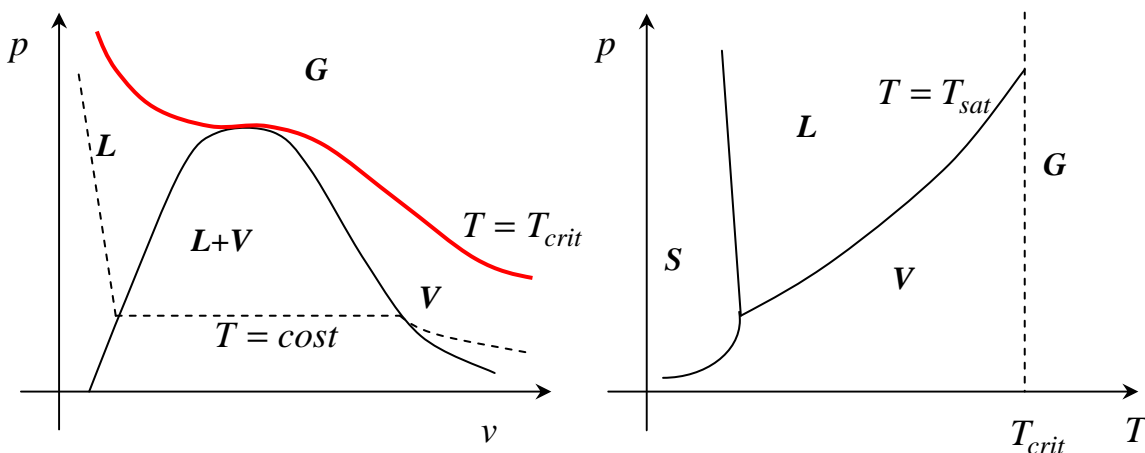


Generalità sui Fluidi ed il loro Comportamento Dinamico

1. Definizioni di base relative ai fluidi

FLUIDO:

- *non resiste a sforzi di taglio se non in moto*
- *non ha forma propria*
 - ♦ ha volume proprio \Rightarrow *liquido* (nell'ipotesi di l. incompressibile)
 - ♦ non ha volume proprio \Rightarrow *aeriforme*
 - al di sotto della T_{crit} \Rightarrow *vapore* (può essere liquefatto per semplice compressione)
 - al di sopra della T_{crit} \Rightarrow *gas* (non può essere liquefatto per compressione)



Per H_2O $T_{crit} = 647 \text{ K} \equiv 374^\circ \text{C}$, $p_{crit} = 22.1 \text{ MPa}$. Per $T = T_{crit}$ si ha che

$$v_{l,sat}(T_{crit}) = v_{v,sat}(T_{crit}), h_{l,sat}(T_{crit}) = h_{v,sat}(T_{crit}), \text{ ecc.}$$

- **La Termofluidodinamica ha come oggetto i processi termici e dinamici che riguardano i fluidi**

Variabili in gioco: $p = \text{pressione}$, $T = \text{temperatura}$, $\vec{w} = \text{velocità}$
(o equivalenti)

2. Modelli Matematici per la Descrizione dei Fluidi

Dalla Fisica Generale sappiamo che nella Meccanica del punto materiale:

- *un punto è caratterizzato dalla sua “legge oraria” $\vec{r} = \vec{r}(t)$ e dalla sua massa*
- *sistemi di punti materiali sono caratterizzati dalle “leggi orarie” dei vari punti e dalle relative masse*

Nella Meccanica dei Fluidi:

- **si hanno particelle più o meno intimamente interagenti**
- **se il libero cammino medio delle particelle (molecole) è molto inferiore in confronto alle dimensioni in gioco si fa l'ipotesi che il fluido costituisca un mezzo CONTINUO**
- **questa ipotesi consente di scrivere equazioni di bilancio che rappresentano bilanci macroscopici o microscopici su regioni contenenti un mezzo continuo**

Anche nella Meccanica dei Fluidi si possono definire grandezze cinematiche locali quali la posizione, la velocità e l'accelerazione:

- **PUNTO DI VISTA EULERIANO (o spaziale o locale)**
fissato un punto nello spazio, \vec{r} , si valutano la velocità, l'accelerazione e tutte le altre proprietà in quel punto
- **PUNTO DI VISTA LAGRANGIANO (o sostanziale o materiale)**
si considera la particella che occupa inizialmente una certa posizione, $\vec{r}_p(0) = \vec{r}_0$, e la si segue nel suo moto considerando la variazione delle sue proprietà (velocità, accelerazione, temperatura, ecc.)

Nel caso di “gas rarefatti” o condotti molto piccoli l’ipotesi del continuo non è applicabile: i liberi cammini medi delle molecole sono dello stesso ordine di grandezza delle lunghezze in gioco

$$N_{Knudsen} = \frac{\text{libero cammino medio}}{\text{lunghezze in gioco nel problema}}$$

Per quanto riguarda le variabili indipendenti nei problemi di fluidodinamica in cui vale l’ipotesi del continuo, si ha

- **in assenza di fenomeni termici, le variabili da considerare sono le tre componenti della velocità: w_x, w_y, w_z , la pressione e le proprietà (generalmente costanti) del fluido (densità, viscosità, ecc.)**
- **quando i fenomeni termici sono importanti, si deve poter definire lo stato termodinamico del fluido in ogni punto: ad es., p, T, w_x, w_y, w_z possono essere scelte come variabili indipendenti e devono essere assegnate opportune “relazioni di stato” per definire le altre variabili termodinamiche e relazioni per valutare le proprietà termofisiche (viscosità, conducibilità, tensione superficiale)**

Per un sistema in equilibrio termodinamico vale la legge di Gibbs che specifica il numero di variabili termodinamiche da assegnare per definire univocamente lo stato termodinamico di una sostanza

$$V = C - F + 2$$

V = numero di variabili , C = numero dei componenti chimici , F = numero di fasi

Esempi rilevanti:

- **Fluido monofase monocomponente:** $C = 1, F = 1, \Rightarrow V = 2$
ad es. $\rho = \rho(p, T)$
- **Fluido bifase monocomponente in equilibrio termico** ($T_l = T_v$):
 $C = 1, F = 2, \Rightarrow V = 1$; **infatti:** $p = p_{sat}(T)$ o $T = T_{sat}(p)$, per cui:
 $\rho_l = \rho_{l,sat}(p) \equiv \rho_{l,sat}(T)$ e $\rho_v = \rho_{v,sat}(p) \equiv \rho_{v,sat}(T)$. Si noti che per definire i valori “medi” delle proprietà intensive per la miscela c’è invece bisogno di una informazione aggiuntiva sulla “estensione” relativa di liquido e vapore: ad es.
 $\rho_m = \rho_m(p, \alpha) = (1 - \alpha)\rho_{l,sat}(p) + \alpha\rho_{g,sat}(p)$
- **Fluido bifase monocomponente con temperature e pressioni diverse per ciascuna fase** ($p_l \neq p_v$ e $T_l \neq T_v$): si deve assegnare una coppia di variabili per ogni fase: si applica la regola delle fasi a ciascuna fase. Ad es.: $\rho_l = \rho_l(p_l, T_l)$ e $\rho_v = \rho_v(p_v, T_v)$. Come nel caso precedente, si deve aggiungere una informazione sulle quantità dell’una e dell’altra fase presenti; ad es.: α o x .
- **Fluido bifase con temperature e pressioni diverse per ciascuna fase** ($p_l \neq p_g$ e $T_l \neq T_v$) e noncondensabile in fase gas con pressione parziale p_n ; si ha:

$$\rho_l = \rho_l(p_l, T_l) \qquad \rho_g = \rho_v(p_v, T_g) + \rho_n(p_n, T_g)$$

$$p_g = p_v + p_n$$

l’aeriforme è una miscela daltoniana

La relazione di stato per un fluido monofase può essere data nella forma

$$\rho = \rho(p, T)$$

Della precedente è possibile avere casi particolari:

- **fluido barotropico (la temperatura varia poco):** $\rho = \rho(p)$
- **fluido con densità non dipendente dalla pressione:** $\rho = \rho(T)$
- **fluido incomprimibile:** $\rho = cost$
- **fluido di Boussinesq:** è considerato incomprimibile a tutti gli effetti tranne che per ciò che riguarda il galleggiamento dovuto alle differenze di temperatura:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)]$$

in cui T_0 è una temperatura di riferimento, ρ_0 la densità corrispondente ed è

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \text{coefficiente di espansione termica isobaro}$$

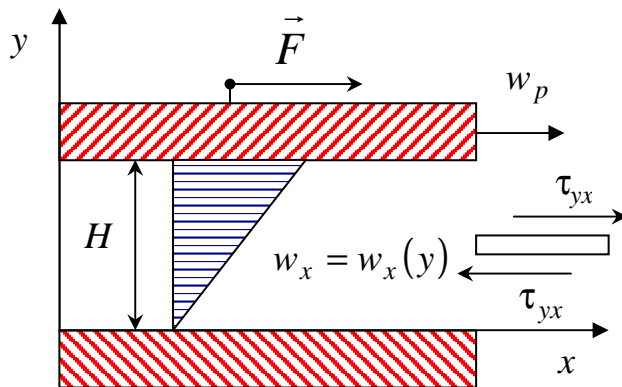
3. Variabili Rilevanti

- **Pressione**

a) In un fluido in quiete è la forza normale di compressione agente per unità di superficie

➤ nei fluidi in quiete la pressione è *isotropa* e viene detta *idrostatica*

- nei fluidi in moto, nascono sforzi tangenziali, e anche lo sforzo normale non coincide esattamente con la pressione a causa di sforzi viscosi normali



Moto Piano di Couette

• Viscosità

Considerato il fluido in moto laminare tra due piastre piane, si ha che per mantenere la piastra superiore in moto uniforme è necessario applicare una forza \vec{F} data da

$$|\vec{F}| = A\mu \frac{w_p}{H} \Rightarrow \frac{|\vec{F}|}{A} = \mu \frac{w_p}{H}$$

In termini locali, si pone una relazione di proporzionalità diretta (lineare) tra sforzo di taglio e gradiente di velocità

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dw_x}{dy} \quad (\text{legge di Newton della viscosità})$$

Def.: I fluidi i quali, in moto laminare, si comportano in questo modo vengono detti newtoniani (altrimenti, si dicono non-newtoniani)

I gas e i liquidi più comuni sono newtoniani. Le paste ed alcuni alti polimeri sono non-newtoniani

La costante di proporzionalità nella legge di Newton, μ è detta **viscosità dinamica** (o semplicemente viscosità); si ha:

$$\mu = \left[\frac{kg}{m \cdot s} \right] = [Pa \cdot s] = \left[10 \frac{g}{cm \cdot s} = 10 \text{ poise} \right]$$

- ordine di grandezza per acqua a T ambiente $\approx 10^{-3} \text{ kg}/(ms)$
- ordine di grandezza per aria a T amb. e P atm. $\approx 2 \times 10^{-5} \text{ kg}/(ms)$

Spesso in luogo di μ si usa la *viscosità cinematica* detta anche *diffusività molecolare della quantità di moto*

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

essa traduce la capacità dei fluidi di scambiare quantità di moto ed ha un ruolo analogo a quello che la *diffusività termica* ha per lo scambio termico

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

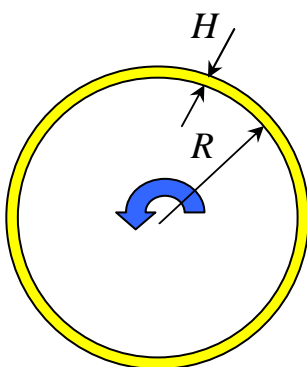
Generalmente si ha che:

- *nei liquidi*: μ diminuisce al crescere della temperatura
- *negli aeriformi*: μ cresce al crescere della temperatura

Ciò accade per il diverso meccanismo di trasporto della q di moto

- *nei liquidi*: il trasporto avviene principalmente per gli urti tra le molecole
- *negli aeriformi*: il trasporto avviene principalmente a causa dello spostamento di molecole in volo libero

La viscosità può essere valutata, ad esempio, misurando il momento resistente agente su due cilindri concentrici, in rotazione l'uno rispetto all'altro, separati da uno strato del fluido in oggetto



Se $H \ll R$ le superfici cilindriche possono essere trattate come se fossero piane:

$$\tau = \mu \frac{w_{\text{periferica}}}{H} = \mu \frac{\omega R}{H}$$

La forza tangenziale totale è quindi

$$F = \tau \cdot 2\pi R \cdot L_{\text{assiale}} = \mu \frac{\omega R}{H} 2\pi R \cdot L_{\text{assiale}}$$

La coppia resistente agente sul cilindro interno quando esso è in moto è quindi data da:

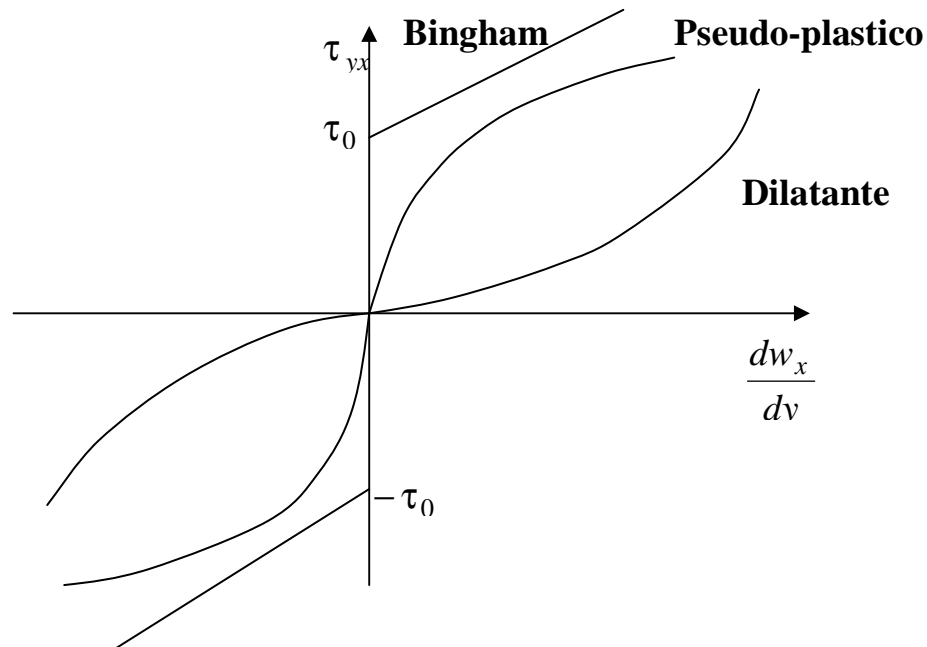
$$|\vec{\mathcal{M}}| = FR = \mu 2\pi \frac{\omega R^3}{H} L_{assiale}$$

da cui

$$\mu = \frac{|\vec{\mathcal{M}}| H}{2\pi \omega R^3 L_{assiale}}$$

Lo studio dei fluidi non-newtoniani fa parte della *reologia*

Per questi fluidi non vi è una relazione lineare tra sforzi di taglio e derivate della velocità



Si pone:

$$\tau_{yx} = \eta \frac{dw_x}{dy}$$

- Si hanno diversi tipi di comportamento:
 - ◆ η cresce con τ_{yx} : *comportamento dilatante*
 - ◆ η decresce con τ_{yx} : *comportamento pseudoplastico*
- Sono stati sviluppati diversi modelli a due parametri:
 - ◆ *modello di Bingham*:

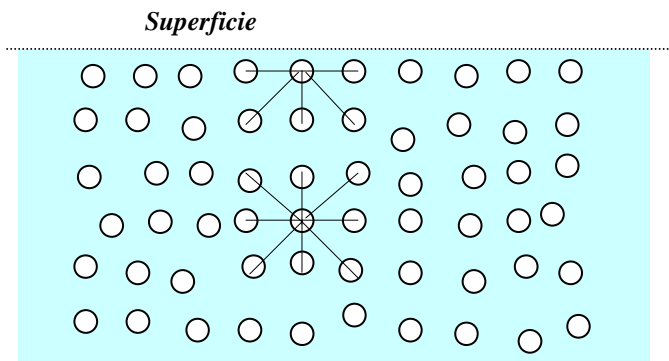
$$\tau_{yx} = \mu_0 \frac{dw_x}{dy} \pm \tau_0 \quad \left| \tau_{yx} \right| > \tau_0$$

$$\frac{dw_x}{dy} = 0 \quad \left| \tau_{yx} \right| \leq \tau_0$$

alcune vernici si comportano in questo modo

- **Tensione Superficiale**

Essa è dovuta alle forze che si scambiano reciprocamente le molecole; infatti, tali forze si fanno equilibrio all'interno del fluido, ma in vicinanza della superficie danno luogo ad una risultante diretta verso l'interno.



La tensione superficiale può essere definita come una forza per unità di lunghezza o una energia per unità di area

$$\sigma = \left[\frac{N}{m} \right] = \left[\frac{N \cdot m}{m^2} \right] = \left[\frac{J}{m^2} \right]$$

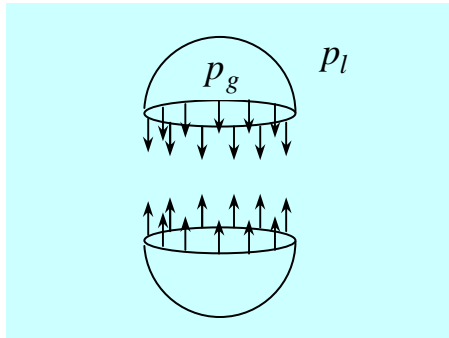
Nel primo caso essa rappresenta la tensione operante sull'unità di lunghezza della curva ottenuta tagliando l'interfaccia per mezzo di un'altra superficie (ad es., un piano)

Nel secondo caso, essa rappresenta l'energia che deve essere spesa per estendere l'area dell'interfaccia di un'unità di superficie (ad es., per aumentare il volume di una bolla o di una membrana).

La tensione superficiale ha notevole importanza nel caso di interfacce liquido-vapore, liquido-aria o liquido-solido, poiché provoca alcuni fenomeni interessanti.

➤ **La pressione in una bolla è maggiore di quella nel liquido esterno;**

infatti considerando l'equilibrio di ogni metà di una bolla sferica (v. figura) si ha:

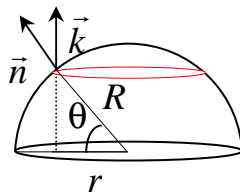


$$\underbrace{\sigma 2\pi R}_{\text{forza dovuta alla tensione superficiale}} = \underbrace{(p_g - p_l)\pi R^2}_{\text{risultante delle forze di pressione lungo la verticale}}$$

e quindi

$$p_g = p_l + \frac{2\sigma}{R}$$

Nella precedente il valore della forza verticale risultante dalla differenza di pressione tra interno ed esterno della bolla è stato ottenuto tramite le seguenti relazioni:



$$F_{\Delta p} = \int_S (p_g - p_l) \vec{n} \cdot \vec{k} dS$$

in cui

$$dS = 2\pi r R d\theta \quad r = R \cos \theta$$

e quindi

$$dS = 2\pi R^2 \cos \theta d\theta$$

D'altra parte è

$$\vec{n} \cdot \vec{k} = \sin \theta$$

e quindi

$$F_{\Delta p} = \int_S (p_g - p_l) \vec{n} \cdot \vec{k} dS = (p_g - p_l) \int_0^{\pi/2} 2\pi R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

da cui

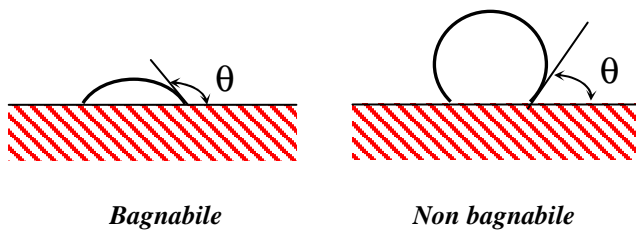
$$F_{\Delta p} = (p_g - p_l) 2\pi R^2 \int_0^1 \sin \theta d(\sin \theta) = (p_g - p_l) 2\pi R^2 \int_0^1 x dx = (p_g - p_l) \pi R^2$$

Si nota quindi che la forza risultante dalla differenza di pressione nella direzione del versore \vec{k} è pari al prodotto di tale differenza per la proiezione dell'area su cui insiste su di un piano normale al versore

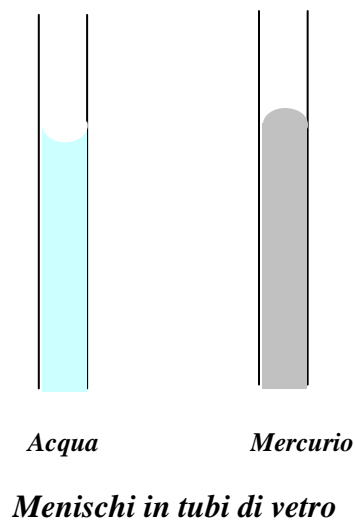
Per gocce di liquido in un gas si possono fare considerazioni analoghe.

➤ *Fenomeni di bagnabilità* si presentano quando liquidi sono in contatto con superfici solide ed altri fluidi (ad es., aria)

Questi fenomeni sono legati ai valori relativi delle energie superficiali



Un solido può essere considerato *bagnabile* o *non bagnabile* da un particolare liquido a seconda che l'angolo di contatto della superficie liquida con quella solida sia superiore o inferiore a 90°

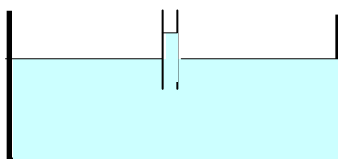


La formazione di *menischi*, cioè di superfici libere incurvate, all'interno di tubi verticali contenenti un liquido è determinata da questi fenomeni e si incontra nei *manometri*

La formazione del menisco sulla superficie può avere notevole *importanza se il diametro del tubo è molto piccolo*

In questo caso, infatti, la forma della superficie (concava o convessa) può determinare una salita o una discesa del liquido rispetto al livello atteso, ad esempio, sulla base del principio dei “vasi comunicanti” (*capillarità*)

In particolare, se il tubo viene bagnato il fluido “sale”, in caso contrario esso “scende”



4. Tipi di Moto di un Fluido

Alcuni tipi di moto considerati nella Fluidodinamica fanno riferimento a regimi di realmente osservati o a schematizzazioni convenienti dal punto di vista della modellizzazione

Moto Laminare e Moto Turbolento

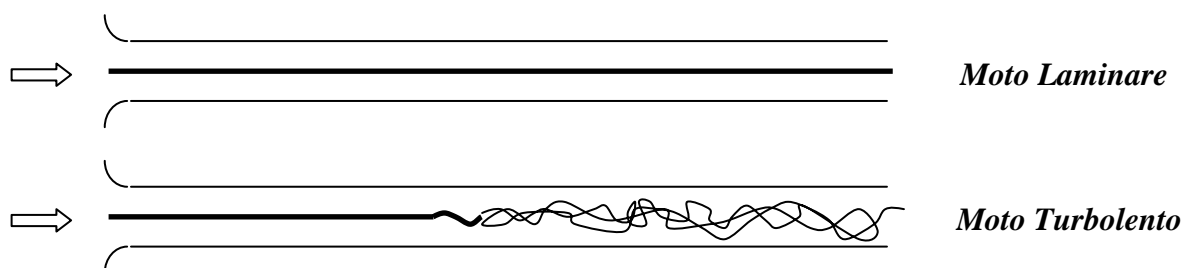
- A velocità relativamente bassa il moto in un fluido avviene in modo “ordinato”, in “lamine” parallele che non si mescolano tra loro a livello macroscopico:

questo è il regime di **MOTO LAMINARE**

- Aumentando la velocità si presentano instabilità del moto che conducono a fluttuazioni caotiche della velocità ed hanno come risultato il mescolamento di filetti adiacenti:

questo è il regime di **MOTO TURBOLENTO**

- La transizione tra moto laminare e moto turbolento avviene quando le forze viscosive sono abbastanza più deboli di quelle di inerzia
- Osborne Reynolds (1842-1912) mostrò l'esistenza di questa transizione utilizzando un tubo di vetro in cui si poteva forzare una portata d'acqua variabile, mentre un apposito dispositivo provvedeva ad iniettare un sottile filamento di inchiostro; la transizione veniva evidenziata dalla dispersione del filamento



- La transizione tra moto laminare e turbolento può essere messa in relazione con la velocità, la viscosità e la densità del fluido ed il diametro del tubo.

- Il parametro che regola la transizione è il *numero di Reynolds*

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D}{\mu}$$

in cui \bar{w} è la velocità media sulla sezione trasversale del condotto.

- I valori del numero di Reynolds a cui si ha la transizione sono compresi tra 2100 e 10^4 . Generalmente per $Re > 4000$ il moto si può considerare turbolento, mentre per $Re < 2000$ laminare

Moto Compressibile e Incompressibile

- Tutti i fluidi sono dotati di una certa *compressibilità* :
 - i gas e i vapori sono facilmente compressibili, cioè la variazione del loro volume è relativamente grande anche per variazioni modeste della pressione
 - i liquidi sono meno facilmente compressibili ma, nondimeno, il loro volume varia in funzione della pressione
- Una misura della compressibilità di un fluido è la variabile

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

che prende il nome di *compressibilità isoterma*

- Per un gas perfetto si ha:

$$pv = RT \quad \Rightarrow \quad v = \frac{RT}{p} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = - \frac{RT}{p^2}$$

$$\kappa = - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{v} \frac{RT}{p^2} = \frac{1}{v} \frac{RT}{p} \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$$

perciò a pressione atmosferica si ha

$$\kappa \approx 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$$

- Per l'acqua a temperatura ambiente e pressione atmosferica si ha

$$\kappa \approx 4.5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$$

- Ciononostante, anche gli aeriformi possono essere considerati incompressibili quando:
 - non ci siano variazioni spaziali o temporali elevate della pressione e della temperatura
 - quando la velocità sia sufficientemente inferiore a quella del suono (ad es., $w < 0.2 \div 0.3 w_{suono}$)
- Qualche volta al posto della compressibilità isoterma si considera il suo reciproco, detto *modulo di elasticità di volume*

Moto Subsonico e Supersonico

- La *velocità del suono* rappresenta la velocità con cui in un fluido si propagano le perturbazioni di pressione
- Essa è quindi un parametro importante che condiziona alcune proprietà dinamiche del moto
- Un numero adimensionale importante è quindi il numero di Mach.

$$M = \frac{w}{w_{suono}}$$

Si ha:

- *moto subsonico*, se $M < 1$
- *moto supersonico*, se $M > 1$,
- *moto transonico*, se è $M < 1$ ed $M > 1$ in zone diverse di un determinato sistema
- Per l'aria in condizioni normali si ha: $w_{suono} \approx 330 \text{ m/s}$ ovvero $w_{suono} \approx 1200 \text{ km/h}$

Moto Permanente o Transitorio

- *Moto Permanente*

Le variabili che caratterizzano il moto non variano nel tempo anche se possono variare da punto a punto

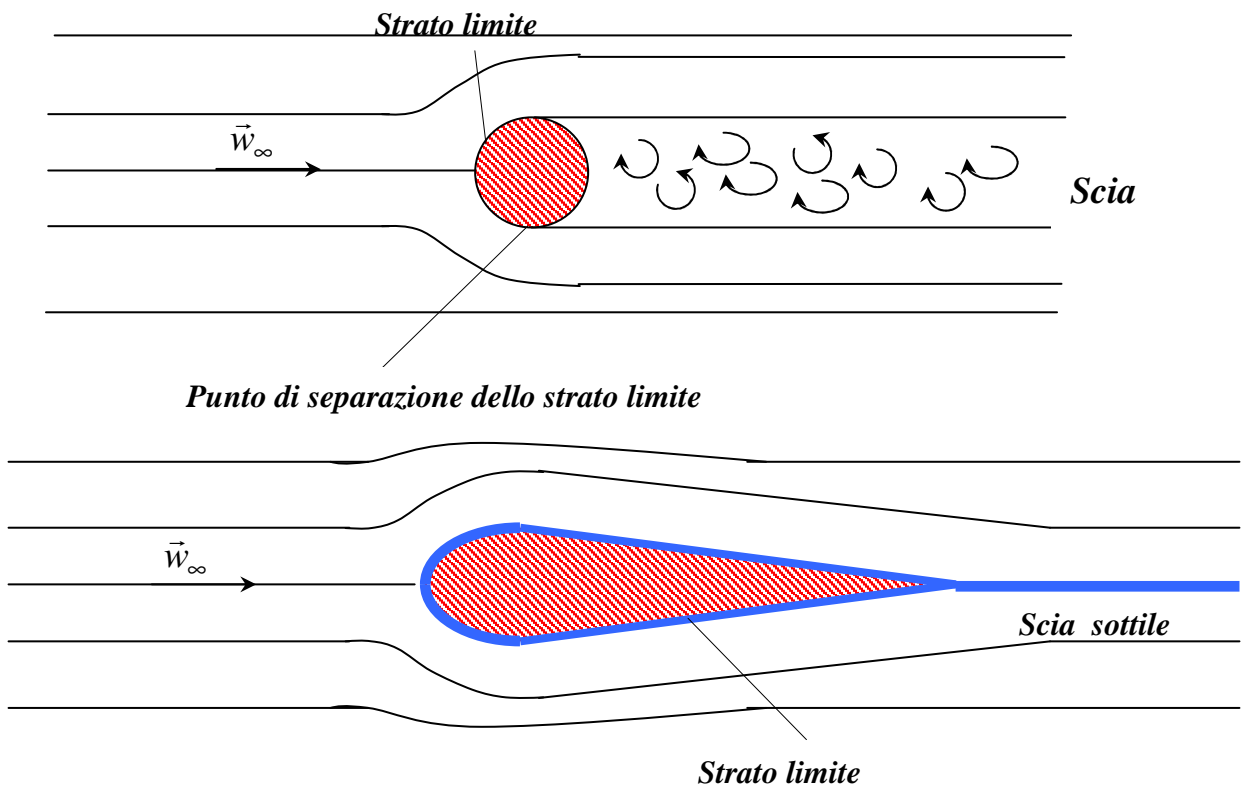
- *Moto Transitorio* (si hanno variazioni temporali)

Moto Esterno e Moto Interno

- **Moto Esterno**

Si tratta del moto sulla superficie esterna di un oggetto. Si possono distinguere tre regioni:

- una zona lontana dalla superficie in cui gli effetti dell'attrito sono trascurabili
- una zona vicina al corpo (*strato limite*), che può essere laminare o turbolenta, in cui si hanno considerevoli variazioni della velocità rispetto alla corrente libera
- una zona retrostante al corpo (*scia*) in cui si ha spesso elevata turbolenza e bassa pressione, tranne nel caso di corpi affusolati o basse velocità



- **Moto Interno**

Questo tipo di moto riguarda il flusso in condotti e tubi. In questo caso lo strato limite si ispessisce lungo il condotto e viene ad occupare l'intera sezione.