quasi scomparsa a vantaggio del raccordo.

Il caso complementare, ancora con $z = 68$ ed $\alpha = 20^\circ$, ma $x/m = 2.7 \simeq x_{\max}/m$ è illustrato in Fig. 30. I denti sono a punta e con fianchi quasi rettilinei. Si confrontino le ultime due figure con la Fig. 13 relativa alla ruota normale.

Vale la pena osservare che un ingranaggio formato da queste due ruote rientra nella categoria senza variazione di interasse, essendo le correzioni complementari. L'angolo di pressione rimane quindi di 20 gradi ed il gioco di testa è pari a $0.25 m$.

Come gran finale, si può provare a ridurre il numero di denti fino a $z = 1$. Naturalmente, per generare con la dentiera una ruota con solo un dente senza interferenza si deve utilizzare uno spostamento x positivo. In Fig. 31 viene mostrata una ruota con $z = 1$, ottenuta con $\alpha = 20^\circ$ e $x/m = 1.2$. Si tratta di una ruota dentata ad evolvente a tutti gli effetti, anche se il dente ha un'altezza minore di quella standard. Purtroppo, con una ruota del genere non è soddisfatta la condizione di continuità [2, p. 235].

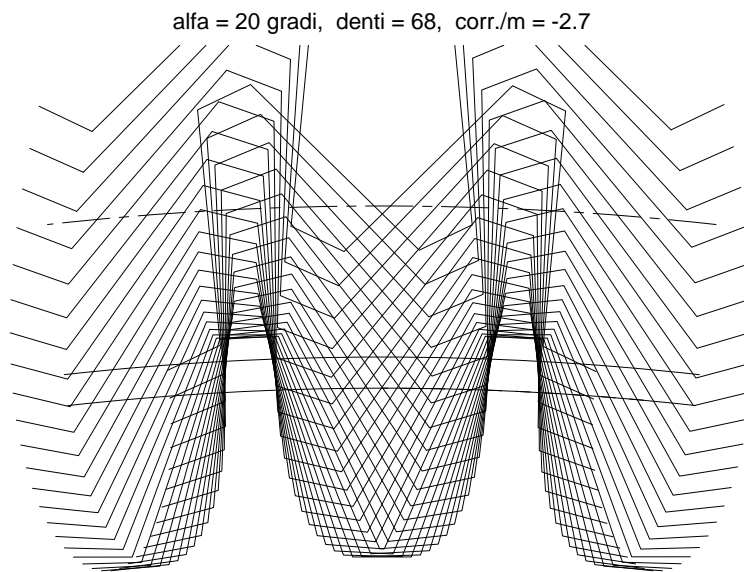


Figura 29: Ruota dentata con $z = 68$ ed $\alpha = 20^\circ$ corretta con $x/m = -2.7 \simeq x_{\min}/m$.

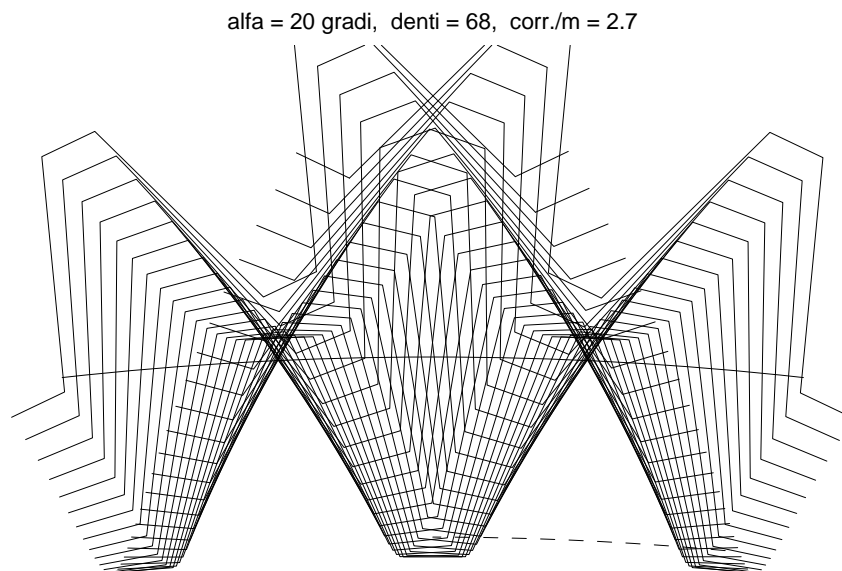


Figura 30: Ruota dentata con $z = 68$ ed $\alpha = 20^\circ$ corretta con $x/m = 2.7 \simeq x_{\max}/m$.

alfa = 20 gradi, denti = 1, corr./m = 1.2

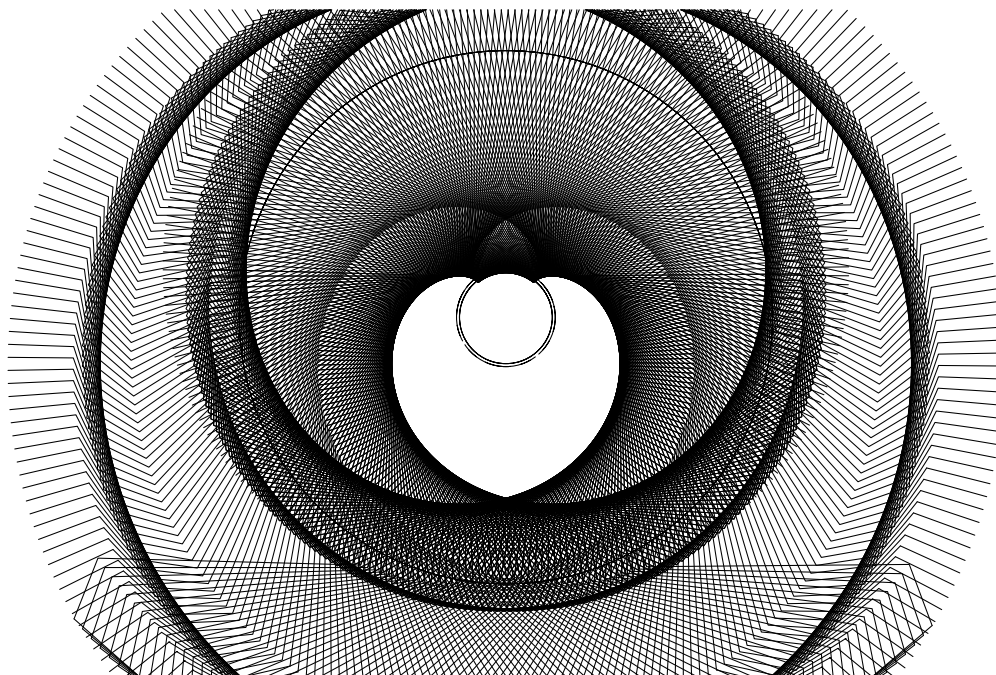


Figura 31: Ruota dentata con un solo dente. $\alpha = 20^\circ$ e $x/m = 1.2 \simeq x_{\min}/m$.

Riferimenti bibliografici

- [1] R. Einaudi, *Lezioni ed Esercitazioni di Meccanica Razionale*, Università di Pisa, 1969.
- [2] E. Funaioli, A. Maggiore, U. Meneghetti, *Lezioni di Meccanica Applicata alle Macchine*, Vol. 1, Pàtron Editore, Bologna, 1991.
- [3] G. Henriot, *Ingranaggi. Trattato teorico e pratico*, 2^a edizione, Tecniche Nuove, Milano, 1979.
- [4] D. W. Dudley (ed.), *Gear Handbook*, McGraw Hill, New York, 1962.
- [5] G. W. Michalec, *Precision Gearing: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, New York, 1966.
- [6] P. Lynwander, *Gear Drive Systems*, Marcel Dekker, New York, 1983.
- [7] *Mathematica*, Version 2.1, Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, 1992.