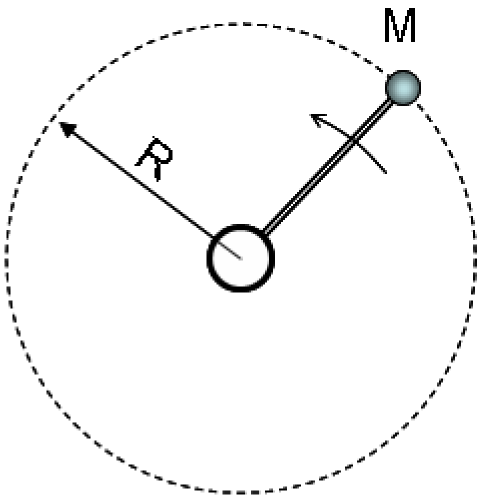
ANALISI DI MASSA IN MOTO CIRCOLARE ACCELERATO

Un corpo di massa M, inzialmente in rotazione con velocità angolare ω, viene sootosposto, a partire dal tempo t=0, ad un'accelerazione angolare di valore costante $d\omega/dt=\omega_p$.

Il corpo è connesso al centro di rotazione attraverso un'asta di sezione circolare da considerarsi priva di massa.

Calcolare:

- la forza scambiata tra massa e l'asta per t<0.
- la forza scambiata tra la massa e l'asta all'istante t=0
- la forza scambiata tra la massa e l'asta al tempo t=10 sec
- Il tempo necessario per portare a rottura l'asta (trascurando le tensioni dovute al taglio)
- la velocità della massa al momento della rottura dell'asta



DATI

$M := 10 \cdot kg$

$R := 1.2 \cdot m$

$\sigma_r := 800 \cdot MPa$ Tensione di rottura del materiale dell'asta

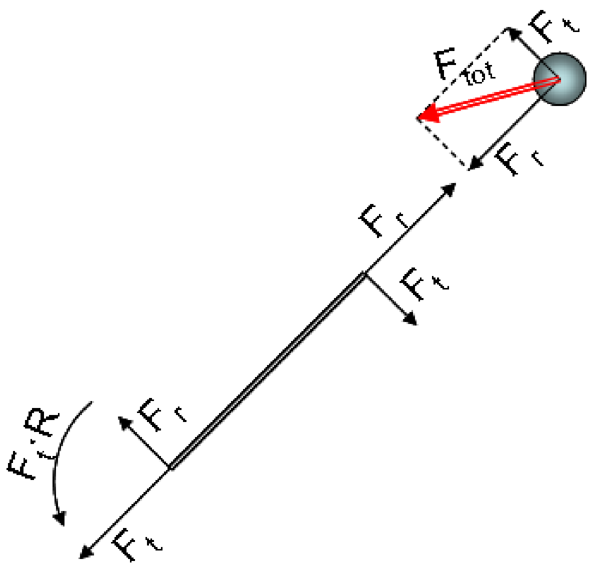
$\phi := 35.0 \cdot mm$ Diametro dell'asta

$\omega_0 := 5 \cdot \frac{1}{s}$

$\omega_p := 10 \cdot \frac{1}{s^2}$

Analisi

Lo schema delle forze scambiate tra la massa e l'asta nell'istante generico è riportato nella Figura.



Forza scambiata tra massa ed asta per t<0
Sul corpo agisce la sola accelerazione centripeta, diretta dalla massa verso il centro di rotazione, il cui modulo è dato da:

$a_c := \omega_0^2 \cdot R$ $\qquad$ $a_c = 30\ \frac{m}{s^2}$

La forza che l'asta applica alla massa per ottenere tale accelerazione è diretta in senso radiale (Ft=0) ed è pari a:

$F_{r0} := M \cdot a_c$ $\qquad$ $F_{r0} = 300\ N$

Forza scambiata tra massa ed asta per t=0
Sul corpo oltre all'accelerazione centripeta, il cui valore risulta uguale a quello calcolato in precdenza non essendo cambiata la velocità angolare, aguisce adesso anche un'accelerazione tangenziale il cui modulo è dato da:

$a_t := R \cdot \omega_p$

La componente tangenziale della forza applicata alla massa dall'asta risulta quindi data da:

$F_t := M \cdot a_t$ $\qquad$ $F_t = 120\ N$

La forza totale, in modulo, è data da:

$F_{tot0} := \sqrt{F_t^2 + F_{r0}^2}$ $\qquad$ $F_{tot0} = 323.11\ N$

Forza scambiata tra massa ed asta per t=10 sec
Dopo 10 secondi la velocità angolare della massa sarà data da:

$$\omega_{10} := \omega_0 + \omega_p \cdot 10 \cdot s \qquad \omega_{10} = 105\ \frac{1}{s}$$

A questa corrisponderà una forza radiale scambiata con l'asta il cui modulo è data da:

$$F_{r10} := M \cdot \omega_{10}^{\ 2} \cdot R \qquad F_{r10} = 1.323 \times 10^5\ N$$

Essendo invariata la componente tangenziale, la forza totale sarà adesso data, in modulo, da:

$$F_{tot10} := \sqrt{F_t^{\ 2} + F_{r10}^{\ 2}} \qquad F_{tot10} = 1.323 \times 10^5\ N$$

Tempo necessario per portare a rottura l'asta
L'asta, che è di fatto una trave a mensola, risulta sollecitata da azioni di forza normale, taglio e momento flettente.
Il valore massimo di tali caratteristiche di sollecitazione si verifica alla base ed è dato da:

$$N_z := F_r$$

$$T := -F_t$$

$$M_x := -F_t \cdot R$$

Le caratteristiche geometriche della sezione sono:

$$A_0 := \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} \qquad A_0 = 9.621 \times 10^{-4}\ m^2$$

$$J_x := \frac{\pi \cdot \phi^4}{64} \qquad J_x = 7.366 \times 10^{-8}\ m^4$$

La messime tensioni normali agenti sono date da:

$$\sigma_{max} := \frac{-M_x}{J_x} \cdot \frac{\phi}{2} + \frac{N_z}{A_0} \qquad \sigma_{max} := \frac{-M \cdot \omega_p \cdot R^2}{J_x} \cdot \frac{\phi}{2} + \frac{M\left(\omega_0 + \omega_p \cdot t\right)^2 \cdot R}{A_0}$$

Uguagliando tale valore alla tensione di rottura, è possbile ricavare il tempo in corripsodenza del quale si avrà il cedimento:

$$\sigma_r := \frac{M\cdot\omega_p\cdot R^2}{J_x}\cdot\frac{\phi}{2} + \frac{M\left(\omega_0 + \omega_p\cdot t_{rott}\right)^2\cdot R}{A_0}$$

$$\sigma_r - \frac{M\cdot\omega_p\cdot R^2}{J_x}\cdot\frac{\phi}{2} := \frac{M\left(\omega_0 + \omega_p\cdot t_{rott}\right)^2\cdot R}{A_0}$$

$$\left(\sigma_r - \frac{M\cdot\omega_p\cdot R^2}{J_x}\cdot\frac{\phi}{2}\right)\cdot\frac{A_0}{R\cdot M} := \left(\omega_0 + \omega_p\cdot t_{rott}\right)^2$$

$$\left[\left(\sigma_r - \frac{M\cdot\omega_p\cdot R^2}{J_x}\cdot\frac{\phi}{2}\right)\cdot\frac{A_0}{R\cdot M}\right]^{\frac{1}{2}} - \omega_0 := \omega_p\cdot t_{rott}$$

$$t_{rott} := \frac{\left[\left(\sigma_r - \frac{M\cdot\omega_p\cdot R^2}{J_x}\cdot\frac{\phi}{2}\right)\cdot\frac{A_0}{R\cdot M}\right]^{\frac{1}{2}} - \omega_0}{\omega_p} \qquad t_{rott} = 24.279\ s$$

Velocità della massa al momento della rottura dell'asta
La velocità della massa al momento della rottura dell'asta è data da:

$$\omega_0 + \omega_p\cdot t_{rott} = 247.786\ \frac{1}{s}$$

$$v_{rott} := \left(\omega_0 + \omega_p\cdot t_{rott}\right)\cdot R \qquad v_{rott} = 297.343\ \frac{m}{s}$$